

1 Comentarios sobre las clases de MA-870

Este es un guión informal que acompaña las clases “virtuales” de MA-870, *Geometría Diferencial*, en el segundo semestre del 2020, a causa de la suspensión de clases presenciales.

1.1. Clase 1

Esta es la clase virtual del 10 de agosto del 2020, al inicio del segundo ciclo lectivo. La temática es la introducción y la sección § 1.1: *Definición y ejemplos de variedades*.

Introducción

Pese al nombre del curso, su materia no la geometría diferencial “clásica” de curvas y superficies en \mathbb{R}^3 , sino una introducción a la teoría de variedades diferenciales de cualquier dimensión (finita), con énfasis en sus propiedades “intrínsecas”, independientes de su posible encajamiento en un espacio vectorial de dimensión superior.

En los apuntes de clase hay una bibliografía de unos 16 ítemes; sin embargo, el acceso a estos libros está limitado por las circunstancias actuales. En el transcurso del semestre, se podrá recomendar algunos materiales de acceso en línea para compensar en parte esa deficiencia.

En la introducción de los apuntes, se señalan varias notaciones que se van a emplear en el curso. Cabe enfatizar dos de ellos: en primer lugar, los **corchetes de Iverson**, donde por ejemplo $\llbracket j = k \rrbracket$ que vale 1 si la condición $j = k$ se cumple, pero 0 si no (esta es la conocida “delta de Kronecker”, también denotado por δ_{jk}).

En segundo lugar, el **convenio de Einstein** para sumas omite el símbolo \sum_k en una expresión donde el índice k se repite una vez abajo y una vez arriba; por ejemplo,

$$\xi_k x^k \equiv \xi_1 x^1 + \xi_2 x^2 + \cdots + \xi_n x^n.$$

Aquí $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ es un vector con coordenadas x^k , mientras $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ es una forma lineal con componentes ξ_k .

Nociones de topología

El primer capítulo empieza con un resumen rápido sobre topología: conjuntos abiertos y cerrados, bolas abiertas en \mathbb{R}^n , espacios métricos, continuidad y convergencia, homeomorfismos. Esto por cuanto la estructura topológica subyacente a una variedad es un *espacio topológico metrizable y separable*.

Definición y ejemplos de variedades

Si M es un espacio topológico metrizable y separable, una **carta local** de M es un par (U, ϕ) , donde U es un abierto de M y $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $\phi(U)$ es un abierto de \mathbb{R}^n , y $\phi: U \rightarrow \phi(U)$ es un homeomorfismo.

Un **atlas** \mathfrak{A} sobre M es un juego de cartas locales (U_α, ϕ_α) que *cubren* M , esto es, $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$; y que son *compatibles*: cada **función de transición**

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}: \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (1.1)$$

es continua – de hecho, es un homeomorfismo, pues su inverso $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ también es continua. El par (M, \mathfrak{A}) es una *variedad topológica*.

El dominio y codominio de $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ en (1.1) son abiertos del mismo \mathbb{R}^n (porque si $m \neq n$, los espacios \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n no son localmente homeomorfos). Este número $n \in \mathbb{N}$ es la **dimensión** de la variedad topológica M . \llbracket El valor $n = 0$ está permitida, pues $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ es un singulete. Un conjunto *discreto* M es una variedad de dimensión 0; los U_α son los puntos de M . \rrbracket

Como las funciones de transición operan sobre abiertos de \mathbb{R}^n , es posible aplicarles el cálculo diferencial en n variables. Dícese que \mathfrak{A} es un **atlas de clase C^k** si cada $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ es una función diferenciable de clase C^k . Si todas las $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ son *suaves* (esto es, de clase C^∞), entonces (M, \mathfrak{A}) es una **variedad diferencial**.

El Ejemplo 1.9 dice que \mathbb{R}^n es una variedad diferencial: su atlas tiene una sola carta $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$. Y si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto, la sola carta (U, i) , donde $i: U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ es la inclusión, define un atlas n -dimensional para U .

El Ejemplo 1.10 define una **curva** en \mathbb{R}^n como una aplicación *suave e inyectiva* $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t . (La última condición garantiza que la función $\gamma^{-1}: \gamma(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es suave.)

La misma variedad topológica puede tener dos estructuras diferenciales. El caso clásico (Ejemplo 1.11) es \mathbb{R} con dos cartas locales *incompatibles* $(\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}})$ y (\mathbb{R}, κ) , donde $\kappa(t) = t^3$. La incompatibilidad surge porque $\kappa^{-1}: s \mapsto s^{1/3}$ es continua pero no es diferenciable en $s = 0$.

Los ejemplos que siguen son variedades que requieren más de una carta, porque son compactos y por lo tanto no son homeomorfos a \mathbb{R}^n . El círculo S^1 es unidimensional, la esfera S^2 y el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ son de dimensión 2, como será evidente al exhibir unas cartas locales explícitas.

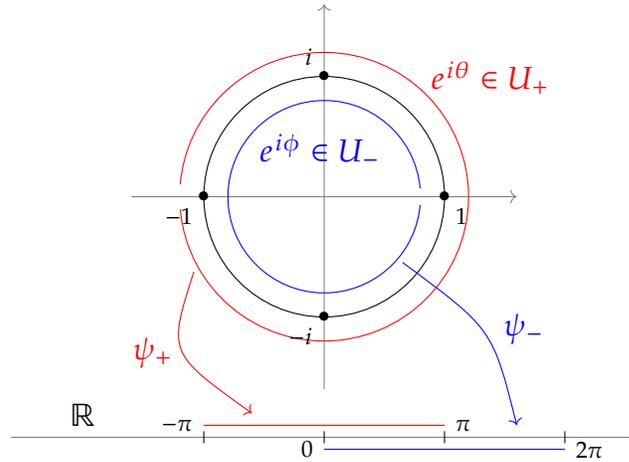


Figura 1.1: Coordenadas locales sobre S^1 : $-\pi < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi$

Ejemplo 1.12: el **círculo** S^1 . Al quitar un punto z , $S^1 \setminus \{z\}$ es homeomorfo a \mathbb{R} . Sean $U_+ := S^1 \setminus \{-1\}$ y $U_- := S^1 \setminus \{+1\}$; con

$$\psi_+ : U_+ \rightarrow (-\pi, \pi) : e^{i\theta} \mapsto \theta \quad \text{y} \quad \psi_- : U_- \rightarrow (0, 2\pi) : e^{i\phi} \mapsto \phi$$

los homeomorfismos usuales con intervalos abiertos de \mathbb{R} . Las funciones de transición $\theta \leftrightarrow \phi$ son traslaciones en \mathbb{R} por $\pm\pi$. Véase la Figura 1.1.

Ejemplo 1.13: la **esfera** S^{n-1} es compacta en \mathbb{R}^n , pero el complemento de cualquier punto es homeomorfo a \mathbb{R}^{n-1} , por la llamada *proyección estereográfica* sobre un hiperplano “ecuatorial” en \mathbb{R}^n . (Véase la Figura 1.2 de los apuntes.) Si se quitan los puntos $\pm e_n$, los “polos norte y sur”, se obtienen dos cartas (U, ϕ) y (V, ψ) cuyas imágenes son todo \mathbb{R}^{n-1} . Un cálculo explícito revela que la función de transición es

$$z = \psi \circ \phi^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|^2} \quad \text{para} \quad y \in \phi(U \cap V) = \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}.$$

Geoméricamente, esta es la *inversión* en la esfera unitaria de \mathbb{R}^{n-1} . Esta inversión es su propio inverso: $z = y/\|y\|^2 \iff y = z/\|z\|^2$. Como función de $(n - 1)$ variables, sus componentes son funciones racionales con denominadores no nulos: por lo tanto, la inversión es una función suave.

Ejemplo 1.14: El **plano proyectivo real** $\mathbb{R}P^2$ requiere tres cartas locales. Se puede definir este espacio topológico de dos maneras: como el cociente de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ cuyas clases de equivalencia son *las rectas L que pasan por el origen* (quitando el propio origen);

o bien como el cociente de \mathbb{S}^2 obtenido *al identificar puntos antipodales*, $x \sim (-x)$. Se describen los elementos de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ con las llamadas *coordenadas homogéneas*:

$$\bar{x} = [x^1 : x^2 : x^3] = [tx^1 : tx^2 : tx^3], \quad \text{donde } x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0).$$

La condición $x^j \neq 0$ identifica un abierto $U_j \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ para $j = 1, 2, 3$; y se define bien tres biyecciones $\phi_j: U_j \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\phi_1(\bar{x}) := \left(\frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1} \right), \quad \phi_2(\bar{x}) := \left(\frac{x^1}{x^2}, \frac{x^3}{x^2} \right), \quad \phi_3(\bar{x}) := \left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3} \right). \quad (1.3)$$

Un cálculo explícito muestra que

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(y^1, y^2) = \left(\frac{1}{y^1}, \frac{y^2}{y^1} \right),$$

con fórmulas análogas para las otras $\phi_k \circ \phi_j^{-1}$. Esta función es suave en el dominio $\{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 \neq 0\}$ y su codominio es $\{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 \neq 0\}$. Esos abiertos en \mathbb{R}^2 se obtienen al quitar uno de los ejes coordenados, y son *disconexos*: un augurio de ciertas dificultades más adelante.

1.2. Clase 2

Esta es la clase virtual del 13 de agosto del 2020. La temática es la sección § 1.2: *Aplicaciones diferenciables*.

Aplicaciones diferenciables

El substrato fundamental de este curso es el cálculo diferencial en varias variables. Esta sección es un breve repaso de esa materia, señalando los aspectos más útiles para nuestros propósitos.

Por definición, si $U \subset \mathbb{R}^n$, la derivada de una función $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ en un punto $x \in U$ es una función *lineal* $L_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (si existe) que aproxima bien (de la manera conocida) a la función $h \mapsto f(x+h) - f(x)$. Al poner $Df(x) := L_x$, la **derivada** de f es la función $Df: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Se dice que f es *de clase C^1* en U si Df es continua.

En breve: la derivada de una función f con valores vectoriales en \mathbb{R}^m es una función f con valores matriciales en $\mathbb{R}^{m \times n}$. Esta notación "libre de coordenadas" es útil para expresar la regla de la cadena, por ejemplo:

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x). \quad (1.6)$$

Pero suele ser más práctico trabajar con los componentes de la matriz $Df(x)$, que son las *derivadas parciales* $\partial f^i / \partial x^j(x)$.

Se dice que f es de clase C^2 si su derivada Df es de clase C^1 , y así sucesivamente. Ahora la segunda derivada es $D^2f: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ donde cada $D^2f(x)$ es bilineal y simétrica:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^j} \quad \text{para todo } j, k = 1, \dots, n,$$

por un teorema de Euler (si f es de clase C^2). En este curso, supondremos casi siempre que f es **suave**, esto es, de clase C^∞ .

► Si f es de clase C^1 al menos, se requiere una versión de “teorema de Taylor en primer grado, sin residuo”. Esto es el Lema 1.19, de Hadamard: si $f: B(x, r) \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^{k+1} , hay funciones $g_j: B(x, r) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k tales que

$$f(y) = f(x) + (y^1 - x^1)g_1(y) + \dots + (y^n - x^n)g_n(y). \quad (1.8)$$

La fórmula que define los g_j es

$$g_j(y) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}((1-t)x + ty) dt \quad \text{para } \|y - x\| < r.$$

En particular, se ve que $g_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x)$.

► El **jacobiano** Jf de una función diferenciable $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el determinante de su derivada:

$$Jf(x) := \det Df(x) = \det \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right]. \quad (1.9)$$

Si f es de clase C^1 , entonces $Jf: U \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. En particular, si $Jf(x) \neq 0$, entonces hay un abierto V con $x \in V \subseteq U$ tal que $Jf(y) \neq 0$ para $y \in V$.

El jacobiano es útil para dos propósitos: (a) para expresar cambios de variable en integrales de volumen – tema del tercer capítulo – y (b) como hipótesis $Jf(x) \neq 0$ para el *teorema de la función inversa*, Tma. 1.21.

Ese teorema dice que en un entorno de $x \in U$ con $Jf(x) \neq 0$, la función f de clase C^1 tiene un *inverso local* g , definido en un vecindario de $f(x)$; además, $Jg(f(y)) = 1/Jf(y)$ para y cerca de x .

Pero esto no significa que f sea biyectiva: hay un famoso contraejemplo $f(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy)$ con $Jf(x, y) > 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, sin embargo f es dos-a-uno.

Cabe mencionar también el *teorema del rango*, Tma. 1.24. El *rango de f* en $x \in U$ es el rango de la matriz $Df(x)$. Si este rango es constante en U , entonces hay un par

de difeomorfismos ϕ, ψ definidos en vecindarios de x y $f(x)$ respectivamente, que “rectifican” f en una matriz constante de rango r :

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : (y^1, \dots, y^n) \mapsto (y^1, \dots, y^r, 0, \dots, 0).$$

Lo que sucede aquí es que la matriz $Df(x)$, de rango r , se transforma en su *forma escalonada* por operaciones invertibles de fila y columna. El teorema asegura que ese proceso se extiende suavemente a otros puntos cercanos a x y $f(x)$, manteniendo la misma forma escalonada.

La expresión $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ también entra en la Defn. 1.25 de una **función suave entre dos variedades**, $f : M \rightarrow N$. Dadas dos cartas locales (U, ϕ) de M y (V, ψ) de N , las aplicaciones compuestas

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V) \tag{1.10}$$

entre abiertos de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m (resp.) deben ser suaves. Véase la Figura 1.3 de los apuntes.

► El Lema 1.29 hace una construcción de gran importancia: dadas dos cerradas disjuntos A y B en \mathbb{R}^n (y eventualmente en una variedad cualquiera) hay una *función suave* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \equiv 1$ en A ; $f(x) \equiv 0$ en B ; $0 < f(x) < 1$ en el resto de \mathbb{R}^n . En topología general, esto se logra con una función continua (al mostrar que “ \mathbb{R}^n es normal”). Lo nuevo aquí es la posibilidad de hacerlo con una f de clase C^∞ .

Todo se basa en las propiedades especiales de la función real del Ejemplo 1.28:

$$f(t) := e^{-1/(b-t)(t-a)} \llbracket a < t < b \rrbracket$$

definido cuando $a < b$ en \mathbb{R} . El soporte de f es el intervalo compacto $[a, b]$; f es suave y positiva para $a < t < b$; y se debe comprobar que todas las derivadas de f se anulan en los extremos a y b .

Hecho eso, la integral indefinida de f es una función g que crece suavemente del valor 0 en a al valor 1 en b . En un par de pasos más, se llega a la función suave h del Lema 1.29.

► La sección 1.2 termina con la Defn. 1.30 de **coordenadas locales** sobre una variedad cualquiera M . Si $p \in M$, hay una carta local (U, ϕ) , compatible con el atlas de M , tal que $\phi(p) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Si $\phi(q) = (x^1, \dots, x^n)$ para $q \in U$, cada $\underline{x}^j = \text{pr}_j \circ \phi$ es una *función suave* de U en \mathbb{R} . O sea: las coordenadas locales x^j son funciones reales, definidas en U .

Si (V, ψ) es otra carta local con $\psi(p) = 0$, $\psi(q) = (y^1, \dots, y^n)$, la transformación $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1, \dots, y^n)$ representa el cambio de cartas $\psi \circ \phi^{-1}$; su derivada es la matriz de funciones $D(\psi \circ \phi^{-1}) = [\partial y^i / \partial x^j]$.

Sobre la primera lista de ejercicios

Ejercicio 1.2 La esfera \mathbb{S}^{n-1} tiene un atlas de dos cartas, por proyección estereográfica. Este ejercicio introduce *otra atlas*, con cartas hemisféricas, definidas por proyecciones ortogonales sobre hiperplanos ecuatoriales. Se trata de: (a) comprobar que este es efectivamente un atlas; y (b) que los dos atlas son compatibles, así que definen la misma estructura de variedad sobre \mathbb{S}^{n-1} .

Ejercicio 1.3 La bola unitaria abierta \mathbb{B}^n de \mathbb{R}^n es difeomorfo al espacio vectorial pleno \mathbb{R}^n . Se ofrecen dos fórmulas; se debe comprobar (a) que son biyecciones inversas entre \mathbb{B}^n y \mathbb{R}^n ; y (b) que son suaves. Entonces ellos son los difeomorfismos buscados.

Ejercicio 1.4 Es caso obvio que la función f es continua en $t = a$ y $t = b$. Es fácil calcular una fórmula para $f'(t)$ cuando $a < t < b$, pero para las derivadas $f'(a)$ y $f'(b)$ se debe usar la mera definición de la derivada en un punto, antes de concluir que la derivada f' es continua. Luego, se puede repetir la historia para f'' , f''' , etcétera, por un argumento de inducción.

1.3. Clase 3

Esta es la clase virtual del 20 de agosto del 2020. Su temática es la sección § 1.3.

Vectores tangentes

Lo que distingue una variedad diferencial de una variedad topológica es la existencia de vectores tangentes en cada punto. En cálculo diferencial se conocen los planos tangentes a superficies en \mathbb{R}^3 , definidos por fórmulas que involucran las derivadas parciales de una función que determina la ecuación de la superficie. Se trata de generalizar tales derivadas parciales al contexto de variedades diferenciales en general.

Aún en \mathbb{R}^n , las derivadas parciales son entes locales: dos funciones que coinciden en un vecindario de un punto, tienen las mismas derivadas parciales en ese punto. Así surge el concepto del **germen** de una función en un punto p : una clase de equivalencia de funciones suaves $f: V_f \rightarrow \mathbb{R}$, siendo V_f un vecindario de p , donde $(f, V_f) \sim (g, V_g)$ si hay un abierto W con $p \in W \subset \overline{W} \subset V_f \cap V_g$ tal que $f|_W = g|_W$.

El conjunto $C^\infty(M, p)$ de gérmenes de funciones suaves en $p \in M$ es una \mathbb{R} -álgebra: si $f, g \in C^\infty(M, p)$, entonces \underline{tf} para $t \in \mathbb{R}$; $\underline{f + g}$; y \underline{fg} también tienen gérmenes en p .

Defn. 1.33: un **vector tangente en p** es una forma lineal $v: C^\infty(M, p) \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple una *regla de Leibniz local*:

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g). \quad (1.12b)$$

Si f y g son dos funciones suaves que coinciden cerca de p , esta fórmula implica que $v(f) = v(g)$. Eso sucede porque con el Lema 1.29 se construye una *función suave h* tal que $h(q) \equiv 1$ donde $f(q) \equiv g(q)$, cerca de p . Entonces $(f - g)h \equiv 0$; y la fórmula (1.12b) implica que

$$0 = v((f - g)h) = (v(f) - v(g))h(p) + (f(p) - g(p))v(h) = v(f) - v(g).$$

Además (Lema 1.34), si c es una función constante (cerca de p) entonces

$$c(p)v(f) = v(c(p)f) = v(cf) = v(c)f(p) + c(p)v(f)$$

para cualquier $f(p)$, así que $v(c) = 0$.

Para ver que existen vectores tangentes en p , se considera las *derivadas parciales con respecto a coordenadas locales*, en p . Dada una carta (U, ϕ) con $\phi(p) = 0$, se define:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p : f \mapsto \partial_j(f \circ \phi^{-1})(0). \quad (1.13)$$

Esto es lineal en f , cumple (1.12b), y se ve que $\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p(x^k) = \llbracket j = k \rrbracket$. (Las funciones suaves x^1, \dots, x^n están definidas en U , cerca de p .) Entonces los $\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p$ son *linealmente independientes*.

Los $\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p$ también *generan* el espacio vectorial $T_p M$ de vectores tangentes en p : con el Lema de Hadamard, se puede escribir

$$f = c + x^j(g_j \circ \phi), \quad \text{donde } g_j(0) = \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p(f) \quad \text{para } j = 1, \dots, n.$$

Como $v(c) = 0$ y $x^j(p) = 0$, se deduce $v = v(x^j) \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p$.

En resumen: el espacio vectorial $T_p M$ tiene una base $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \right\}$; note que su dimensión (finita!) es $n = \dim M$.

► Otros vectores tangentes importantes son *los vectores derivadas de curvas* (en un punto). Una **curva** en M es una función suave $\gamma: I \rightarrow M$, donde $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Si $\gamma(t_0) = p$, se define $\dot{\gamma}(t_0) \in T_p M$ por la fórmula:

$$\langle \dot{\gamma}(t_0), f \rangle := (f \circ \gamma)'(t_0). \quad (1.14)$$

Esta es la *derivada direccional* en p a lo largo de la curva γ .

Ya es posible *generalizar la derivada* $Df(x)$ de una función entre abiertos en \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m al contexto de variedades. Esta es la Defn 1.38: si $f: M \rightarrow N$ es una función suave y si $p \in M$, se puede aproximar f cerca de p por una función lineal (que depende de p).

Dicha función lineal $T_p f$ va del espacio vectorial $T_p M$ al espacio vectorial $T_{f(p)} N$. Si $v \in T_p M$, su imagen actúa sobre funciones (o gérmenes, si se quiere) $h \in C^\infty(N, f(p))$. La receta es:

$$T_p f(v): h \mapsto v(h \circ f).$$

La composición $h \mapsto h \circ f$ es lineal en h ; como v es una forma lineal, el lado derecho $v(h \circ f)$ es lineal en h . Un cálculo fácil comprueba que el lado derecho también cumple la regla de Leibniz local, en $f(p)$. En síntesis:

$$f: M \rightarrow N, \quad T_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N.$$

El Lema 1.39 muestra (sin sorpresa) que la matriz de $T_p f$, con respecto a bases de derivadas parciales $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$ de $T_p M$ y $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{f(p)} \right\}$ de $T_{f(p)} N$, coincide con la matriz de la derivada de la expresión local de f , la cual es $D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(0)$.

El Lema 1.40 expresa la regla de la cadena para aplicaciones tangentes:

$$T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_p f. \quad (1.16)$$

1.4. Clase 4

Esta es la clase virtual del 24 de agosto del 2020. Su temática es la sección § 1.4.

Subvariedades

Una superficie suave encajada en \mathbb{R}^3 , o una curva cerrada suave sobre la esfera \mathbb{S}^2 son ejemplos de subvariedades, de dimensión menor que la variedad ambiente. Para poder abordar ese concepto de manera práctica, y para reconocer cuándo un procedimiento algebraico da lugar a una subvariedad, se declara la terminología siguiente.

Sea $f: M \rightarrow N$ una función suave entre dos variedades diferenciales. En cada $p \in M$, hay una aplicación lineal tangente $T_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$. La función f es:

- ◇ una **inmersión** si cada $T_p f$ es inyectiva;
- ◇ una **sumersión** si cada $T_p f$ es sobreyectiva;
- ◇ un **encaje** si f es una *inmersión* y además $f: M \rightarrow f(M)$ es un *homeomorfismo*.

Si f es una inmersión y una sumersión a la vez, cada versión local $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ tiene derivada invertible (y jacobiano no nulo) en 0; por el teorema de la función inversa, cada $p \in M$ tiene un vecindario W tal que $f|_W$ es un difeomorfismo. Se dice que f es un *difeomorfismo local*.

Sin embargo, las propiedades de los $T_p f$ no implican propiedades correspondientes para la función original f . El Ejemplo 1.42 señala que la doble vuelta al círculo \mathbb{S}^1 , $f(e^{i\theta}) := e^{2i\theta}$ tiene aplicación tangente biyectiva $v \mapsto 2v$ en cada punto, pero f mismo no es biyectivo.

El Ejemplo 1.43 (la lemniscata L) muestra una curva inmersa, pero no encajada, en \mathbb{R}^2 . De hecho, si $\gamma(t) := (x(t), y(t))$ parametriza esta curva, al tomar $I := (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ se ve que $\gamma : I \rightarrow L$ es una inmersión inyectiva, pero si W es un pequeño vecindario conexo del origen en L , $\gamma^{-1}(W)$ es una unión disconexa de tres subintervalos de I cerca de $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$. Por ende, $\gamma : I \rightarrow L$ no es un homeomorfismo.

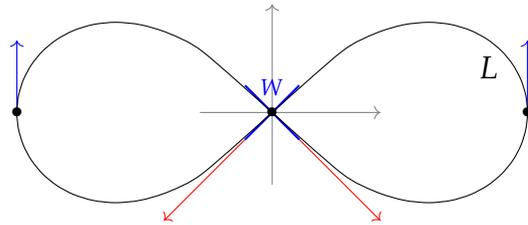


Figura 1.2: La lemniscata de Bernoulli

Una **subvariedad** R de M es una parte $R \subseteq M$ que (a) es una variedad, de dimensión $r \leq n$ (si $n = \dim M$); y (b) cumple esta condición: para cada punto $p \in R$ hay una carta local (U, ϕ) de M con $\phi(p) = 0$, tal que:

$$R \cap U = \{ \phi^{-1}(x, 0) : x \in \mathbb{R}^r, (x, 0) \in \phi(U) \}. \tag{1.17}$$

donde $(x, 0) := (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} = \mathbb{R}^n$.

En otras palabras, $R \cap U$ es difeomorfa a un abierto en el subespacio $\mathbb{R}^r \leq \mathbb{R}^n$.

Un caso sencillo, donde $r = n$, ocurre cuando R es un abierto en M .

La Prop. 1.45 muestra que estas condiciones se cumplen cuando $R = \overline{f^{-1}(S)}$ donde $f : M \rightarrow N$ es una sumersión y $S \subseteq N$ es una subvariedad. En este caso, la dimensión de R se calcula por la fórmula:

$$\dim R = \dim M - \dim N + \dim S.$$

El Corolario 1.46 es el subcaso $\dim S = 0$: si $a \in M$, tómesese $S = \{a\}$. Decir que f es una sumersión es afirmar que $T_p f$ es sobreyectiva para *todo* punto $p \in M$ tal que $f(p) = a$. (Se dice que a es un **valor regular** de la función f .) Entonces se obtiene $\dim f^{-1}(a) = n - m$.

El Ejemplo 1.47 considera la esfera $\underline{S^{n-1}} \subset \mathbb{R}^n$. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ el polinomio

$$f(x) := (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2.$$

Entonces $Df(x) = [2x^j] = 2x$, una matriz $n \times 1$ – esto es, un vector columna en \mathbb{R}^n . Luego $\text{rango } Df(x) = 1$ para $x \neq 0$ en \mathbb{R}^n . Por lo tanto, 0 es un *valor crítico* (imagen de un *punto crítico* de f), mientras 1 es un valor regular. En fin, $\underline{S^{n-1}} = f^{-1}(1)$ es una subvariedad de \mathbb{R}^n .

Otros ejemplos interesantes de variedades diferenciales son ciertos conjuntos de matrices. En primer lugar, las matrices reales $n \times n$, $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$: se toman las n^2 entradas como coordenadas cartesianas de las matrices.

Las *matrices invertibles* $\underline{GL(n, \mathbb{R})}$ forman un abierto de $M_n(\mathbb{R})$: una subvariedad con $\dim GL(n, \mathbb{R}) = n^2$. Más interesante son las matrices de determinante 1:

$$\underline{SL(n, \mathbb{R})} := \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 1 \}.$$

Ahora 1 es un valor regular de la función $\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (por el Ejercicio 1.13), así que $SL(n, \mathbb{R})$ es una subvariedad de $M_n(\mathbb{R})$, con dimensión $n^2 - 1$.

El Ejemplo 1.50 es más sofisticado: las *matrices ortogonales* (que forman un grupo):

$$\underline{O(n)} := \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t A = A A^t = 1_n \}. \quad (1.18)$$

En este caso se toma $f(A) := A^t A \in \text{Sim}(n)$ (las *matrices simétricas*, que forman un espacio \mathbb{R} -vectorial, de dimensión $\frac{1}{2}n(n+1)$). Un cálculo largo muestra que:

- (a) $T_B f$ es sobreyectivo cuando $B = 1_n$;
- (b) $T_B f$ es también sobreyectivo para los otros $B \in O(n)$.

Se deduce que $O(n)$ es una subvariedad de $GL(n, \mathbb{R})$, con dimensión

$$\dim O(n) = \dim GL(n, \mathbb{R}) - \dim \text{Sim}(n) = n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1). \quad (1.20)$$

Sobre la segunda lista de ejercicios

Ejercicio 1.6 Los coeficientes de un vector tangente $v \in T_p M$ dependen de la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ de $T_p M$. Este ejercicio da la fórmula para el cambio de base a otro sistema (y^1, \dots, y^n) de coordenadas locales.

Ejercicio 1.9 En el toro \mathbb{T}^2 , la curva $\gamma(t) := (e^{2\pi it}, e^{2\pi i\alpha t})$ es una curva cerrada (es homeomorfo a un círculo) si α es racional; pero para α irracional es un alambre que enrolla el toro con una imagen densa. No es necesario demostrar esa densidad, ni que el alambre se acerca al punto $(1, 1)$ infinitas veces durante su recorrido, pero sí que $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \gamma(\mathbb{R})$ no es un homeomorfismo. El alambre está inmersa en el toro, pero no encajada.

Ejercicio 1.12 Para subvariedades de \mathbb{R}^n , las fórmulas para puntos críticos de una función suave siguen los protocolos del cálculo diferencial de varias variables.

Ejercicio 1.13 Se pide verificar que 0 es el único valor crítico de la función determinante $\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, para poder concluir que $SL(n, \mathbb{R})$ es una subvariedad de $M_n(\mathbb{R})$.

Ejercicio 1.15 Una *superficie de revolución* en \mathbb{R}^3 es obtenida al girar una curva “directriz” alrededor de una recta (el eje de revolución). Los cortes de esa superficie por planos perpendiculares al eje son círculos; y así se puede reconocer una superficie de revolución. Este ejemplo tiene un eje oblicuo (no paralelo a uno de los ejes coordenados).

1.5. Clase 5

Esta es la clase virtual del 27 de agosto del 2020. Su temática es la sección § 1.5.

Campos vectoriales

La geometría diferencial tiene dos aspectos muy diferentes: por un lado, requiere una minuciosa atención a ciertos detalles analíticos; pero al mismo tiempo, posee un carácter algebraico panorámico y global. El tema de los campos vectoriales ejemplifica esa dos tendencias.

Un campo vectorial X sobre una variedad diferencial M , en su aspecto global algebraico, es un operador lineal que lleva funciones suaves sobre M en otras funciones, esto es, $X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, y obedece la **regla de Leibniz**:

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg). \quad (1.21)$$

En su aspecto local, es la asignación de un vector tangente X_p en cada punto $p \in M$:

$$X_p(f) := Xf(p). \quad (1.22)$$

Se ve que $X_p \in T_p M$ al evaluar ambos lados de (1.21) en el punto p :

$$X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g).$$

Si $U \subseteq M$ es un abierto de M , el campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tiene una **restricción** a $X|_U \in \mathfrak{X}(U)$. Esto no es obvio, porque el espacio vectorial de funciones $C^\infty(U)$ *no está incluido en* $C^\infty(M)$ – en general, hay funciones suaves sobre U que no se extienden a funciones suaves sobre M . Sin embargo, el Lema 1.53 muestra que si $f \in C^\infty(U)$, hay una función $h \in C^\infty(M)$ que coincide con f cerca de un punto dado $p \in U$, y la receta $p \mapsto X_p(f) = X_p(h)$ define bien una función $Xf \in C^\infty(U)$.

Si (U, ϕ) es una carta local de M , con coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) en $C^\infty(U)$, se definen las derivadas parciales $\partial/\partial x^j \in \mathfrak{X}(U)$ por la fórmula básica:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} : f \mapsto \partial_j(f \circ \phi^{-1}) \circ \phi. \tag{1.23a}$$

Lema 1.54: si $X \in \mathfrak{X}(M)$, su restricción a $\mathfrak{X}(U)$ es una combinación lineal de estas derivadas parciales:

$$X|_U = a^j \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{1.24}$$

donde los coeficientes son *funciones* suaves $a^1, \dots, a^n \in C^\infty(U)$. (Aquí hay una suma implícita sobre j , por el convenio de Einstein.)

Si (V, ψ) es otra carta local con otras coordenadas locales (y^1, \dots, y^n) , entonces $X|_V = b^k \frac{\partial}{\partial y^k}$ en $\mathfrak{X}(V)$. En la intersección $U \cap V$, la *fórmula de cambio de variable* es:

$$a^j = b^k \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \text{ en } C^\infty(U \cap V), \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

Propiedades algebraicas de campos vectoriales

Globalmente, $\mathfrak{X}(M)$ es también un *módulo* sobre el anillo $C^\infty(M)$: si $g \in C^\infty(M)$, se define $gX \in \mathfrak{X}(M)$ como el campo vectorial $f \mapsto g(Xf)$.

La Prop. 1.56 dice que $\mathfrak{X}(M)$ es también un **álgebra de Lie**: posee un **corchete** bilineal y antisimétrica, dado por

$$[X, Y]: f \mapsto X(Yf) - Y(Xf), \tag{1.25a}$$

que cumple la *identidad de Jacobi*:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0. \tag{1.25b}$$

(Los operadores XY y YX , por separado, *no son* campos vectoriales.)

Dadas dos variedades diferenciales M y N , cómo se pueden relacionar los campos en $\mathfrak{X}(M)$ con otros campos en $\mathfrak{X}(N)$? Si M y N no son difeomorfos (en particular, de la misma dimensión), no hay una respuesta obvia.

Sin embargo, si hay un *difeomorfismo* $\tau: M \rightarrow N$, para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ hay una **imagen directa** $\tau_*X \in \mathfrak{X}(N)$, dada por la fórmula:

$$\tau_*X(h) := X(h \circ \tau) \circ \tau^{-1}. \quad (1.28)$$

Al evaluar los dos lados en el punto $\tau(p) \in N$, se obtiene una fórmula local:

$$(\tau_*X)_{\tau(p)} = T_p\tau(X_p). \quad (1.29)$$

Otras propiedades de la imagen directa están dadas por los Lemas 1.58 y 1.59:

$$\begin{aligned} \sigma_*(\tau_*X) &= (\sigma \circ \tau)_*X \quad \text{si } \tau \text{ y } \sigma \text{ son difeomorfismos;} \\ \tau_*[X, Y] &= [\tau_*X, \tau_*Y] \quad \text{para } X, Y \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

1.6. Clase 6

Esta es la clase virtual del 31 de agosto del 2020. Su temática es la sección § 1.6.

Curvas integrales y flujos

Un campo vectorial X sobre una variedad M da lugar a una familia de curvas sobre M , cuyas vectores de velocidad coinciden con los vectores tangentes en los puntos por donde pasan las curvas. Esta idea se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \quad \text{para } t \in I, \quad (1.30)$$

donde $\gamma: I \rightarrow M$ es una curva suave sobre M . Tanto el vector de **velocidad** $\dot{\gamma}(t)$ como el valor en $\gamma(t)$ del campo X son elementos del espacio vectorial tangente $T_{\gamma(t)}M$. Cualquier curva γ que cumple (1.30) se llama una **curva integral** de X .

Dada una carta local (U, ϕ) de M , sea $J \subseteq I$ un subintervalo (abierto) tal que $\gamma(J) \subset U$. Con las coordenadas locales $x^k: U \rightarrow \mathbb{R}$ se definen funciones $y^k \equiv x^k \circ \gamma: J \rightarrow \mathbb{R}$. Si además $X|_U = a^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, la fórmula (1.30) se reduce a un *sistema de ecuaciones diferenciales* ordinarias de primer orden:

$$(y^k)'(t) = (a^k \circ \phi^{-1})(y^1(t), \dots, y^n(t)). \quad (1.31)$$

Para que haya una solución única, se debe prescribir *condiciones iniciales* $y^k(t_0) = x_0^k$.

En fin, la ecuación (1.3), acompañada de una *condición inicial*:

$$\dot{\gamma}_p(t) = X_{\gamma_p(t)}, \quad \gamma_p(t_0) = p \tag{1.32}$$

tiene una solución única $\gamma_p: J \rightarrow M$, donde $J = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$. Esta es la *curva integral que pasa por p* . (Por la unicidad, dos curvas integrales distintas no tienen intersección.) Sin perder generalidad, se puede tomar $t_0 = 0$.

De la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, se sabe que las soluciones dependen suavemente de las condiciones iniciales. Por lo tanto, hay una función suave α con dominio $D_X \subseteq \mathbb{R} \times M$ definido por $\alpha(t, p) := \gamma_p(t)$ para $(t, p) \in D_X$. Esta función α es el **flujo** del campo vectorial X .

El flujo cumple $\alpha(0, p) = p$ para todo p , y $\alpha(t, \alpha(s, p)) = \alpha(t + s, p)$ dentro del dominio D_X . Se dice que el campo vectorial X es **completo** si $D_X = \mathbb{R} \times M$; esto ocurre si el intervalo I de cualquier curva integral γ se puede extender a todo \mathbb{R} . La Prop. 1.63 muestra que esto siempre se puede lograr si M es *compacta*.

El Ejemplo 1.65 exhibe una campo vectorial incompleto: $X := (1 + x^2) \frac{d}{dx}$ sobre $M = \mathbb{R}$. Para obtener la curva integral que pasa por $x = 0$, hay que resolver la ecuación diferencial

$$y'(t) = 1 + y(t)^2, \quad y(0) = 0.$$

La solución única es $y(t) \equiv \operatorname{tg} t$, para $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a lo sumo, porque la función $\operatorname{tg} t$ diverge en $t = \pm \frac{\pi}{2}$.

El Ejemplo 1.66 estudia el campo vectorial $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ sobre $M = \mathbb{R}^2$. Al resolver un problema de valor inicial para $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, se descubre que las curvas integrales son (a): *círculos concéntricos* centradas en $(0, 0)$, y (b): el origen $\{(0, 0)\}$, el cual es un *punto fijo* (una curva constante).

Si X es un campo vectorial completo, se puede escribir $\alpha_t(p) := \alpha(t, p)$ para todo $t \in \mathbb{R}, p \in M$. Entonces cada $\alpha_t: M \rightarrow M$ es un *difeomorfismo*, con $\alpha_0 = 1_M, \alpha_t^{-1} = \alpha_{-t}$ y además

$$\alpha_{t+s} = \alpha_t \circ \alpha_s \quad \text{para todo } t, s \in \mathbb{R}. \tag{1.34}$$

Se dice que este **grupo uniparamétrico** de difeomorfismos es *generado por X* . Además, la Prop. 1.68 explica cómo recuperar el generador X a partir de su flujo α :

$$Xf(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\alpha_t(p)) - f(p)}{t} \tag{1.35}$$

porque el lado izquierdo es $X_p f$ y el lado derecho es $\dot{\gamma}_p(0)f$.

Sobre la tercera lista de ejercicios

Ejercicio 1.17 La parte (a) obtiene la fórmula para calcular un conmutador $[X, Y]$ en coordenadas locales. La parte (b) lo ejemplifica en \mathbb{R}^3 (campos de momento angular). En general, un álgebra de Lie que contiene X, Y también contiene los conmutadores

$$[X, Y], \quad [X, [X, Y]], \quad [Y, [X, Y]], \\ [X, [X, [X, Y]]], \quad [X, [Y, [X, Y]]], \quad [Y, [X, [X, Y]]], \quad \text{etc., etc.}$$

y podría ser infinitodimensional. Pero resulta que en el caso (b), la dimensión es 3.

Ejercicio 1.18 Un ejercicio fácil, que pide comprobar una fórmula útil (y que luego será utilizado).

Ejercicio 1.20 Valdría la pena dibujar las curvas integrales para los dos campos vectoriales, en un mismo dibujo en \mathbb{R}^2 .

Ejercicio 1.21 El ángulo θ del círculo \mathbb{S}^1 es solamente una coordenada local, pero el campo vectorial $\underline{d/d\theta}$ es *global*; es decir, no depende de la carta usada para expresarlo localmente.

1.7. Clase 7

Esta es la clase virtual del 3 de setiembre del 2020. Su temática es la sección § 1.7.

Grupos de Lie

Las variedades $SL(n, \mathbb{R})$ y $O(n)$ son dos ejemplos de variedades diferenciales que también son grupos (con el producto de matrices). Un **grupo de Lie** es una variedad diferencial G , con dos operaciones de grupo que son *suaves*:

$$\underline{m}: G \times G \rightarrow G : (g, h) \mapsto gh, \quad \underline{\iota}: G \rightarrow G : g \mapsto g^{-1}.$$

Como $\iota^2 = 1_G$, la inversión ι es un *difeomorfismo* de G en G . Otros difeomorfismos de G en G son las **traslaciones** (a izquierda y a derecha):

$$\underline{\lambda}_g : h \mapsto gh, \quad \underline{\rho}_g : h \mapsto hg.$$

Hay diversos ejemplos de grupos de Lie abelianos. Primero, un espacio \mathbb{R} -vectorial con suma, por ejemplo $(\mathbb{R}^n, +)$. En dimensión uno, tenemos el grupo *multiplicativo* $\underline{\mathbb{R}}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y su subgrupo $\underline{\mathbb{R}}_+^\times := (0, +\infty)$.

Otro grupo de Lie de dimensión 1 es el círculo $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1$ donde $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$.

En dimensión n , hay un **toro** $\mathbb{T}^n := \mathbb{T} \times \cdots \times \mathbb{T}$. Este es el producto cartesiano de variedades y a la vez un producto directo de grupos.

Entre los grupos no abelianos de matrices, ya se conocen el **grupo general lineal** $\underline{\text{GL}}(n, \mathbb{R})$ de matrices $n \times n$ invertibles y su subgrupo cerrado $\underline{\text{SL}}(n, \mathbb{R})$. Obsérvese que las operaciones $(A, B) \mapsto AB$ y $A \mapsto A^{-1}$ son funciones suaves de las entradas matriciales.

Habida cuenta de que $\mathbb{C}^m \simeq \mathbb{R}^{2m}$, también se puede considerar grupos de Lie de matrices complejas, tales como $\underline{\text{GL}}(n, \mathbb{C})$ y $\underline{\text{SL}}(n, \mathbb{C})$. Estos a su vez son *variedades complejas* (sus funciones de transición entre cartas locales son *holomorfas*), pero considerados ahora como variedades reales.

► Para estudiar grupos de Lie, se aprovecha las traslaciones λ_g para notar que si (U, ϕ) es una carta local con $1 \in U$, entonces $(\lambda_g(U), \phi \circ \lambda_{g^{-1}})$ es una carta local con $g \in \lambda_g(U)$. Además, un campo vectorial $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(G)$ es **invariante a la izquierda** si

$$(\lambda_g)_* \tilde{X} = \tilde{X} \quad \text{para todo } g \in G.$$

El valor de \tilde{X} en la identidad $1 \in G$ se denota por $X := \tilde{X}_1 \in T_1G$. Como cada $T_1\lambda_g : T_1G \rightarrow T_gG$ es un isomorfismo lineal, se obtiene

$$\tilde{X}_g = T_1\lambda_g(\tilde{X}_1) = T_1\lambda_g(X). \tag{1.37}$$

Esto muestra que \tilde{X} queda determinado por $X \in T_1G$.

El Lema 1.77 dice que si \tilde{X}, \tilde{Y} son invariantes, entonces $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ también es invariante. Entonces $\mathfrak{g} = T_1G$ es un **álgebra de Lie** (de G), con corchete:

$$[X, Y] := [\tilde{X}, \tilde{Y}]_1. \tag{1.38}$$

Nótese que esta álgebra de Lie es finitodimensional: $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{R}}(T_1G) = \dim G$.

Sea $\gamma_X : I \rightarrow G$ la *curva integral* de \tilde{X} tal que $\gamma_X(0) = 1$. Entonces $\dot{\gamma}_X(0) = X \in T_1G$. Resulta que se puede prolongar el intervalo I en todo \mathbb{R} , de tal manera que

$$\gamma_X(s+t) = \gamma_X(s)\gamma_X(t) \quad \text{para todo } s, t \in \mathbb{R}. \tag{1.39}$$

O sea: $\gamma_X(\mathbb{R})$ es un **subgrupo uniparamétrico** de G , determinado por $\dot{\gamma}_X(0) = X \in \mathfrak{g}$.

La **aplicación exponencial** $\underline{\text{exp}} : \mathfrak{g} \rightarrow G$ se define por $\underline{\text{exp}} X := \gamma_X(1)$. Se puede deducir que

$$\gamma_X(t) = \underline{\text{exp}} tX \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{1.40}$$

En el Ejemplo 1.80, se identifica el álgebra de Lie del círculo \mathbb{T} con la recta $i\mathbb{R}$, de tal manera que $\exp(i\theta) = e^{i\theta}$. Si $\tilde{X} = d/d\theta \in \mathfrak{X}(\mathbb{T})$, entonces $\gamma_X(t) = e^{it}$, y

$$\langle \dot{\gamma}_X(0), f \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma_X(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(e^{it}) = i f'(1) = \left. \frac{d}{d\theta} \right|_1 (f) = Xf.$$

Para un grupo de matrices, el álgebra de Lie es un espacio \mathbb{R} -vectorial de matrices y la aplicación exponencial coincide con la **exponencial matricial**

$$\exp X := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k. \quad (1.41)$$

Esto no es obvio, porque si $XY \neq YX$, $\exp X \exp Y \neq \exp(X + Y)$. En vez de la “ley de exponentes”, se debe usar una famosa **fórmula de Campbell, Baker y Hausdorff** (para matrices):

$$\exp tX \exp tY = \exp(t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3)). \quad (1.44)$$

La prueba de esta fórmula es un cálculo sencillo con series de Taylor, guardando los términos explícitos solo hasta orden t^2 :

$$\begin{aligned} \exp tX \exp tY &= (1 + tX + \frac{1}{2}t^2X^2 + O(t^3))(1 + tY + \frac{1}{2}t^2Y^2 + O(t^3)) \\ &= 1 + t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3) \\ &= 1 + t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(X + Y)^2 + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3) \\ &= \exp(t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3)). \end{aligned}$$

Con el uso de esta fórmula, el Lema 1.81 y el comentario posterior comprueban que el corchete $[X, Y]$ coincide con el *conmutador* usual de matrices:

$$[X, Y] \equiv [\tilde{X}, \tilde{Y}]_1 = XY - YX \quad \text{cuando } \mathfrak{g} \leq M_n(\mathbb{R}) \quad \text{o} \quad \mathfrak{g} \leq M_n(\mathbb{C}).$$

Ahora sí, se puede identificar \mathfrak{g} con un espacio vectorial de matrices:

$$\mathfrak{g} = \{ X \in M_n(\mathbb{F}) : \exp tX \in G \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \}. \quad (1.42)$$

(donde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}), toda vez que $G \subseteq GL(n, \mathbb{F})$.

1.8. Clase 8

Esta es la clase virtual del 7 de setiembre del 2020. Su temática comprende las secciones § 1.7 y § 1.8.

Los grupos de Lie clásicos

Después de haber definido un grupo de Lie G y su álgebra de Lie \mathfrak{g} de manera abstracta, junto con la aplicación exponencial $\exp: X \mapsto \gamma_x(1)$ definida mediante curvas integrales, es hora de considerar una colección de ejemplos concretos. Los llamados *grupos clásicos* consisten de matrices invertibles, donde la función \exp es la exponencial matricial (una serie de Taylor de matrices) y el corchete de Lie es el conmutador de matrices $[X, Y] = XY - YX$.

Las entradas de estas matrices pueden ser reales o complejos: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} en lo que sigue. (Se puede usar también matrices cuyas entradas son cuaterniones, $\mathbb{F} = \mathbb{H}$; véase el Ejercicio 1.28.) Para el catálogo completo de los grupos clásicos, consúltese la sección X.2.1 del libro de Helgason.

Si G es el **grupo general lineal** $GL(n, \mathbb{F})$, su álgebra de Lie es $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) := M_n(\mathbb{F})$. En general, si $G \leq GL(n, \mathbb{F})$, su álgebra de Lie es

$$\mathfrak{g} = \{ X \in M_n(\mathbb{F}) : \exp tX \in G \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \}. \quad (1.42)$$

Para seguir, se aprovecha un lema de álgebra lineal, que dice que

$$\det(\exp X) = e^{\text{tr} X}. \quad (1.45)$$

En particular, el **grupo especial lineal** $SL(n, \mathbb{F})$, cuyos elementos cumplen $\det g = 1$, tiene como álgebra de Lie las matrices de traza cero:

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) := \{ X \in M_n(\mathbb{F}) : \text{tr} X = 0 \}.$$

► Los demás grupos clásicos provienen de *formas bilineales no degeneradas* sobre \mathbb{F}^n . Hay dos casos: formas simétricas \underline{d} y formas alternante (antisimétricas) \underline{s} . Una matriz invertible A es una *simetría* de la forma \underline{d} [o de \underline{s}] si se cumple

$$d(Ax, Ay) = d(x, y) \quad [\text{o } s(Ax, Ay) = s(x, y)] \quad \text{para } x, y \in \mathbb{F}^n.$$

Defn. 1.84: una forma bilineal *simétrica* no degenerada sobre \mathbb{R}^n es congruente a la forma

$$d(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_p y_p - x_{p+1}y_{p+1} - \cdots - x_{p+q}y_{p+q}, \quad (1.46)$$

con $p + q = n$. Su grupo de simetría es $O(p, q) \leq GL(p + q, \mathbb{R})$. Si $q = 0$, esto se reduce al **grupo ortogonal** $O(n)$, ya visto.

Defn. 1.85: una forma bilineal *alternante* no degenerada sobre \mathbb{R}^{2m} es congruente a la forma

$$s(x, y) = x_{m+1}y_1 + \cdots + x_{2m}y_m - x_1y_{m+1} - \cdots - x_my_{2m}.$$

Su grupo de simetría es el **grupo simpléctico** $\underline{\text{Sp}}(2m, \mathbb{R})$.

Defn. 1.86: el grupo de simetría del producto escalar $\langle w | z \rangle$ (una forma sesquilineal sobre \mathbb{C}^n) es el **grupo unitario**

$$\underline{\text{U}}(n) := \{ U \in M_n(\mathbb{C}) : U^*U = 1_n \}.$$

Defn. 1.87: los grupos ortogonales y simplécticos sobre \mathbb{C}^n se define de modo análogo:

$$\underline{\text{O}}(n, \mathbb{C}) \leq \text{GL}(n, \mathbb{C}), \quad \underline{\text{Sp}}(2m, \mathbb{C}) \leq \text{GL}(2m, \mathbb{C}).$$

(La *signatura* $p - q$ de d solo es un invariante cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.) También se distingue otro subgrupo de $\text{GL}(2m, \mathbb{C})$:

$$\underline{\text{Sp}}(2m) := \underline{\text{Sp}}(2m, \mathbb{C}) \cap \text{U}(2m).$$

Al imponer la condición $\det A = 1$ sobre algunos de estos grupos, se obtienen subgrupos “especiales”:

$$\underline{\text{SO}}(p, q) \leq \text{O}(p, q), \quad \underline{\text{SO}}(n) \leq \text{O}(n), \quad \underline{\text{SU}}(n) \leq \text{U}(n).$$

Resulta que todos los elementos de $\underline{\text{Sp}}(2m, \mathbb{R})$ ya tienen determinante 1.

► La mayoría de los grupos de este catálogo son variedades diferenciales no compactos. Pero los siguientes son *grupos de Lie compactos*, por la Prop. 1.88:

$$\text{O}(n), \quad \text{SO}(n), \quad \text{U}(n), \quad \text{SU}(n), \quad \text{Sp}(2m).$$

Basta ver por qué $\text{O}(n)$ es compacto. Si $A \in \text{O}(n)$, sus columnas a_j forman una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Esto implica que $\|a_1\|^2 + \cdots + \|a_n\|^2 = n$. Entonces las entradas a_{ij} son coordenadas de un punto de \mathbb{R}^{n^2} en la esfera de radio \sqrt{n} . Luego, $\text{O}(n)$ es acotado y cerrado en \mathbb{R}^{n^2} .

Espacios homogéneos

Un *subgrupo de Lie* $H \leq G$ es un grupo de Lie tal que $H \hookrightarrow G$ es una inmersión inyectiva. Como se ha visto en el Ejercicio 1.9, esto no implica que H es cerrado en G . Pero resulta que cada subgrupo de Lie *cerrado* es una *subvariedad* de G .

Si $H \leq G$ es un subgrupo de Lie cerrado, hay una **variedad cociente** formado por sus coclases (a izquierda):

$$\underline{G/H} := \{ gH : g \in G \},$$

tal que $\eta : G \rightarrow G/H : g \mapsto gH$ es una *sumersión sobreyectiva*.

El grupo G actúa sobre las coclases por $g \cdot g'H := (gg')H$. Más generalmente, una **acción** (a izquierda) de un grupo de Lie G sobre una variedad diferencial M es una aplicación *suave* $\underline{\Phi} : G \times M \rightarrow M$ tal que $\underline{g \cdot p} := \Phi(g, p)$ cumple:

$$g \cdot (h \cdot p) = (gh) \cdot p, \quad 1 \cdot p = p. \quad (1.50)$$

Abundan los ejemplos de acciones. Si M es el propio G , hay *traslaciones* a izquierda y a derecha y además *conjugación*:

$$(i) \quad g \cdot h := gh; \quad (ii) \quad g \cdot h := hg^{-1}; \quad (iii) \quad g \cdot h := ghg^{-1}.$$

A cada punto $p \in M$, se le puede asociar un **subgrupo de isotropía** $G_p \leq G$ y una **órbita** $G \cdot p \subseteq M$:

$$\underline{G_p} := \{ h \in G : h \cdot p = p \}, \quad \underline{G \cdot p} := \{ g \cdot p \in M : g \in G \}. \quad (1.51)$$

Si hay una sola órbita, $G \cdot p = M$, se dice que la acción es **transitiva** y que M es in **espacio homogéneo** de G .

Los espacios homogéneos proporcionan muchos ejemplos de variedades diferenciales. En general, hay un *difeomorfismo* $\underline{G \cdot p} \approx G/G_p$.

En el Ejemplo 1.97, $G = \text{SO}(n)$, $M = \mathbb{R}^n$, y $p = e_n = (0, \dots, 0, 1)$; el grupo actúa por rotaciones. Aquí $G_p \approx \text{SO}(n-1)$ y $G \cdot p = \mathbb{S}^{n-1}$. Se obtiene el difeomorfismo $\mathbb{S}^{n-1} \approx \text{SO}(n)/\text{SO}(n-1)$.

La **variedad de Stiefel** $\underline{\text{St}(k, \mathbb{R}^n)}$ de k -marcos en \mathbb{R}^n (Ejemplo 1.99): sus elementos son conjuntos ortonormales ordenados (u_1, \dots, u_k) en \mathbb{R}^n . El grupo ortogonal $O(n)$ los permuta por $A \cdot (u_1, \dots, u_k) := (Au_1, \dots, Au_k)$. Si $p = (e_1, \dots, e_k)$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \in G_p \quad \text{si y solo si} \quad C \in O(n-k).$$

Luego $\underline{\text{St}(k, \mathbb{R}^n)} \approx O(n)/O(n-k)$.

La **variedad de Grassmann** $\text{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$ es el conjunto $\{V \leq \mathbb{R}^n : \dim V = k\}$. Si $A \in O(n)$, entonces $A(V) = V$ implica $A^t(V^\perp) = V^\perp$ (complemento ortogonal). Si $p = \text{lin}\langle e_1, \dots, e_k \rangle$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \in G_p \quad \text{si y solo si} \quad B \in O(k) \text{ y } C \in O(n-k).$$

Luego $\text{Gr}(k, \mathbb{R}^n) \approx O(n)/(O(k) \times O(n-k))$.

Cuando $k = 1$, $\text{Gr}(1, \mathbb{R}^n) = \{L \leq \mathbb{R}^n : \dim L = 1\}$ es el **espacio proyectivo real**: luego $\mathbb{R}P^{n-1} \approx O(n)/(\{\pm 1\} \times O(n-1)) \approx SO(n)/O(n-1)$.

Sobre la cuarta lista de ejercicios

Ejercicio 1.22 Se pide comprobar la fórmula $\gamma_X(t) = \exp tX$ usando la definición abstracta de la aplicación exponencial.

Ejercicio 1.24 Diversos ejemplos de exponenciales de matrices 2×2 .

Ejercicio 1.25 Aquí se identifica explícitamente el álgebra de Lie del grupo $SU(2)$. Sus generadores son $X_j = \frac{1}{2} \sigma_j$ donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in M_2(\mathbb{C})$ son las llamadas *matrices de Pauli*. Luego se reconstruye los elementos de grupo $SU(2)$ mediante la aplicación exponencial, con tres parámetros angulares.

Ejercicio 1.26 El homomorfismo $\rho: SU(2) \rightarrow SO(3)$ resulta ser sobreyectivo y dos-a-uno: el grupo de Lie $SU(2)$ es un *doble recubridor* del grupo de Lie $SO(3)$.

Ejercicio 1.28 Los cuaterniones forman una \mathbb{R} -álgebra de dimensión 4. El grupo de Lie UH de "cuaterniones unitarios" es difeomorfo a la esfera unitaria $S^3 \subset \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 1.29 El grupo de Heisenberg H_n , de dimensión $2n + 1$, es un grupo de Lie nilpotente pero no abeliano. Aparece en aplicaciones en dos presentaciones diferentes, pero isomorfos (el ejercicio pide encontrar el isomorfismo). Su álgebra de Lie exhibe una versión algebraica del principio de incertidumbre de Heisenberg, $[Q_j, P_k] = i \delta_{jk} T$; de ahí su nombre.

1.9. Clase 9

Esta es la clase virtual del 10 de setiembre del 2020. Su temática es la sección § 1.9.

Fibrados

La última fuente de ejemplos de variedades diferenciales es la familia de espacios topológicos conocidos como **fibrados**. Entre ellos se distinguen dos clases de particular importancia: los fibrados *principales* y los fibrados *vectoriales*.

El contexto es una sumersión sobreyectiva $\pi: E \rightarrow M$ entre dos variedades tal que las preimágenes $E_p := \pi^{-1}(p)$ de los puntos $p \in M$ son difeomorfos entre sí. Estas **fibras** E_p son subvariedades de E por la Prop. 1.45. Conviene adoptar un modelo de las fibras: una variedad F (llamado *fibra típica*) a la cual todo E_p es difeomorfo. La cuaterna $(E, M, \pi; F)$ es lo que se llama un **fibrado**. Es costumbre denotarlo por $E \xrightarrow{\pi} M$, dejando implícita la fibra típica F .

En la topología algebraica, se definen fibrados topológicos de manera análoga (por ejemplo, allí la **proyección** π solo debe ser una aplicación cociente: continua, abierta y sobreyectiva). Pero en la categoría de variedades diferenciales, se exige además que el fibrado sea **localmente trivial**. Esto significa que la **base** M debe tener un cubrimiento abierto $\{U_j\}$ tal que existen ciertos difeomorfismos:

$$\underline{\psi}_j: \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F, \quad \text{que cumplen} \quad \pi(\psi_j^{-1}(p, v)) = p. \quad (1.52)$$

(La restricción de esta *trivialización local* ψ_j a $\pi^{-1}(p)$ da un difeomorfismo $E_p \approx F$.)

Una variedad producto $E = M \times F$ define un **fibrado trivial**, con proyección $\text{pr}_1: (p, v) \mapsto p$. La condición (1.52) dice que cada $(\pi^{-1}(U_j), U_j, \pi; F)$ es difeomorfo a un fibrado trivial.

Otro ejemplo de un fibrado localmente trivial es un espacio homogéneo de un grupo de Lie G : si H es un subgrupo cerrado de G , la aplicación cociente $\eta: G \rightarrow G/H$ determina un fibrado donde las fibras $\eta^{-1}(\eta(g)) = gH$ son las coclases de H , consideradas como subvariedades de G . Como $gH = \lambda_g(H) \approx H$ – la traslación λ_g es el difeomorfismo requerido – la fibra típica es H .

Este *fibrado principal* $G \xrightarrow{\eta} G/H$ tiene otra propiedad notable: la fibra típica H es un grupo de Lie, el cual permuta las fibras individuales. Esto es, hay una *acción transitiva* del grupo H sobre la fibra gH por multiplicación a la derecha: $gh \triangleleft k = g(hk)$.

Se dice que $E \xrightarrow{\pi} M$ es un **fibrado vectorial** si la fibra típica F y cada fibra E_p son *espacios vectoriales* isomorfos: $F \simeq E_p$ por $v \mapsto \psi_j^{-1}(p, v)$ que debe ser \mathbb{R} -lineal.

► El ejemplo de mayor interés es el **fibrado tangente** $TM \xrightarrow{\tau} M$. En este caso, el *espacio total* $E = TM$ es la unión *disjunta* de los espacios tangentes individuales T_pM . La fibra típica es \mathbb{R}^n , si $n = \dim M$.

Un isomorfismo lineal $\mathbb{R}^n \simeq T_pM$ está dado por la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ de T_pM , en una carta local (U_α, ϕ_α) . Entonces se define

$$\underline{TM} := \{ (p, v) : p \in M, v \in T_pM \}, \quad \tau(p, v) := p, \quad (1.53)$$

con trivializaciones locales (una para cada carta local de M):

$$\psi_\alpha(p, v) := (p; v^1, \dots, v^n) \quad \text{si} \quad v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p. \quad (1.54)$$

Fíjese que $(v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ y que la definición del conjunto TM expresa una unión disjunta; esto es, $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$.

De igual manera se define el **fibrado cotangente** $T^*M \xrightarrow{\pi} M$, con fibra típica \mathbb{R}^n . Ahora el espacio total T^*M es la unión *disjunta* de los espacios cotangentes T_p^*M .

Cada T_p^*M se define como el espacio \mathbb{R} -vectorial dual de T_pM . En una carta local (U_α, ϕ_α) , la base antedicha de T_pM determina una *base dual* de T_p^*M , denotado por $\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$. Un **covector** en p es una combinación lineal de éstos:

$$\xi = \xi_k dx^k|_p \equiv \xi_1 dx^1|_p + \xi_2 dx^2|_p + \dots + \xi_n dx^n|_p \in T_p^*M.$$

Entonces se define

$$\underline{T^*M} := \{ (p, \xi) : p \in M, \xi \in T_p^*M \}, \quad \pi(p, \xi) := p, \quad (1.55)$$

con trivializaciones locales (una para cada carta local de M):

$$\chi_\alpha(p, \xi) := (p; \xi_1, \dots, \xi_n) \quad \text{si} \quad \xi = \xi_k dx^k|_p. \quad (1.56)$$

► Una **sección** de un fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ es una aplicación suave $s: M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = 1_M$, esto es, $s(p) \in E_p$ para todo $p \in M$.

La totalidad de secciones (suaves) se denota por $\underline{\Gamma(M, E)}$. En el caso de un fibrado vectorial, $\Gamma(M, E)$ es un espacio vectorial.

Las secciones suaves del fibrado tangente son precisamente los *campos vectoriales* sobre M . En otras palabras, $\underline{\mathfrak{X}(M)} = \underline{\Gamma(M, TM)}$.

Sobre la quinta lista de ejercicios

Ejercicio 1.33 El grupo $SU(1, 1)$ actúa sobre \mathbb{D} (un disco circular sin frontera) por las llamadas *transformaciones de Möbius*, que llevan círculos en círculos. De los tres tipos de órbitas que se pide dibujar, los de $k(\theta)$ son obviamente círculos concéntricos; los de $a(t)$ se llaman *horociclos*; y los de $n(s)$ se llaman “curvas equidistantes” en la terminología de la geometría hiperbólica.

Ejercicio 1.34 Este ejercicio describe la llamada *factorización QR* de una matriz invertible. Se debe advertir que aunque la biyección $QR \leftrightarrow (Q, R)$ es un difeomorfismo, no es un homomorfismo de grupos, porque $GL(n, \mathbb{R})$ no es el producto directo de los grupos $O(n)$ y $T_+(n, \mathbb{R})$. (Es un producto semidirecto.)

Ejercicio 1.36 Con esta noción de morfismo de fibrados, los fibrados vectoriales $E \xrightarrow{\pi} M$ son objetos de una categoría.

Ejercicio 1.37 y 1.38 Mediante el isomorfismo de fibrados vectoriales indicado, el espacio total del fibrado tangente $T\mathbb{S}^2 \xrightarrow{\tau} \mathbb{S}^2$ es difeomorfo a una subvariedad E de \mathbb{R}^6 . Este fibrado tangente no es trivial: no existe una variedad bidimensional N tal que E se pueda reemplazar por $N \times \mathbb{S}^2$.

Ejercicio 1.39 En cambio, el fibrado tangente $T\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\tau} \mathbb{S}^1$ sí es trivial.

Ejercicio 1.40 Cualquier fibrado vectorial posee un *grupo de estructura*, el cual es $GL(F)$ o tal vez un subgrupo cerrado $G \leq GL(F)$. Las funciones de transición g_{jk} son secciones locales de un fibrado principal cuyo fibra típica es este grupo G . Es posible invertir el proceso: hay una construcción que empieza con un fibrado principal $P \xrightarrow{\sigma} M$ con fibra típica G , junto con una acción lineal de G sobre un espacio vectorial F , y produce un fibrado vectorial “asociado” $E \xrightarrow{\pi} M$ con fibra típica F .

2 Comentarios sobre las clases de MA-870, parte 2

Este es un gui3n informal que acompa1a las clases “virtuales” de MA-870, *Geometría Diferencial*, en el segundo semestre del 2020, a causa de la suspensi3n de clases presenciales.

2.1. Clase 10

Esta es la clase virtual del 17 de setiembre del 2020. Su temática comprende las secciones §2.1: *Formas diferenciales de primer grado* y §2.2: *Álgebra tensorial y álgebra exterior*.

Formas diferenciales de primer grado

Una *forma diferencial*, informalmente, es el integrando de una integral en varias variables. Por ejemplo, una integral de línea

$$\int_K A dx + B dy + C dz$$

sobre una curva K en \mathbb{R}^3 tiene como integrando la expresi3n $A dx + B dy + C dz$. Alternativamente, las formas diferenciales son los objetos duales a los campos vectoriales, como se verá en seguida.

Se debe recordar que los campos vectoriales $\mathfrak{X}(M)$ son un *m3dulo a izquierda* sobre $C^\infty(M)$. Este es an3logo a un espacio vectorial, pero $C^\infty(M)$ es solo un anillo conmutativo, no un cuerpo; y en la “multiplicaci3n escalar” $X \mapsto gX$ se escribe la funci3n g a la izquierda del campo vectorial X .

El objeto dual consiste de funciones $\alpha: \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ que son $C^\infty(M)$ -*lineales*; esto es,

$$\alpha(X + Y) = \alpha(X) + \alpha(Y), \quad \alpha(gX) = g \alpha(X). \quad (2.1a)$$

Tales α , a su vez, forman un m3dulo a izquierda sobre $C^\infty(M)$:

$$(\alpha + \beta)(X) := \alpha(X) + \beta(X); \quad f \alpha(X) := f \alpha(X). \quad (2.1b)$$

Este m3dulo se llama $\mathcal{A}^1(M)$. Sus elementos α son las *formas diferenciales de primer grado* (sobre M).

Resulta que el valor $\alpha(X)(p)$ de la funci3n $\alpha(X)$ en el punto $p \in M$ solo depende del vector tangente X_p . Esto se ve al reemplazar X por gX donde $g: M \rightarrow [0, 1]$ es

una función suave tal que $g(q) \equiv 1$ en un vecindario de p , porque

$$\alpha(gX)(p) = g(p) \alpha(X)(p) = \alpha(X)(p).$$

La dependencia $X_p \mapsto \alpha(X)(p) \in \mathbb{R}$ es lineal: este es un *covector* $\alpha_p \in T_p^*M$.

La Prop. 2.2 muestra que la correspondencia $p \mapsto \alpha_p$ es una *sección suave del fibrado cotangente* $T^*M \xrightarrow{\pi} M$. En síntesis:

$$\mathcal{A}^1(M) \simeq \Gamma(M, T^*M). \tag{2.3}$$

En la demostración, se comprueba que en una carta local (U, φ) , la restricción de α a U es una suma finita del tipo:

$$\alpha|_U = f_k dx^k, \quad \text{con coeficientes } f_1, \dots, f_n \in C^\infty(U) \tag{2.5}$$

donde $dx^1, \dots, dx^n \in \mathcal{A}^1(U)$ definen una “base dual” a los campos vectoriales locales $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \in \mathfrak{X}(U)$; esto es, $\langle dx^k, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \llbracket j = k \rrbracket$.

Álgebra tensorial y álgebra exterior

Esta sección es un resumen ejecutivo de la materia de álgebra lineal que se requiere más adelante. Primero se define el **producto tensorial** $E \otimes F$ de dos espacios \mathbb{R} -vectoriales E y F . Sus elementos son *sumas finitas* de “tensores simples” $\underline{x \otimes y}$. Esa expresión es lineal en x y también en y .

El producto tensorial de espacios vectoriales es asociativo (hasta un isomorfismo único), de modo que la notación $E \otimes F \otimes G$ no es ambigua.

Si $E^k := E \times \dots \times E$ (k veces), sean $f: E^k \rightarrow \mathbb{R}$, $g: E^r \rightarrow \mathbb{R}$ dos formas multilineales (lineal en cada variable). Se define su **producto tensorial** $f \otimes g: E^{k+r} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\underline{f \otimes g}(x_1, \dots, x_{k+r}) := f(x_1, \dots, x_k) g(x_{k+1}, \dots, x_{k+r}).$$

Esto depende, obviamente, del orden de las variables x_i . Nos interesa las formas k -lineales $g: E^k \rightarrow \mathbb{R}$ que son **alternantes** (= *antisimétricas*) si un intercambio de dos variables cambia su signo. Más generalmente, para cada permutación $\sigma \in S_k$, vale:

$$g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = (-1)^\sigma g(x_1, \dots, x_k).$$

Una forma k -lineal cualquiera $h: E^k \rightarrow \mathbb{R}$ se puede **antisimetrizar** con la operación

$$\underline{\mathbb{A}h}(x_1, \dots, x_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma h(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}). \tag{2.6}$$

Si $f: E^k \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: E^r \rightarrow \mathbb{R}$ son alternantes, su **producto exterior** $f \wedge g: E^{k+r} \rightarrow \mathbb{R}$ también es alternante:

$$f \wedge g := \frac{(k+r)!}{k!r!} \mathbb{A}(f \otimes g). \quad (2.7)$$

El Lema 2.9 usa la combinatoria de permutaciones para verificar que el producto exterior de formas alternantes es *asociativa y anticonmutativa*:

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h), \quad g \wedge f = (-1)^{kr} f \wedge g. \quad (2.8)$$

En el caso $k = r = 1$, la fórmula (2.7) dice que $f \wedge g = f \otimes g - g \otimes f$; explícitamente:

$$f \wedge g(x, y) = f(x)g(y) - f(y)g(x). \quad (2.10)$$

La fórmula (2.10) se generaliza en el Lema 2.10: si $g^1, \dots, g^k \in E^*$ son formas lineales y $x_1, \dots, x_k \in E$ son vectores, entonces

$$g^1 \wedge \dots \wedge g^k(x_1, \dots, x_k) = \det [g^i(x_j)]. \quad (2.11)$$

Ahora sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base vectorial de E , con base dual $\{f^1, \dots, f^n\}$ de E^* . El espacio \mathbb{R} -vectorial $\underline{\Lambda^k E^*}$ de las formas k -lineales $f: E^k \rightarrow \mathbb{R}$ tiene la base:

$$\underline{f^I} \equiv f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_k}, \quad \text{donde } I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$$

y los índices están *en orden estrictamente creciente*, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Al contar las partes $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ con cardinalidad $|I| = k$, se obtiene

$$\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^k E^* = \binom{n}{k}.$$

La suma directa de estos $\Lambda^k E^*$ es el **álgebra exterior** de E^* ,

$$\underline{\Lambda^\bullet E^*} := \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k E^* = \mathbb{R} \oplus E^* \oplus \Lambda^2 E^* \oplus \dots \oplus \Lambda^n E^* \quad (2.12)$$

con dimensión $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^\bullet E^* = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Esta \mathbb{R} -álgebra es *graduada*: si $f \in \Lambda^k E^*$ y $g \in \Lambda^r E^*$, entonces $f \wedge g \in \Lambda^{k+r} E^*$.

En un álgebra graduada, se puede definir **derivaciones** D y E que cumplen reglas de Leibniz; D es **par** y E es **impar** si se cumplen

$$D(ab) = (Da)b + a(Db), \quad E(ab) = (Ea)b + (-1)^{\#a} a(Eb). \quad (2.13)$$

2.2. Clase 11

Esta es la clase virtual del 21 de setiembre del 2020. Su temática es la sección § 2.3: *Formas diferenciales de grado superior*.

Formas diferenciales de grado superior

Comenzamos con la definición algebraica de **tensores** sobre una variedad diferencial M – la Defn. 2.14 – que generaliza la definición de una 1-forma diferencial como aplicación $C^\infty(M)$ -lineal $\alpha: \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$. El caso más general es el de una aplicación *multilineal*

$$T: \mathfrak{X}(M)^p \times \mathcal{A}^1(M)^q \rightarrow C^\infty(M)$$

que es $C^\infty(M)$ -lineal en cada variable. La función $T(X_1, \dots, X_p, \alpha^1, \dots, \alpha^q)$ de p campos vectoriales X_j y de q 1-formas α^k debe ser $C^\infty(M)$ -lineal en cada variable.

Si $q = 0$, se trata de un p -tensor *covariante* $R: \mathfrak{X}(M)^p \rightarrow C^\infty(M)$ tal que cada aplicación parcial $X_j \mapsto R(X_1, \dots, X_j, \dots, X_p)$ es una 1-forma. Si $\underline{\omega}$ es un k -tensor *covariante* que además es *alternante* en sus argumentos X_j ,

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = (-1)^\sigma \omega(X_1, \dots, X_k), \quad (2.14)$$

entonces (Defn. 2.16) ω se llama una **k -forma diferencial** sobre M .

Por su definición, un 1-tensor *covariante* es simplemente una 1-forma diferencial $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$, ya visto. La “multiplicación escalar” por funciones $f \in C^\infty(M)$ *localiza* las evaluaciones puntuales $\alpha_p: X_p \mapsto \alpha(X)(p)$ en covectores $\alpha_p \in T_p^*M$, de tal manera que $p \mapsto \alpha_p$ es una *sección del fibrado cotangente*. Así, se obtiene $\mathcal{A}^1(M) \simeq \Gamma(M, T^*M)$.

Del mismo modo, un 1-tensor *contravariante* $S: \mathcal{A}^1(M) \rightarrow C^\infty(M)$ define en cada punto de M un *vector tangente* $X_p: \alpha_p \mapsto S(\alpha)(p)$ y se puede comprobar que $p \mapsto X_p$ es una *sección del fibrado tangente*, $X \in \Gamma(M, TM) \simeq \mathfrak{X}(M)$. Se obtiene $S(\alpha) = \alpha(X)$. En breve: un 1-tensor contravariante no es otra cosa que un *campo vectorial*.

El manejo algebraico de las k -formas diferenciales $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ es exactamente paralelo al álgebra exterior de vectores ordinarios. Con la única diferencia que los “escalares” ahora son funciones $f \in C^\infty(M)$. Si $\eta \in \mathcal{A}^r(M)$ es una r -forma, se define el *producto tensorial* $\underline{\omega \otimes \eta}$ y el **producto exterior** $\underline{\omega \wedge \eta}$ por las mismas fórmulas:

$$\begin{aligned} \omega \otimes \eta(X_1, \dots, X_{k+r}) &:= \omega(X_1, \dots, X_k) \eta(X_{k+1}, \dots, X_{k+r}); \\ \omega \wedge \eta &:= \frac{(k+r)!}{k!r!} \mathbb{A}(\omega \otimes \eta). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Además, se declara $\mathcal{A}^0(M) := C^\infty(M)$; una 0-forma diferencial es una función suave.

Cada $\mathcal{A}^k(M)$ es un módulo sobre $C^\infty(M)$. Su suma directa (dotado del producto exterior) es el **álgebra exterior** de M :

$$\mathcal{A}^\bullet(M) := \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{A}^k(M) = \mathcal{A}^0(M) \oplus \mathcal{A}^1(M) \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}^n(M). \quad (2.16)$$

Por qué $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ solamente? (Aquí $n = \dim M$.) Pues, el mismo proceso de localización en puntos $p \in M$ muestra cada $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ es una sección de un fibrado vectorial $\Lambda^k T^*M \xrightarrow{\pi} M$ cuyas fibras son espacios vectoriales $\Lambda^k(T_p^*M)$, y por lo tanto $k \leq \dim_{\mathbb{R}} T_p^*M = n$.

La localización en puntos de M también permite restringir ω a cartas locales (U, ϕ) de M . En coordenadas locales, $\mathcal{A}^k(U)$ es generado como $C^\infty(U)$ -módulo por un juego de “ k -formas locales” $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. Esto significa que hay una fórmula

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \equiv \sum_{|I|=k} f_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad (2.18)$$

donde los coeficientes $f_I = f_{i_1 \dots i_k}$ son funciones suaves en $C^\infty(U)$, y hay un término en la suma para cada juego de k índices $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$. Debido a la antisimetría

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i,$$

se puede exigir que los índices vengan en orden creciente: $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

El producto exterior de formas diferenciales es asociativo y anticonmutativo:

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta), \quad \eta \wedge \omega = (-1)^{kr} \omega \wedge \eta. \quad (2.19)$$

► Hay dos operaciones algebraicas importantes sobre las formas diferenciales, que cambian el grado de $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$. Ellos son

$$\varepsilon_\alpha : \omega \mapsto \alpha \wedge \omega \in \mathcal{A}^{k+1}(M), \quad i_X : \omega \mapsto i_X \omega \in \mathcal{A}^{k-1}(M).$$

Aquí ε_α es la *multiplicación exterior* por una 1-forma $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$; y i_X es la **contracción** con un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, definido así:

$$i_X \omega(Y_1, \dots, Y_{k-1}) := \omega(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}). \quad (2.21)$$

La Prop. 2.21 muestra que $i_X : \mathcal{A}^\bullet(M) \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(M)$ es una *derivación impar*:

$$i_X(\omega \wedge \eta) = i_X \omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i_X \eta. \quad (2.22c)$$

Hay otra operación algebraica que relaciona formas diferenciales en dos variedades M y N – sin cambiar sus grados. Dada una función suave $\tau: M \rightarrow N$, cada k -forma $\omega \in \mathcal{A}^k(N)$ da lugar a una k -forma $\tau^*\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, que se llama su *imagen inversa* o **pullback** bajo τ . (Nótese el asterisco superior.)

Si $\tau: M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, de modo que cada campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tiene una *imagen directa* $\tau_*X \in \mathfrak{X}(N)$ – nótese el asterisco inferior – entonces el pullback de una 1-forma $\beta \in \mathcal{A}^1(N)$ se define por la fórmula

$$\tau^*\beta(X) = \beta(\tau_*X) \circ \tau. \tag{2.24}$$

Más generalmente, el pullback de una k -forma $\omega \in \mathcal{A}^k(N)$ es:

$$\tau^*\omega(X_1, \dots, X_k) = \omega(\tau_*X_1, \dots, \tau_*X_k) \circ \tau.$$

Si $\tau: M \rightarrow N$ no es invertible, la fórmula (2.24) no tiene sentido, pues τ_*X no está definido. Sin embargo, se puede dar una definición puntual – equivalente a (2.24) si τ_*X existe – aprovechando los fibrados vectoriales:

$$(\tau^*\beta)_p(X_p) := \beta_{\tau(p)}(T_p\tau(X_p)). \tag{2.23}$$

Esta receta complicada significa que $\beta_{\tau(p)} \mapsto (\tau^*\beta)_p : T_{\tau(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$ es simplemente la *transpuesta* de $T_p\tau: T_pM \rightarrow T_{\tau(p)}N$.

En todo caso, la Prop. 2.23 establece que el pullback τ^* es un *homomorfismo* entre las álgebras exteriores de N y M :

$$\tau^*(\omega \wedge \eta) = \tau^*\omega \wedge \tau^*\eta. \tag{2.25}$$

2.3. Clase 12

Esta es la clase virtual del 24 de setiembre del 2020. Su temática es la sección § 2.4: *La derivada exterior*.

La derivada exterior

Las formas diferenciales sobre una variedad diferencial M pertenecen a una jerarquía: hay 0-formas, 1-formas, 2-formas, etc., de diversos grados. El rasgo más importante de esa jerarquía es la operación de *derivación exterior*, definido a continuación.

En cálculo de varias variables se ha visto la “diferencial” de una función f , expresado por la fórmula local $df = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$. Si $f \in C^\infty(M) = \mathcal{A}^0(M)$, este df es la 1-forma determinada por la evaluación de campos vectoriales sobre f , es decir:

$$df(X) := Xf. \quad (2.26)$$

En una carta local, esto dice que $df\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^k}$ mientras $dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \llbracket j = k \rrbracket$. Entonces la combinación lineal $df = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$ sigue válida para 1-formas locales.

La regla de Leibniz $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$ muestra que $d(fg) = dfg + f dg$.

En grados superiores, comenzamos con otras fórmulas locales en el ámbito de una carta local (U, ϕ) de M . Si $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, se define:

$$d\omega := \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}. \quad (2.27)$$

Como las 1-formas cumplen $dx^r \wedge dx^s = -dx^s \wedge dx^r$ y en particular $dx^j \wedge dx^j = 0$, en el lado derecho solo aparecen términos con $j \notin \{1, \dots, n\}$.

La fórmula (2.27) es obviamente \mathbb{R} -lineal, pero no es lineal sobre $C^\infty(M)$. Más bien, se obtiene otra regla de Leibniz:

$$d(g\omega) = \sum_{I,j} \left(\frac{\partial g}{\partial x^j} f_I + g \frac{\partial f_I}{\partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = dg \wedge \omega + g d\omega.$$

Si $\eta = \sum_{|J|=r} g_J dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} \in \mathcal{A}^r(U)$, se calcula:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{I,J} (df_I g_J + f_I dg_J) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \sum_{I,J} f_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dg_J \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r}. \end{aligned}$$

El signo $(-1)^k$ en la segunda sumatoria viene de pasar la 1-forma dg_J a la derecha de $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. La fórmula resultante es:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \quad (2.28)$$

En palabras: $\omega \mapsto d\omega$ es una *derivación impar* de $\mathcal{A}^\bullet(U)$.

► En variedades con una sola carta local, las fórmulas (2.27) y (2.28) son suficientes. Si se requiere más de una carta, se podría mostrar que estas fórmulas sobreviven

el proceso de cambios de variables locales $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1, \dots, y^n)$. Pero hay un camino alternativo, al considerar una k -forma local como sección local de un fibrado vectorial: $\mathcal{A}^k(U) \simeq \Gamma(U, \Lambda^k T^*M)$.

El Lema 2.26 establece que una derivación D (par o impar) del álgebra $\mathcal{A}^\bullet(M)$ conserva soportes; es decir, si $\omega|_U = 0$, entonces $(D\omega)|_U = 0$. Para demostrarlo, se prueba que $\omega_q = 0 \implies (D\omega)_q = 0$ en $\Lambda^\bullet T_q^*M$ para cada $q \in U$.

Ese lema es la clave para mostrar el Teorema 2.27: que existe una única derivación impar δ del álgebra $\mathcal{A}^\bullet(M)$ que cumple dos requisitos:

- (a) $\delta(f) = df$ si $f \in \mathcal{A}^0(M)$;
- (b) $\delta(d\omega) = 0$ para todo $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$.

Esto es suficiente para comprobar que $\delta(\omega) = d\omega$ en cada carta local. Hecho eso, se escribe d en vez de δ , y el requisito (b) se muda en: $d(d\omega) = 0$ para todo ω .

La fórmula $d(d\omega) = 0$ incorpora una propiedad básica del cálculo en varias variables: *la igualdad de las derivadas parciales mixtas de segundo orden*. En efecto, para una 0-forma local $f \in C^\infty(U)$, se obtiene

$$\begin{aligned} d(df) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} (dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \right) dx^i \otimes dx^j = 0. \end{aligned}$$

(En el segundo término de la última sumatoria, hay un cambio $i \leftrightarrow j$ de índices.)

► Una vez establecida la existencia y unicidad de la derivación exterior d mediante fórmulas locales, se puede obtener *un formulario puramente algebraico* al recordar que cada k -forma es una aplicación k -lineal sobre campos vectoriales. En particular, si α es una 1-forma, entonces $d\alpha$ es una 2-forma. La Prop. 2.29 da su presentación algebraica:

$$d\alpha(X, Y) = X \alpha(Y) - Y \alpha(X) - \alpha([X, Y]). \tag{2.31}$$

La prueba tiene dos partes:

- ◊ Se establece que el lado derecho es bilineal sobre $C^\infty(M)$; como es claramente antisimétrica, el lado derecho define una 2-forma.
- ◊ Se verifica que esta 2-forma coincide con $d\alpha$ sobre campos vectoriales locales, al tomar $\alpha = f_j dx^j$ en $\mathcal{A}^1(U)$.

También es necesario notar que las dos campos vectoriales locales básicos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ y $\frac{\partial}{\partial x^j}$ *conmutan*, otra vez por la igualdad de las derivadas parciales mixtas:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right](f) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = 0. \quad (2.34)$$

La misma técnica permite comprobar la forma general para la derivada exterior de una 2-forma $\beta \in \mathcal{A}^2(M)$ – que se dejará como ejercicio:

$$\begin{aligned} d\beta(X, Y, Z) &= X\beta(Y, Z) + Y\beta(Z, X) + Z\beta(X, Y) \\ &\quad - \beta([X, Y], Z) - \beta([Y, Z], X) - \beta([Z, X], Y). \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.4. Clase 13

Esta es la clase virtual del 28 de setiembre del 2020. Su temática es el de las secciones § 2.4: *La derivada exterior* y § 2.5: *La derivada de Lie*.

La derivada exterior con pullbacks

La derivada exterior de formas diferenciales es transparente bajo pullbacks o pre-*imágenes*: si $\tau: M \rightarrow N$ es una función suave, entonces a cada forma diferencial ω sobre N le corresponde una forma diferencial $\tau^*\omega$ sobre M . Sus derivadas exteriores están relacionadas por la fórmula:

$$d(\tau^*\omega) = \tau^*(d\omega). \quad (2.37)$$

En otras palabras: el operador de imágenes inversas τ^* entrelaza las dos derivadas exteriores $d: \mathcal{A}^k(N) \rightarrow \mathcal{A}^{k+1}(N)$ y $d: \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}^{k+1}(M)$.

Como τ^* conserva grados, se puede verificar (2.37) para cada $k = 0, 1, \dots, n$. Cuando $k = 0$ y $g \in \mathcal{A}^0(N) = C^\infty(N)$, la prueba se reduce a tres cosas equivalentes:

$$\begin{aligned} \tau^*(dg) &= d(\tau^*g) \equiv d(g \circ \tau) \quad \text{en } \mathcal{A}^1(M); \\ \tau^*(dg)(X) &= d(g \circ \tau)(X) \quad \text{para cada } X \in \mathfrak{X}(M); \\ (dg)_{\tau(p)}(T_p\tau(X_p)) &= T_p\tau(X_p)(g) = X_p(g \circ \tau) \quad \text{para } p \in M, X_p \in T_pM. \end{aligned}$$

El tercero sigue de la definición de la aplicación tangente $T_p\tau$.

La táctica de reducir el argumento a cada punto $p \in M$ implica que para mostrar (2.37) en grados $k \geq 1$, será suficiente hacer un cálculo local. Si (y^1, \dots, y^n) son coordenadas locales cerca de $\tau(p) \in N$, sea $h^j := y^j \circ \tau$ cerca de $p \in M$. El siguiente cálculo verifica la fórmula (2.37).

Aquí se usa el caso $k = 0$, mostrando que $dh^j = d(y^j \circ \tau) = d(\tau^* y^j) = \tau^*(dy^j)$:

$$\begin{aligned}\omega &= g_J dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k} \\ \implies \tau^* \omega &= (g_J \circ \tau) \wedge dh^{j_1} \wedge \cdots \wedge dh^{j_k} \\ \implies d(\tau^* \omega) &= d(g_J \circ \tau) \wedge dh^{j_1} \wedge \cdots \wedge dh^{j_k} \\ &= \tau^*(dg_J) \wedge \tau^*(dy^{j_1}) \wedge \cdots \wedge \tau^*(dy^{j_k}) \\ &= \tau^*(dg_J \wedge dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k}) = \tau^*(d\omega).\end{aligned}$$

► Un caso especial del pullback es el de *cambio de variables* en \mathbb{R}^n . Para pasar de coordenadas polares a cartesianas en \mathbb{R}^2 (Ejemplo 2.31), se usa la fórmula conocida:

$$(x, y) \equiv \tau(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Las 1-formas dx, dy se transforman así:

$$\begin{aligned}\tau^*(dx) &= d(x \circ \tau) = d(r \cos \theta) = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \\ \tau^*(dy) &= d(y \circ \tau) = d(r \sin \theta) = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta,\end{aligned}$$

y la 2-forma de área $dx \wedge dy$ tiene la preimagen:

$$\begin{aligned}\tau^*(dx \wedge dy) &= \tau^*(dx) \wedge \tau^*(dy) \\ &= (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= r \cos^2 \theta dr \wedge d\theta - r \sin^2 \theta d\theta \wedge dr \\ &= r dr \wedge d\theta,\end{aligned}$$

conocida por la práctica de calcular integrales dobles.

El Ejemplo 2.32 efectúa una transformación análoga para coordenadas esféricas (θ, ϕ) en \mathbb{S}^2 , donde ahora τ es la inclusión $i: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – la cual es suave, pero obviamente no es un difeomorfismo.

La derivada de Lie

Hay tres tipos de derivación importantes sobre $\mathcal{A}^\bullet(M)$:

- ◊ una contracción $i_X: \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}^{k-1}(M)$, para $X \in \mathfrak{X}(M)$;
- ◊ la derivada exterior $d: \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}^{k+1}(M)$; y
- ◊ la derivada de Lie $\mathcal{L}_X: \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}^k(M)$, para $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Si X es completo, su *flujo* es un grupo de difeomorfismos $\alpha_t: M \rightarrow M$, para $t \in \mathbb{R}$.

La definición de $\mathcal{L}_X\omega$ es la derivada del movimiento de ω bajo este flujo:

$$\mathcal{L}_X\omega := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_t^*\omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_t^*\omega - \omega}{t}. \quad (2.38a)$$

Para una 0-forma $f \in C^\infty(M)$, la derivada en $t = 0$ de $\alpha_t^*f := f \circ \alpha_t$ es – por la definición de un flujo – simplemente $\mathcal{L}_Xf = Xf$.

La Prop. 2.35 tiene una lista de la propiedades algebraicas básicas de \mathcal{L}_X . Cabe destacar dos de ellas; primero, que \mathcal{L}_X es una *derivación par*:

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X\omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X\eta \quad (2.39c)$$

para todo $\omega, \eta \in \mathcal{A}^\bullet(M)$. Segundo, al igual que cada α_t^* , \mathcal{L}_X conmuta con la acción de la derivación exterior:

$$\mathcal{L}_X(d\omega) = d(\mathcal{L}_X\omega). \quad (2.39d)$$

El Ejemplo 2.36 ofrece un cálculo típico: la 2-forma $\omega = (x^2 + y^2) dx \wedge dy$ sobre \mathbb{R}^2 es obviamente invariante bajo rotaciones. El generador del grupo de rotaciones es el “momento angular” $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X\omega &= X(x^2 + y^2) dx \wedge dy + (x^2 + y^2) (\mathcal{L}_X(dx) \wedge dy + dx \wedge \mathcal{L}_X(dy)) \\ &= (-2yx + 2xy) dx \wedge dy + (x^2 + y^2) (d(Xx) \wedge dy + dx \wedge d(Xy)) \\ &= 0 + (x^2 + y^2) (-dy \wedge dy + dx \wedge dx) = 0. \end{aligned}$$

Moraleja: $\mathcal{L}_X\omega = 0$ es una *ecuación diferencial* que exhibe la invariancia bajo rotaciones de un manera “infinitesimal”.

► La fórmula más famosa de toda la geometría diferencial es la *identidad de Cartan*:

$$\mathcal{L}_X\omega = i_X(d\omega) + d(i_X\omega). \quad (2.40)$$

La demostración de esta identidad involucra diversas técnicas y merece una atención especial. Tiene tres fases, según el grado de ω :

- (i) para una 0-forma f ;
- (ii) para una 1-forma β ;
- (iii) por inducción sobre el grado, de ω a $\beta \wedge \omega$.

La primera fase es fácil: como $\mathcal{L}_Xf = Xf$ y $i_Xf = 0$ por regla, solo falta notar que $i_X(df) = df(X) = Xf$ por definición.

Para $\beta \in \mathcal{A}^1(M)$ y $Y \in \mathfrak{X}(M)$, se dispone de la fórmula:

$$\mathcal{L}_X \beta(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_t^* \beta(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \beta(\alpha_{t*} Y) \circ \alpha_t. \quad (2.41)$$

Al lado derecho, la variable t aparece dos veces: hace falta aplicar una regla de Leibniz.

Eso exige procesar la derivada del campo vectorial $\alpha_{t*} Y$. Si $h \in C^\infty(M)$, se debe derivar la función

$$\alpha_{t*} Y(h) = Y(h \circ \alpha_t) \circ \alpha_{-t}.$$

El Lema de Hadamard permite expresar $h \circ \alpha_t$ como $h + t g_t$, donde las funciones g_t cumplen $g_0 = Xh$, porque

$$g_0(p) = \lim_{t \rightarrow 0} g_t(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h(\alpha_t(p)) = Xh(p).$$

Esto lleva al cálculo:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_{t*} Y(h) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Yh \circ \alpha_{-t} + t Y g_t \circ \alpha_{-t}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Yh \circ \alpha_{-t}) + \lim_{t \rightarrow 0} (Y g_t \circ \alpha_{-t}) \\ &= \mathcal{L}_{-X}(Yh) + Y(Xh) \\ &= -X(Yh) + Y(Xh) = -[X, Y](h), \end{aligned}$$

que no informa que $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\alpha_{t*} Y) = -[X, Y]$.

Con eso, podemos regresar a la fórmula (2.41):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \beta(Y) &= -\beta([X, Y]) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \beta(Y) \circ \alpha_t \\ &= -\beta([X, Y]) + X \beta(Y) = d\beta(X, Y) + Y \beta(X) \end{aligned}$$

al usar la fórmula (2.31) para $d\beta$, esto es: $d\beta(X, Y) = X \beta(Y) - Y \beta(X) - \beta([X, Y])$. Entonces

$$\mathcal{L}_X \beta(Y) = i_X(d\beta)(Y) + d(i_X \beta)(Y). \quad (2.42)$$

Al eliminar Y , esta ecuación dice que $\mathcal{L}_X \beta = i_X(d\beta) + d(i_X \beta)$: esta es la identidad de Cartan para una 1-forma β .

Dejemos la tercera fase (el paso inductivo) para la próxima sesión.

Sobre la sexta lista de ejercicios

Ejercicio 2.1 Este lema algebraico expresa una forma bilineal alternante σ como una suma de bivectores independientes. Es un antecedente para un teorema de Darboux que da una descomposición análoga para una 2-forma simpléctica sobre una variedad diferencial.

Ejercicio 2.4 El formato de esta 2-forma ω sobre \mathbb{R}^{2m} es el que ofrece el teorema de Darboux en un contexto más general. La potencia exterior ω^m es una forma de volumen (como se verá en el siguiente capítulo).

Ejercicio 2.6 La forma σ sobre S^{n-1} tiene el grado máximo grado $n - 1$; ésta es la forma de volumen de la esfera, en coordenadas cartesianas. En el caso $n = 3$, el Ejemplo 2.32 lo transforma a coordenadas esféricas sobre S^2 .

2.5. Clase 14

Esta es la clase virtual del 01 de octubre del 2020. Su temática es el de las secciones § 2.5: *La derivada de Lie* y § 2.6: *Formas cerradas y exactas*.

La derivada de Lie (continuación)

En la clase anterior, se anunció la identidad de Cartan:

$$\mathcal{L}_X \omega = i_X(d\omega) + d(i_X \omega). \quad (2.40)$$

La demostración procede por una inducción sobre el grado de ω . (En general, ω es la suma de formas de diversos grados; como los dos lados de la igualdad son aditivos en ω , se puede probarla para formas de cada grado k por separado.)

Para una 0-forma $\omega = f$, la demostración es casi inmediato. Para una 1-forma $\omega = \beta$, era necesario examinar el efecto del flujo $\{\alpha_t\}$ de X sobre la 1-forma β y sobre un campo vectorial Y . Se logró mostrar que

$$\mathcal{L}_X \beta(Y) = i_X(d\beta)(Y) + d(i_X \beta)(Y) \quad \text{para todo } Y \in \mathfrak{X}(M), \quad (2.42)$$

para concluir que $\mathcal{L}_X \beta = i_X(d\beta) + d(i_X \beta)$ en $\mathcal{A}^1(M)$.

Para concluir la prueba por inducción sobre k , se asumirá que (2.42) es válido para ω de grado k , con el plan de comprobarlo para $\beta \wedge \omega$, de grado $(k + 1)$. En cada carta local, una $(k + 1)$ -forma es una suma finita de formas de este tipo.

Entonces, tómesese $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ y $\beta \in \mathcal{A}^1(M)$. Al aplicar las derivaciones impares i_X y d varias veces, se obtiene:

$$\begin{aligned} d(i_X\beta \wedge \omega) &= d(i_X\beta) \wedge \omega + i_X\beta \wedge d\omega, & \#(i_X\beta) &= 0 \\ d(\beta \wedge \omega) &= d\beta \wedge \omega - \beta \wedge d\omega, & \#(\beta) &= 1 \\ i_X(\beta \wedge \omega) &= i_X\beta \wedge \omega - \beta \wedge i_X\omega, & \#(\beta) &= 1 \\ i_X(d\beta \wedge \omega) &= i_X(d\beta) \wedge \omega + d\beta \wedge i_X\omega. & \#(d\beta) &= 2 \end{aligned}$$

Con esta preparación y como \mathcal{L}_X es una derivación par, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\beta \wedge \omega) &= \mathcal{L}_X\beta \wedge \omega + \beta \wedge \mathcal{L}_X\omega \\ &= (i_X(d\beta) + d(i_X\beta)) \wedge \omega + \beta \wedge (i_X(d\omega) + d(i_X\omega)) \\ &= i_X(d\beta \wedge \omega) - d\beta \wedge i_X\omega + d(i_X\beta \wedge \omega) - i_X\beta \wedge d\omega \\ &\quad + \beta \wedge i_X(d\omega) + \beta \wedge d(i_X\omega) \\ &= i_X(d\beta \wedge \omega) - i_X\beta \wedge d\omega + \beta \wedge i_X(d\omega) \\ &\quad + d(i_X\beta \wedge \omega) - d\beta \wedge i_X\omega + \beta \wedge d(i_X\omega) \\ &= i_X(d\beta \wedge \omega) - i_X(\beta \wedge d\omega) + d(i_X\beta \wedge \omega) - d(\beta \wedge i_X\omega) \\ &= i_X(d(\beta \wedge \omega)) + d(i_X(\beta \wedge \omega)). \end{aligned}$$

En la segundo línea, se usó (2.40) para β y ω ; y se obtuvo su validez para $\beta \wedge \omega$. Esto concluye la inducción. \square

► La derivada de Lie \mathcal{L}_X también es aplicable a otros tensores, al derivar (en $t = 0$) el efecto del flujo $\{\alpha_t\}$ de X . Se cambia α_t^* en $(\alpha_{-t})_*$ para tensores contravariantes; por ejemplo, la Defn. 2.38 dice que

$$\mathcal{L}_X Y := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\alpha_{-t})_* Y \quad \text{si } Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Esta es la derivada en 0 de $Y(f \circ \alpha_{-t}) \circ \alpha_t$, la cual es $Y(-Xf) + X(Yf) = [X, Y]f$. Entonces se ve que $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Si consideramos \mathcal{L}_X como un operador sobre $\mathcal{A}^\bullet(M)$ que conserva grados – o bien, un operador sobre cada $\mathcal{A}^k(M)$ por separado – se puede considerar el *conmutador* de dos de estos operadores.

Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{A}^0(M)$, es fácil notar que

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y f) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X f) = X(Yf) - Y(Xf) = [X, Y]f = \mathcal{L}_{[X, Y]}f.$$

Para una 1-forma β , un cálculo intrincado, usando las identidades de Cartan y Jacobi, demuestra la Prop. 2.40:

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y\beta) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X\beta) = \mathcal{L}_{[X,Y]}\beta. \tag{2.44}$$

Luego, un argumento por inducción sobre el grado demuestra el caso general:

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y\omega) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X\omega) = \mathcal{L}_{[X,Y]}\omega \quad \text{para todo } \omega \in \mathcal{A}^\bullet(M).$$

Se puede notar, de paso, que hay una fórmula análoga para campos vectoriales:

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_YZ) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_XZ) = \mathcal{L}_{[X,Y]}Z, \quad \text{para } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M);$$

pero eso no es más que la *identidad de Jacobi*:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Formas cerradas y exactas

El uso principal de la derivada exterior es el empleo de estos dos conceptos:

- ◊ Una forma $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$ es **cerrada** si $d\omega = 0$.
- ◊ Una forma $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$ es **exacta** si $\omega = d\eta$ para alguna η .

Como $d(d\eta) = 0$, cada forma exacta es cerrada.

Por otro lado, la 1-forma $d\theta$ sobre \mathbb{S}^1 es cerrada (porque \mathbb{S}^1 no posee 2-formas no nulas), pero no es exacta, porque la coordenada *local* θ no se extiende a todo \mathbb{S}^1 .

El Ejemplo 2.43 – el “campo magnético” sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ – toma la 1-forma

$$\alpha := -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Es fácil comprobar que $d\alpha = 0$. Pero si fuera $\alpha = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$, se obtendría $f(x, y) \equiv \text{arc tg}(y/x) + c$, al menos para $x > 0$. Es imposible extender arc tg(y/x) a una función continua sobre todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, así que α no es exacta.

La obstrucción a la exactitud de $d\theta$ y de α se debe a la *topología* de las variedades \mathbb{S}^1 y $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, que no son simplemente conexos.

Resulta que se puede mostrar “cerrada \implies exacta” para variedades *contractibles*: eso el llamado *Lema de Poincaré*. Aquí se dará una construcción explícita para el caso $M = \mathbb{R}^n$, al construir un *operador de homotopía* $h: \mathcal{A}^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{A}^{k-1}(\mathbb{R}^n)$.

Se escribe cualquier $\omega \in \mathcal{A}^k(\mathbb{R}^n)$ con coordenadas cartesianas:

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad \text{cada } f_I \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Para cada juego de índices I , se usa el Ejercicio 2.6 para escribir

$$\sigma_I := \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} x^{i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \in \mathcal{A}^{k-1}(\mathbb{R}^n).$$

Se nota que $d\sigma_I = k dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$.

Ahora se define un operador integral $E_{k-1}: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por

$$\underline{E_{k-1} f}(x) := \int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt. \quad (2.45)$$

Es inmediato que

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (E_{k-1} f)(x) = \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx) dt = E_k \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right)(x).$$

Ahora se define $h\omega \in \mathcal{A}^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ por:

$$h\omega := \sum_{|I|=k} (E_{k-1} f_I) \sigma_I. \quad (2.46)$$

Un cálculo explícito, con ciertas cancelaciones de términos, conduce a

$$d(h\omega) + h(d\omega) = \omega. \quad (2.48)$$

Por lo tanto, si $d\omega = 0$, entonces se obtiene $\omega = d\eta$ al poner $\underline{\eta} := h\omega$.

La fórmula algebraica (2.48) dice que h es una "homotopía de cocadenas" en el lenguaje del álgebra homológica.

► Por último, se nota que es posible escribir h como una contracción, $h\omega = i_Z \Omega$, donde $\Omega := \int_0^1 \rho_{\log s}^* \omega ds$ es otra k -forma y Z es el campo vectorial de Euler:

$$Z := x^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n), \quad \text{cuyo flujo es } \rho_t(x) \equiv e^t x. \quad (2.50)$$

Un cálculo explícito muestra que (2.48) es un caso particular de la identidad de Cartan:

$$d(h\omega) + h(d\omega) = d(i_Z \Omega) + i_Z(d\Omega) = \mathcal{L}_Z \Omega = \omega.$$

Sobre la séptima lista de ejercicios

Ejercicio 2.10 Las operaciones grad, rot y div del llamado “análisis vectorial” en \mathbb{R}^3 se pueden expresar como derivadas exteriores de ciertas formas diferenciales. Las identidades $\text{rot}(\text{grad } f) = 0$ y $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$ son instancias de la fórmula $d(d\omega) = 0$.

Ejercicios 2.11 y 2.13 Las fórmulas algebraicas para $d\beta$ y $\mathcal{L}_X\alpha$ se demuestran con las mismas tácticas de la demostración de la Prop. 2.29.

Ejercicios 2.12, 2.14 y 2.15 Las fórmulas generales para $d\omega$ y $\mathcal{L}_X\omega$ (de cualquier grado) permiten dar una verificación abstracta de la identidad de Cartan.

Ejercicios 2.16, 2.17 y 2.19 Se debe comprobar varias propiedades algebraicas de contracciones y derivadas de Lie.

Ejercicio 2.18 La divergencia $\text{div } X$ de un campo vectorial X resulta ser una operación secundaria del cálculo; aquí se indica su relación con derivadas de Lie.

Sobre la octava lista de ejercicios

Ejercicios 2.21 y 2.22 Sobre un grupo de Lie, los campos vectoriales invariantes van acompañados de 1-formas invariantes. Aquí se encuentran dos fórmulas útiles para las derivadas exteriores de esas 1-formas invariantes.

Ejercicios 2.24 y 2.25 Una *variedad simpléctica* (M, ω) es una variedad diferencial M dotado de una 2-forma ω que es cerrada ($d\omega = 0$) y no degenerada. Esto establece una correspondencia biúnivoca entre campos vectoriales y 1-formas sobre M .

Ejercicio 2.27 En una variedad simpléctica (M, ω) , los campos vectoriales que corresponden con 1-formas exactas se llaman *campos vectoriales hamiltonianos*. Este ejercicio explora algunos fórmulas notables para estos y otros campos.

Ejercicio 2.28, 2.29 y 2.30 En una variedad simpléctica (M, ω) , se puede definir el *corchete de Poisson* $\{f, g\}$ de dos funciones suaves f, g . Bajo este corchete, $C^\infty(M)$ tiene la estructura de un álgebra de Lie (infinitodimensional).

Ejercicio 2.31 La integrabilidad de cierto sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden se verifica mediante un uso astuto del Lema de Poincaré.

3 Comentarios sobre las clases de MA-870, parte 3

Este es un gui3n informal que acompa1a las clases “virtuales” de MA-870, *Geometría Diferencial*, en el segundo semestre del 2020, a causa de la suspensi3n de clases presenciales.

3.1. Clase 15

Esta es la clase virtual del 5 de octubre del 2020. Su temática comprende la secci3n § 3.1: *Variedades orientables*.

Variedades orientables

Despu3s de haber visto el panorama del “cálculo diferencial” en variedades con diversas operaciones sobre formas diferenciales, es hora de enfocar el “cálculo integral”. Se trata de construir una teoría de integraci3n en variedades que permite generalizar los teoremas clásicos de Green, Gauss y Stokes. (No es necesario preocuparnos sobre detalles de la teoría de medida: es cuesti3n de importar a las cartas de cada variedad diferencial la medida de Lebesgue sobre abiertos de \mathbb{R}^n .)

El asunto que queda por resolver es *signo* de una determinada integral. Por ejemplo, en dimensi3n 1, la integral de Riemann cumple la fórmula:

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt \quad (3.1)$$

para $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Esto dice que la regi3n de integraci3n es el intervalo

$$[a, b] := \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\} \quad \text{o bien} \quad [b, a] := \{t \in \mathbb{R} : b \geq t \geq a\},$$

con el convenio de signos

$$[b, a] = -[a, b],$$

que permite escribir

$$\int_{[a,b]} f(t) dt = - \int_{[b,a]} f(t) dt.$$

Moraleja: se debe asignar una *orientaci3n* a la regi3n (o intervalo) de integraci3n.

En \mathbb{R}^n , el “elemento de volumen” en integrales mltiples es la n -forma

$$v := dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (3.2)$$

Fíjese que un cambio de variables $x^1 \leftrightarrow x^2$ lo convierte en $-v$.

La Defn. 3.1 dice que una variedad M con $\dim M = n$ es **orientable** si hay una n -forma $\nu \in \mathcal{A}^n(M)$ que *no se anula*. Una tal ν es una **forma de volumen**.

Este “no se anula” significa una de dos cosas equivalentes:

◊ Para todo $p \in M$, $\nu_p \neq 0$ en $\Lambda^n T_p^*M$. (Una n -forma es una sección del fibrado vectorial $\Lambda^n T^*M \xrightarrow{\pi} M$, de rango uno.)

◊ Hay una atlas de M tal que, en cada carta local *conexa* (U, θ) , se puede escribir

$$\nu|_U = f(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad \text{con} \quad \underline{f(x) > 0} \quad \text{para todo } x \in U.$$

Las Props. 3.3 y 3.6 dicen que M es orientable (hay $\nu \in \mathcal{A}^n(M)$ que no se anula) si y solo si M posee una atlas cuyas funciones de transición

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}: \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

todas tienen *jacobianos positivos*.

► Prop. 3.3 \implies : Dada una forma de volumen ν y dos cartas locales conexas (U, ϕ) y (V, ψ) , en el abierto $U \cap V$ se cumple:

$$J(\psi \circ \phi^{-1}) := \det \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right] \in \mathbb{R}^\times = (-\infty, 0) \uplus (0, +\infty). \quad (3.3)$$

Ahora $\nu|_U = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, con $f(x) > 0$ en U o bien $f(x) < 0$ en U , por ser U conexo. En el segundo caso, se puede una *reflexión*

$$\rho(x^1, x^2, \dots, x^n) := (-x^1, x^2, \dots, x^n)$$

y cambiar (U, ϕ) por $(U, \rho \circ \phi)$ y $f(x)$ por $-f(x)$. Entonces se puede suponer que $f(x) > 0$ en U .

De igual manera, se puede suponer que $\nu|_V = h dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$ con $h(y) > 0$ en V . En la intersección $U \cap V$, vale

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = J(\psi \circ \phi^{-1}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad (3.4)$$

así que $J(\psi \circ \theta^{-1}) = f/h > 0$ en $U \cap V$, como se quería. □

► El Ejemplo 3.4 recuerda el plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$, que tiene un atlas de tres cartas conexas, pero cada intersección $U \cap V$ es *disconexa*! Típicamente,

$$\phi_1(U_1 \cap U_2) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y^1 > 0\} \uplus \{y \in \mathbb{R}^2 : y^1 < 0\}$$

es la unión de dos semiplanos abiertos; y $J(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) = -(y^1)^{-3} \neq 0$, pero es positivo en un semiplano y negativo en el otro.

Consecuencia: la variedad $\mathbb{R}P^2$ *no es orientable*.

► Prop. 3.6 \iff : Dada un atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ de M cuyas funciones de transición sí tienen jacobianos positivos, hay que armar una forma de volumen ν al “pegar” mini-formas de volumen en cada carta. Esto se realiza con una **partición de la unidad** $\{h_\alpha\}$ (de la Defn. 3.5):

- ◊ Cada $h_\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}$ es suave, con $0 \leq h_\alpha \leq 1$, y $\text{sop}(h_\alpha) \subset U_\alpha$.
- ◊ El cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ de M es *localmente finito*: para cada $p \in M$, hay un vecindario W de p tal que $W \cap U_\alpha \neq \emptyset$ solo para un número finito de los α .
- ◊ Se cumple $\sum_\alpha h_\alpha(q) = 1$ para todo $q \in M$. (Estas son sumas finitas!)

Las particiones de la unidad existen porque M es metrizable (y por ende, “paracompacto”). Los h_α son suaves pues se construyen con el algoritmo de la sección 1.2.

Ahora se define una n -forma $\nu_{(\alpha)}$, para cada carta local, por

$$\nu_{(\alpha)}|_{U_\alpha} := h_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n; \quad \nu_{(\alpha)}|_{M \setminus U_\alpha} := 0,$$

y la forma de volumen deseada es su suma (localmente finita):

$$\nu := \sum_{\alpha \in A} \nu_{(\alpha)}$$

con las expresiones locales:

$$\nu|_{U_\alpha} = \left(h_\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} h_\beta J(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}) \right) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n.$$

Como $J(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}) > 0$ en $U_\alpha \cap U_\beta$, la función coeficiente es positiva en U_α (aquí se usa la relación $\sum_\alpha h_\alpha \equiv 1$), así que ν no se anula.

3.2. Clase 16

Esta es la clase virtual del 8 de octubre del 2020. Su temática comprende las secciones § 3.1: *Variedades orientables* y § 3.2: *Integrales de n -formas*.

Más sobre variedades orientables

En la clase anterior, se definió una variedad orientable (M, ν) como una variedad diferencial M dotado de una forma diferencial ν , de grado máximo n , que no se anula en M . Se mostró que esto es equivalente a la existencia de un atlas de M en donde todas las funciones de transición tienen jacobianos positivos. En adelante, se asumirá que el atlas de una variedad orientable siempre tiene esa propiedad.

Qué pasa si hay otra n -forma $\mu \in \mathcal{A}^n(M)$ que no se anula? El Corolario 3.7 establece que $\mu = h\nu$ donde h es una función suave que no se anula.

Esto se ve al expresar μ y ν localmente, con respecto a una carta local (U, ϕ) , como

$$\nu|_U = f_U dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad \mu|_U = g_U dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

y al colocar $h := g_U/f_U$ en $C^\infty(U)$; bien definida en U porque f_U no se anula, y sin valores ceros porque g_U no se anula.

Pero si (V, ψ) es otra carta, de igual manera se define $h := g_V/f_V$ en $C^\infty(V)$. Para que eso sea consistente, hay que recordar las fórmulas de cambio de variable para n -formas:

$$f_V = f_U J(\psi \circ \phi^{-1}) \quad \text{y} \quad g_V = g_U J(\psi \circ \phi^{-1}) \quad \text{en } U \cap V.$$

Entonces el cociente $h := g/f$ no es ambigua.

Si la variedad M es *conexa*, la función $h \in C^\infty(M)$ no cambia de signo. Se dice que $\mu \sim \nu$ si $\mu = h\nu$ con $h > 0$ en todo M . Esta es una relación de equivalencia entre formas de volumen. La clase $[\nu]$ se llama la *orientación* de (M, ν) ; la clase $[-\nu]$ es la *orientación opuesta*.

► El Lema 3.11 ofrece un *criterio* para determinar si una subvariedad N de M es también orientable. Es aplicable al caso en donde $\dim N = n - 1$; si hay un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_p \notin T_p N$ para $p \in N$, entonces N es orientable.

Es necesario ser menos informal: en términos de la inclusión $j: N \hookrightarrow M$, se exige que $X_p \notin T_p j(T_p N)$ para todo $p \in N$; la forma de volumen para N entonces es $j^*(i_X \nu)$.

El Ejemplo 3.12 aplica el criterio a la esfera $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ (de codimensión 1). El campo de vectorial de Euler $Z := x^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, ya visto, cumple el requisito; luego,

$$\sigma := j^*(i_Z \nu) \in \mathcal{A}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \tag{3.5b}$$

es la forma de volumen de la esfera (para $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, σ se llama la *forma de área*). El Ejercicio 2.6 exhibe la fórmula explícita para σ .

Integrales de n -formas

En un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$, la *integral* de una n -forma $\omega_0 = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ se define como la integral iterada usual:

$$\int_V \omega_0 \equiv \int \cdots \int_V f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n. \tag{3.6}$$

Dada una variedad orientada (M, ν) , esa definición es aplicable en una carta local (U, ϕ) . Si $\omega \in \mathcal{A}^n(M)$, se puede transferir el cálculo al abierto $\phi(U)$ de \mathbb{R}^n , porque $\omega|_U = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \underline{\phi^* \omega_0}$ conlleva la *definición*:

$$\int_U \omega = \int_U \phi^* \omega_0 := \int_{\phi(U)} \omega_0 = \int_{\phi(U)} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (3.7)$$

De nuevo, se requiere la *consistencia* de esta fórmula bajo un cambio de cartas locales. En otra carta (V, ψ) con $U \cap V \neq \emptyset$, en donde

$$\omega|_{U \cap V} = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = g(y^1, \dots, y^n) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n,$$

es *necesario* (y después, suficiente) que

$$\int_{\phi(U \cap V)} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_{\psi(U \cap V)} g(y^1, \dots, y^n) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n. \quad (3.8)$$

Ahora, ya sabemos que la fórmula de cambio de variable para n -formas es:

$$g(y) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = g(\psi \circ \phi^{-1}(x)) J(\psi \circ \phi^{-1})(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

La función de x a la derecha es $f(x)$. Entonces el requisito es que

$$\int_{\psi(U \cap V)} g(y) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = \int_{\phi(U \cap V)} g(\psi \circ \phi^{-1}(x)) J(\psi \circ \phi^{-1})(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (3.9)$$

Pero no es más que la fórmula bien conocida de cambio de variable en integrales múltiples en \mathbb{R}^n , precisamente porque $\underline{J(\psi \circ \phi^{-1})(x) > 0}$.

► Para pasar de la fórmula local (3.7) a una fórmula global, se usa *una partición de la unidad* $\{h_\alpha\}$, subordinada al atlas de M . [Se verifica $\sum_\alpha h_\alpha \equiv 1$ y $\text{sop}(h_\alpha) \subset U_\alpha$.] Entonces se define, simplemente:

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} (h_\alpha \omega).$$

La Proposición 3.16 dice que esta integral de n -formas es compatible con pull-backs: dadas (M, ν) y (N, ρ) orientadas con $\dim M = \dim N = n$ y un difeomorfismo $\tau: M \rightarrow N$ que cumple $\underline{\tau^* \rho \sim \nu}$ – esto es, τ^* preserva la orientación – entonces

$$\int_M \tau^* \eta = \int_N \eta \quad \text{para todo } \eta \in \mathcal{A}^n(N). \quad (3.10)$$

Al examinar las definiciones, la igualdad (3.10) se reduce, una vez más, a la fórmula (3.9) de cambio de variables con jacobianos positivos.

3.3. Clase 17

Esta es la clase virtual del 12 de octubre del 2020. Su temática comprende la sección §3.3: *Variedades orientables*.

Símplices y cadenas

Esta es una sección preparatoria, antes de abordar integrales de formas diferenciales de grado menor que la dimensión de la variedad. El problema principal no son los integrandos (k -formas con $k < n$), sino las “regiones de integración”. Se requiere una descripción concreta, pero general, del dominio de la integral en cada caso.

Es tradicional construir integrales de varias variables sobre regiones rectangulares o cuboidales; pero resulta más flexible empezar con triángulos o tetraedros. Para empezar, conviene revisar el álgebra de esas regiones de \mathbb{R}^n .

Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es *conexo* si incluye el *segmento* $[p_0, p_1]$ que une cada par de puntos $p_0, p_1 \in C$. Ese segmento es

$$\begin{aligned} [p_0, p_1] &:= \{(1-t)p_0 + tp_1 : 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \{t_0p_0 + t_1p_1 : t_0 + t_1 = 1; t_0 \geq 0, t_1 \geq 0\}. \end{aligned}$$

De modo similar, el triángulo con vértices p_0, p_1, p_2 es

$$[p_0, p_1, p_2] := \{t_0p_0 + t_1p_1 + t_2p_2 : t_0 + t_1 + t_2 = 1; \text{ cada } t_i \geq 0\}.$$

Dados $(k+1)$ puntos $p_0, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$, su *envoltura convexa* es:

$$[p_0, p_1, \dots, p_k] := \{t_0p_0 + t_1p_1 + \dots + t_kp_k : t_0 + t_1 + \dots + t_k = 1; \text{ cada } t_i \geq 0\}.$$

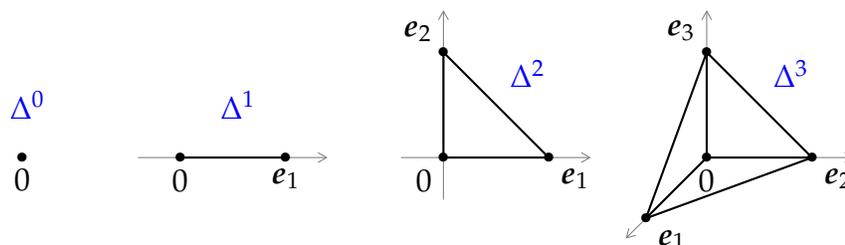
Para evitar casos degenerados, se pide que esos puntos sean *afínmente independientes*: esto significa que los k vectores $p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_k - p_0$ sean *linealmente independientes*. (Obviamente, eso exige $k \leq n$).

Cuando los puntos p_0, p_1, \dots, p_k son afínmente independientes y están dados en orden, se usa el sinónimo

$$\Delta(p_0, \dots, p_k) = [p_0, p_1, \dots, p_k]$$

y este es un **k -símplice** (en \mathbb{R}^n , con $n \geq k$). El caso particular es el k -símplice *estándar*

$$\Delta^k := \Delta(0, e_1, \dots, e_k). \quad (3.12)$$


 Figura 3.4: Los símlices estándares $\Delta^0, \Delta^1, \Delta^2, \Delta^3$

La Defn 3.19 introduce *sumas formales* de k -símlices en \mathbb{R}^n (con coeficientes en \mathbb{Z}): $C = a_1\sigma_1 + \cdots + a_r\sigma_r$. Estas k -**cadena simplicial** forman un *grupo abeliano* llamado $S_k(\mathbb{R}^n)$.

El **borde** de C es una $(k-1)$ -cadena simplicial $\partial C \in S_{k-1}(\mathbb{R}^n)$. La operación de borde ∂ es aditiva; el borde de $\sigma = \Delta(p_0, \dots, p_k)$ es

$$\partial\sigma := \sum_{j=0}^k (-1)^j \Delta(p_0, \dots, \widehat{p}_j, \dots, p_k). \quad (3.13)$$

Por ejemplo, el borde del 1-símlice $\Delta(p_0, p_1)$ es la 0-cadena

$$\partial\Delta(p_0, p_1) = \Delta(p_1) - \Delta(p_0),$$

esto es, dos puntos dotados de signos opuestos. Nótese que $\partial\Delta(p_1, p_0) = -\partial\Delta(p_0, p_1)$; ese cambio de signo se indice por una flecha (de p_0 a p_1) en la Figura 3.1.

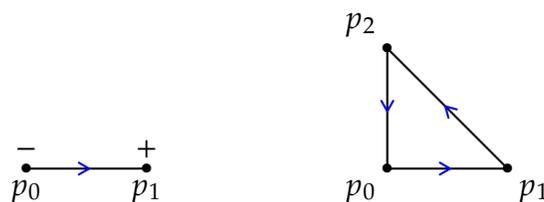


Figura 3.1: Un 1-símlice y un 2-símlice con sus bordes

El 2-símlice $\Delta(p_0, p_1, p_2)$ tiene borde:

$$\begin{aligned} \partial\Delta(p_0, p_1, p_2) &= \Delta(p_1, p_2) - \Delta(p_0, p_2) + \Delta(p_0, p_1) \\ &= \Delta(p_1, p_2) + \Delta(p_2, p_0) + \Delta(p_0, p_1). \end{aligned} \quad (3.14)$$

La fórmula algebraica más importante para cadenas y bordes es el Lema 3.23: *un borde no tiene borde propio*. O bien, de manera menos elegante: *el borde de un borde es cero*: $\partial(\partial C) = 0$ en $S_{k-2}(\mathbb{R}^n)$.

Para el caso de un k -símplice $\sigma = \Delta(p_0, \dots, p_k)$, la prueba es una *cancelación de signos* sencilla pero muy importante:

$$\begin{aligned} \partial(\partial\sigma) &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \partial\Delta(p_0, \dots, \widehat{p}_j, \dots, p_k) \\ &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \Delta(p_0, \dots, \widehat{p}_i, \dots, \widehat{p}_j, \dots, p_k) \\ &\quad + \sum_{i>j} (-1)^{i-1+j} \Delta(p_0, \dots, \widehat{p}_j, \dots, \widehat{p}_i, \dots, p_k) \\ &= \sum_{i<j} ((-1)^{i+j} + (-1)^{j-1+i}) \Delta(p_0, \dots, \widehat{p}_i, \dots, \widehat{p}_j, \dots, p_k) = 0. \end{aligned}$$

El borde del k -símplice estándar Δ^k es una suma alternada de sus facetas:

$$\partial\Delta^k = \sum_{j=0}^k (-1)^j s_j^k(\Delta^{k-1}), \quad (3.17a)$$

donde cada $s_j^k: \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una aplicación afín que lleva Δ^{k-1} en la *faceta* # j de Δ^k .

► Después de estas preparaciones, se define un **k -símplice singular** en una variedad M como la imagen de una *función suave* $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$.

(Para poder usar funciones suaves, se debe ampliar el dominio Δ^k a vecindario abierto V de Δ^k en \mathbb{R}^n , de modo que $\sigma: V \rightarrow M$ sea suave.)

Una **k -cadena singular** en M es una suma finita formal $c = \sum_{i=1}^r a_i \sigma_i$ de k -símplices singulares, pero esta vez *con coeficientes reales* $a_i \in \mathbb{R}$. Ellas forman un espacio \mathbb{R} -vectorial $S_k(M, \mathbb{R})$.

El *borde* del k -símplice singular $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$ es nuevamente una suma alternada de sus facetas:

$$\partial\sigma := \sum_{j=0}^k (-1)^j \sigma \circ s_j^k: \Delta^{k-1} \rightarrow M \quad (3.18)$$

que viene directamente de la fórmula (3.17a). Esto se extiende a una aplicación lineal $\partial: S_k(M, \mathbb{R}) \rightarrow S_{k-1}(M, \mathbb{R})$ que cumple $\partial(\partial c) = 0$, por el mismo cálculo anterior.

3.4. Clase 18

Esta es la clase virtual del 15 de octubre del 2020. Su temática comprende las secciones § 3.3: *Símplices y cadenas* y § 3.4: *El teorema de Stokes*.

Cadenas singulares

Se ha introducido el k -símplice estándar $\Delta^k := \Delta(0, e_1, \dots, e_k)$ en \mathbb{R}^n (si $k \leq n$). Su borde $\partial\Delta^k$ es una suma alternada de $(k - 1)$ -símplices:

$$\partial\Delta^k = \Delta(e_1, \dots, e_k) + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \Delta(0, e_1, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_k) + (-1)^k \Delta^{k-1}. \quad (3.16)$$

Se definió un k -símplice singular en una variedad diferencial M como la imagen de una función suave $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$.

Aquí $\sigma: V \rightarrow M$ es suave en algún abierto V con $\Delta^k \subset V \subseteq \mathbb{R}^k$.

La fórmula (3.16) se transfiere a símplices singulares para definir el borde $\partial\sigma$.

El espacio vectorial $S_k(M, \mathbb{R})$ de k -cadenas singulares es generado por los símplices singulares σ . El borde define una aplicación lineal $\partial: S_k(M, \mathbb{R}) \rightarrow S_{k-1}(M, \mathbb{R})$.

Por un cálculo explícito, se vio que $\partial(\partial\Delta^k) = 0$ por cancelación de términos. Esta fórmula también es transferible a cadenas singulares (Lema 3.26):

$$c \in S_k(M, \mathbb{R}) \implies \partial(\partial c) = 0 \quad \text{en} \quad S_{k-2}(M, \mathbb{R}).$$

Esto permite identificar dos subespacios especiales de k -cadenas:

$$\underline{Z}_k(M, \mathbb{R}) := \{ c \in S_k(M, \mathbb{R}) : \partial c = 0 \} \quad (k\text{-ciclos singulares}),$$

$$\underline{B}_k(M, \mathbb{R}) := \{ \partial b : b \in S_{k+1}(M, \mathbb{R}) \} \quad (k\text{-bordes singulares}).$$

Ahora $\partial \circ \partial = 0 \implies \underline{B}_k(M, \mathbb{R}) \subseteq \underline{Z}_k(M, \mathbb{R})$. El espacio \mathbb{R} -vectorial cociente

$$\underline{H}_k(M, \mathbb{R}) := \underline{Z}_k(M, \mathbb{R}) / \underline{B}_k(M, \mathbb{R})$$

es la **homología singular real** en grado k de la variedad M .

Los espacios $S_k(M, \mathbb{R})$ y estos ∂ forma un *complejo* de espacios vectoriales:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} S_{k+1}(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} S_k(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} S_{k-1}(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} S_0(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} 0.$$

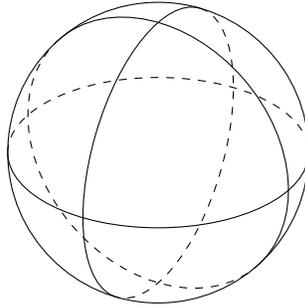


Figura 3.2: Una triangulación de la esfera S^2

En el Ejemplo 3.28, se indica cómo calcular la homología singular de la esfera S^2 . Con el ecuador y dos meridianos, se divide S^2 en 8 triángulos esféricos cuyos arcos fronterizos cancelan de dos en dos. Su suma formal es una cadena c sin borde, $\partial c = 0$, así que $c \in Z_2(S^2, \mathbb{R})$. Resulta que $B_2(S^2, \mathbb{R}) = \{0\}$ y entonces $[c] \neq 0$ en $H_2(S^2, \mathbb{R})$.

Este es el primer paso de un cálculo de la topología algebraica, que produce:

$$H_2(S^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad H_k(S^2, \mathbb{R}) = 0, \quad H_0(S^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

La Defn. 3.29 introduce la **integral** de una k -forma $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ sobre un k -símplice singular $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$ en una variedad diferencial M , por un sencillo pullback:

$$\int_{\sigma} \omega := \int_{\Delta^k} \sigma^* \omega. \tag{3.20a}$$

Si $\sigma^* \omega = g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$ en un vecindario de Δ^k , el lado derecho es

$$\int_{\Delta^k} \sigma^* \omega := \int_0^1 \int_0^{1-x^k} \dots \int_0^{1-x^2-\dots-x^k} g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^k. \tag{3.20b}$$

En seguida, se extiende la integral por \mathbb{R} -linealidad a cadenas singulares:

$$c = \sum_{i=1}^r a_i \sigma_i \implies \int_c \omega := \sum_{i=1}^r a_i \int_{\sigma_i} \omega.$$

La dificultad presente en esta clase de integrales no son las evaluaciones (3.20b), sino la identificación de unas cadenas singulares como dominios de integración.

En una superficie cerrada como S^2 , se busca un 2-ciclo c apropiado. Si $\dim M = n$, se trata de cubrir M por un n -ciclo conveniente. Este proceso se llama una *triangulación* de M . Es sabido que cada variedad diferencial compacta admite una triangulación.

El teorema de Stokes

En el cálculo de varias variables, se descubren varios teoremas nombrados por George Green, Carl Friedrich Gauss y George Gabriel Stokes. Hoy en día, el teorema que cubre todos estos casos se denomina el *teorema de Stokes* y se resume en la siguiente fórmula (Teorema 3.30):

$$\int_{\partial c} \eta = \int_c d\eta. \quad (3.21)$$

Aquí M es una variedad diferencial, los integrandos son $\eta \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$ y luego $d\eta \in \mathcal{A}^k(M)$, mientras las “regiones” son una k -cadena singular $c \in S_k(M, \mathbb{R})$ y su borde $\partial c \in S_{k-1}(M, \mathbb{R})$.

Entonces se trata de empatar una integral de grado $(k - 1)$ al lado izquierdo con una integral de grado k al lado derecho. El caso más básico, con $k = 1$, es el llamado *teorema fundamental del cálculo*, descubierto por Newton en 1666:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt.$$

De hecho, la prueba general de (3.21) se reduce al TFC, como ahora veremos.

En primer lugar, los dos lados de (3.21) son lineales en c ; luego, basta tomar $c = \sigma$, un k -símplice singular. Se debe mostrar que

$$\int_{\partial \Delta_k} \sigma^* \eta = \int_{\Delta_k} \sigma^*(d\eta) = \int_{\Delta_k} d(\sigma^* \eta). \quad (3.22)$$

En segundo lugar, las expresiones de (3.22) son lineales en η ; basta ver el caso donde $\sigma^* \eta$ tiene un solo sumando:

$$\sigma^* \eta = g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1}.$$

La derivada exterior de esta $(k - 1)$ -forma es la k -forma

$$\sigma^*(d\eta) = d(\sigma^* \eta) = \frac{\partial g}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^k) dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1}. \quad (3.23)$$

El primer sumando de la fórmula (3.16) para $\partial \Delta^k$ es

$$\Delta(e_1, \dots, e_k) = \{ (x^1, \dots, x^{k-1}, 1 - \sum_{j=1}^{k-1} x^j) : (x^1, \dots, x^{k-1}) \in \Delta^{k-1} \}.$$

La proyección de $\Delta(e_1, \dots, e_k)$ sobre el hiperplano $x^k = 0$ es Δ^{k-1} ; véase la Figura 3.4.

Las otras facetas de Δ^k quedan en los hiperplanos $x^j = 0$, para $j = 1, \dots, k$.

Ahora la demostración del caso básico del teorema de Stokes:

$$\int_{\Delta_k} \sigma^*(d\eta) = \int_{\partial\Delta_k} \sigma^*\eta$$

se reduce al siguiente cálculo explícito:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_k} \sigma^*(d\eta) &\stackrel{(3.23)}{=} \int_{\Delta_k} \frac{\partial g}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^k) dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \\ &\stackrel{(3.20)}{=} \int_0^1 \int_0^{1-x^1} \dots \int_0^{1-x^1-\dots-x^{k-1}} \frac{\partial g}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^k) dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \\ &\stackrel{(a)}{=} \int_{\Delta^{k-1}} (g(x^1, \dots, x^{k-1}, 1 - \sum_{j=1}^{k-1} x^j) - g(x^1, \dots, x^{k-1}, 0)) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \\ &\stackrel{(b)}{=} \int_{\Delta(e_1, \dots, e_k)} g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \\ &\quad - (-1)^{k-1} \int_{\Delta(e_1, \dots, e_{k-1}, 0)} g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \\ &\stackrel{(c)}{=} \int_{\partial\Delta_{k-1}} g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} = \int_{\partial\Delta_{k-1}} \sigma^*\eta. \end{aligned}$$

Las tres igualdades (a), (b), (c) se justifican como sigue:

- (a) Este es el teorema fundamental del cálculo, en la variable x^k .
- (b) Al ajustar el último argumento de la función g a x^k , el símplice Δ^{k-1} se muda en $\Delta(e_1, \dots, e_k)$ en el hiperplano $x^1 + \dots + x^k = 1$; y en el hiperplano $x^k = 0$ se permuta $\Delta^{k-1} = \Delta(0, e_1, \dots, e_{k-1})$ en $(-1)^{k-1}\Delta(e_1, \dots, e_{k-1}, 0)$.
- (c) Las integrales de $g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1}$ en los otros hiperplanos $x^1 = 0$, $x^2 = 0, \dots, x^{k-1} = 0$ son *nulas*, porque $x^j = 0 \implies dx^j = 0$. Entonces la cadena de integración es $\partial\Delta_{k-1}$, por (3.16).

Sobre la novena lista de ejercicios

Ejercicio 3.3 El espacio proyectivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ se obtiene de la esfera \mathbb{S}^{n-1} al identificar puntos antipodales. Esta variedad es orientable si y solo si su dimensión $(n-1)$ es impar. Eso se demuestra usando un pullback de formas de volumen sobre la esfera.

Ejercicio 3.4 Aquí se comprueba que la integral de una n -forma sobre una variedad orientada no depende de la partición de la unidad empleada para definirla.

Ejercicio 3.5 Si (M, ν) es una variedad orientada y conexa, se denota por $-M$ la misma variedad con la orientación opuesta. El paso de ν a $-\nu$ cambia el signo de la integral, y así se justifica la fórmula $\int_{-M} \omega = -\int_M \omega$ para cualquier n -forma ω sobre M .

3.5. Clase 19

Esta es la clase virtual del 19 de octubre del 2020. Su temática comprende la segunda parte de la sección §3.4: *El teorema de Stokes*.

Un par de teoremas clásicos

Una integral de línea de una función vectorial sobre una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se define mediante una parametrización explícita de γ :

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Este es equivalente a la definición de una 1-forma por pullback:

$$\int_{\gamma} F_j dx^j := \int_{[a,b]} \gamma^*(F_j dx^j).$$

El integrando es una 1-forma *exacta*, $F_j dx^j = dv$, si F posee una “función potencial” v , esto es, $F_j = \partial v / \partial x^j$ para cada j ; en cuyo caso, el TFC demuestra que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} dv = \int_{\partial\gamma} v = v(\gamma(b)) - v(\gamma(a)).$$

El Ejemplo 3.22 menciona la famosa fórmula atribuido a George Green:

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \quad (3.24)$$

Aquí R es una región del plano \mathbb{R}^2 y C es su *borde*, el cual es un 1-ciclo orientado con un sentido de recorrido específico, obtenido de una triangulación de R ; brevemente, $C := \partial R$. Si se define $\alpha := P dx + Q dy$, esta fórmula se reduce a la igualdad:

$$\int_{\partial R} \alpha = \int_R d\alpha.$$

Cohomología de de Rham

La derivación exterior $d: \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathcal{A}^{k+1}(M)$, con su propiedad $\underline{d \circ d = 0}$, define un *complejo de cocadenas*:

$$0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{n-1}(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^n(M) \xrightarrow{d} 0. \quad (3.25)$$

Esto es similar al complejo de cadenas singulares, pero “en la dirección contraria”. Aquí las k -formas cerradas son k -cociclos y las k -formas exactas son k -cobordes:

$$Z_{\text{dR}}^k(M) := \{ \omega \in \mathcal{A}^k(M) : d\omega = 0 \}, \quad B_{\text{dR}}^k(M) := \{ d\eta : \eta \in \mathcal{A}^{k-1}(M) \}.$$

La relación $d(d\eta) = 0$ dice que $B_{\text{dR}}^k(M) \subseteq Z_{\text{dR}}^k(M)$. Los espacios vectoriales cocientes forman la **cohomología de de Rham** de M :

$$H_{\text{dR}}^k(M) := Z_{\text{dR}}^k(M) / B_{\text{dR}}^k(M) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.26)$$

El teorema de Georges de Rham establece que esta cohomología es *isomorfo* al dual de la homología singular real, grado por grado:

$$H_{\text{dR}}^k(M) \simeq H_k(M, \mathbb{R})^* \quad \text{para cada } k = 0, 1, \dots, n.$$

La dualidad viene de la integración de k -formas sobre k -cadenas, limitado a la integración de k -formas cerradas sobre k -ciclos:

$$(c, \omega) \mapsto \int_c \omega : Z_k(M, \mathbb{R}) \times Z_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Si $c = \partial b$ o bien $\omega = d\eta$, el teorema de Stokes muestra que esta integral es 0. Entonces esta forma bilineal pasa al cociente:¹

$$([c], [\omega]) \mapsto \int_c \omega : H_k(M, \mathbb{R}) \times H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.27)$$

Para muchas variedades diferenciales, los espacios \mathbb{R} -vectoriales $H_{\text{dR}}^k(M)$ son finito-dimensionales. Sus dimensiones se llaman *números de Betti* de M :

$$b_k = b_k(M) := \dim_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^k(M) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.28)$$

Los $b_k = \dim H_k(M, \mathbb{R})$ son invariantes topológicos de M .

¹El teorema de de Rham consiste en mostrar que (3.27) es una forma bilineal *no degenerada*.

El Ejemplo 3.36 calcula los números de Betti del círculo \mathbb{S}^1 .

En primer lugar, una función suave $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $df = 0$ es *localmente constante*, luego constante porque \mathbb{S}^1 es conexo. Entonces $H_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1) = Z_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$ y $b_0 = 1$.

En segundo lugar, hay una 1-forma $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^1)$ que no se anula. En el círculo $x^2 + y^2 = 1$, se define

$$\alpha|_{\{x \neq 0\}} := \frac{1}{x} dy, \quad \alpha|_{\{y \neq 0\}} := -\frac{1}{y} dx,$$

notando que $\frac{dy}{x} + \frac{dx}{y} = \frac{d(x^2 + y^2)}{2xy} = 0$ aparte de $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$. Además, α no es exacta: si fuera $\alpha = dg$ con $g \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, sería $\alpha_p = (dg)_p = 0$ en el punto p donde g alcanza su máximo valor. Conclusión: $[\alpha] \neq 0$ en $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1)$.

Con la coordenada local θ , se ve que $\alpha = d\theta$. Con el uso de la integral sobre \mathbb{S}^1 , se establece que $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$. En fin, $b_0 = b_1 = 1$ para \mathbb{S}^1 .

Variedades con borde

El teorema de Stokes tiene una versión importante para *variedades con borde*. Estas están modeladas no sobre \mathbb{R}^n sino sobre el semiespacio cerrado

$$\mathbb{H}^n := \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}, \quad (3.29)$$

cuya frontera es el hiperplano $\{x^n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1}$.

El *borde* ∂M de una variedad con borde M es la parte (cerrada) de M dada por $x^n = 0$ en la preimagen de cualquier carta local. Este ∂M es una variedad "ordinaria" de dimensión $n - 1$.

Una variedad con borde es *orientable* si posee un atlas (modelado sobre \mathbb{H}^n) con jacobianos positivos para sus funciones de transición.

La Prop. 3.40 establece que una orientación sobre M induce una orientación compatible sobre ∂M .

El teorema de Stokes generalizado (Tma. 3.43) dice lo siguiente: si M es orientada y compacta y si $j: \partial M \hookrightarrow M$ es la inclusión, entonces para cada $\omega \in \mathcal{A}^{n-1}(M)$ esta fórmula es válida:

$$\int_{\partial M} j^* \omega = \int_M d\omega. \quad (3.31)$$

En particular, si M es una variedad orientada y compacta "ordinaria" (sin borde), entonces $\omega \in \mathcal{A}^{n-1}(M) \implies \int_M d\omega = 0$.

Sobre la décima lista de ejercicios

Ejercicios 3.6 y 3.7 Aquí se usa el teorema de Green para calcular áreas de regiones planas mediante integrales de línea.

Ejercicio 3.8 Los valores de una función armónica en una región plana dependen solamente de sus valores en la frontera de la región. En particular, una función armónica que se anula en la frontera es idénticamente cero en toda la región. Este teorema puede demostrarse de varias maneras (la propiedad de valor medio de funciones armónicas, la resolución de un problema de Dirichlet, etc.) – aquí se pide una demostración a partir del teorema de Stokes.

Ejercicio 3.10 El teorema de Stokes establece una relación entre la medida de una esfera y el volumen de la bola que la esfera encierra, en cualquier dimensión n . Combinado con un argumento de inducción sobre n , esto permite hallar la medida de la esfera en cualquier dimensión.

4 Comentarios sobre las clases de MA-870, parte 4

Este es un gui3n informal que acompa1a las clases “virtuales” de MA-870, *Geometría Diferencial*, en el segundo semestre del 2020, a causa de la suspensi3n de clases presenciales.

4.1. Clase 21

Esta es la clase virtual del 26 de octubre del 2020. Su temática comprende la secci3n §4.1: *Transporte paralelo y conexiones afines*.

Transporte paralelo y conexiones afines

Este capítulo introduce una familia de estructuras que no son puramente tensoriales; sin embargo, aportan informaci3n geométrica importante. Como ejemplo motivante, considérese la *derivada direccional* de un campo vectorial Y sobre \mathbb{R}^n en la direcci3n de otro campo vectorial X . Esta *no es* la derivada de Lie $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$. Si $Y = b^k \partial/\partial x^k \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, se puede poner

$$D_X Y := X(b^k) \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (4.1)$$

Es fácil comprobar que

$$D_{fX} Y = f D_X Y \quad \text{pero} \quad D_X(fY) = (Xf)Y + f D_X Y.$$

Debido al término $(Xf)Y$ en la segunda igualdad, la asignaci3n $(X, Y) \mapsto D_X Y$ *no es un tensor*, es decir, no es $C^\infty(M)$ -lineal en las dos variables.

La dificultad esencial es esta: para poder derivar el campo vectorial, es necesario Y comparar dos vectores $Y_p \in T_p M$ y $Y_q \in T_q M$, pero *no hay una manera can3nica* de identificar $T_p M$ con $T_q M$.

No obstante, si hubiera una familia de isomorfismos lineales (Defn. 4.1):

$$\Psi_{q,p}: T_p M \xrightarrow{\cong} T_q M, \quad \text{compatibles entre sí:} \quad \Psi_{r,p} = \Psi_{r,q} \circ \Psi_{q,p},$$

se podría comparar $\Psi_{p,q}(Y_q)$ con Y_p en el espacio tangente $T_p M$.

La tarea de buscar esta *regla de transporte paralelo* Ψ no tiene una soluci3n obvia. A veces se puede encontrar una regla parcial para los puntos de una curva $\gamma: I \rightarrow M$.

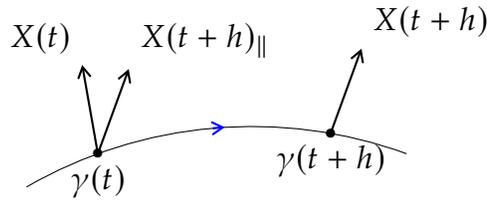


Figura 4.1: Transporte paralelo de vectores

Entonces se puede definir la derivada de $X(t) := X_{\gamma(t)}$ en $p = \gamma(t)$, como queda ilustrada en la Figura 4.1.

No es posible definir la “diferencia” $X(t+h) - X(t)$ porque los dos vectores $X(t)$, $X(t+h)$ pertenecen a espacios vectoriales diferentes. Pero si $X(t+h)_{||}$ es una “copia paralela” de $X(t+h)$ en el espacio tangente $T_{\gamma(t)}M$, se puede definir:

$$\frac{DX}{Dt}(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (X(t+h)_{||} - X(t)) \in T_{\gamma(t)}M. \tag{4.2}$$

Esta definición permite comprobar que $DX/Dt(t) \equiv 0$ para $t \in I$ si y solo si la función $t+h \mapsto X(t+h)_{||}$ es constante: el campo vectorial X es *paralelo a lo largo de γ* .

► Para formalizar estas ideas intuitivas, se introduce (Defn. 4.3) una **conexión afín** sobre M . Esta es una aplicación \mathbb{R} -bilineal

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

que cumple, para todo $f \in C^\infty(M)$,

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y, \quad \nabla_X (fY) = (Xf) Y + f \nabla_X Y, \tag{4.3}$$

análogamente a la derivada direccional $D_X Y$ en el caso $M = \mathbb{R}^n$.

Dada una conexión afín ∇ y una curva suave $\gamma : I \rightarrow M$, la fórmula (4.2) se simplifica en la **derivada covariante de X a lo largo de γ** , que se define como

$$\frac{DX}{Dt}(t) := \nabla_{\dot{\gamma}(t)} X. \tag{4.4}$$

Para apreciar las posibilidades para ∇ en coordenadas locales, abreviamos $\partial_j \equiv \partial/\partial x^j$. En una carta local (U, ϕ) , ∇ obedece

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n. \tag{4.6}$$

Las funciones $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$ son los **símbolos de Christoffel** de ∇ en la carta (U, ϕ) .

En otra carta local (V, ψ) , al abreviar $\tilde{\partial}_r \equiv \partial/\partial y^r$, se obtiene del mismo modo $\nabla_{\tilde{\partial}_r} \tilde{\partial}_s = \tilde{\Gamma}_{rs}^t \tilde{\partial}_t$. En la intersección $U \cap V$, la fórmula de cambio de variable es

$$\tilde{\Gamma}_{rs}^t = \frac{\partial x^i}{\partial y^r} \frac{\partial x^j}{\partial y^s} \frac{\partial y^t}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^r \partial y^s} \frac{\partial y^t}{\partial x^l} \tag{4.7}$$

Las derivadas de segundo orden señalan que los Γ_{ij}^k no son componentes de un tensor.

Sin embargo, si ∇' es otra conexión afín, resulta que $\nabla - \nabla'$ sí es un tensor – mixto, de bigrado $(2, 1)$ – porque las diferencias $C_{ij}^k := \Gamma_{ij}^k - \Gamma'_{ij}^k$ transforman así:

$$\tilde{C}_{rs}^t = \frac{\partial x^i}{\partial y^r} \frac{\partial x^j}{\partial y^s} \frac{\partial y^t}{\partial x^k} C_{ij}^k.$$

Conclusión: basta encontrar una sola conexión afín ∇' sobre M ; las otras están dadas por $\nabla := \nabla' + (\nabla - \nabla')$, al sumar un tensor apropiado a ∇' .

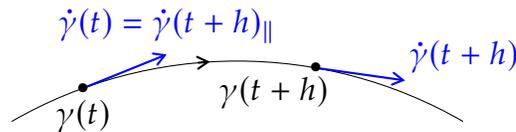


Figura 4.2: Una geodésica: los vectores $\dot{\gamma}(t)$ son paralelos a lo largo de γ

► Dada una conexión afín ∇ , una curva $\gamma: I \rightarrow M$ es una **geodésica** (con respecto a ∇) si es *paralela a la largo de sí misma*; esto es, si

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0. \tag{4.5}$$

La Prop. 4.6 muestra que los componentes locales $\gamma^k := x^k \circ \gamma$ de γ cumplen estas ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden:

$$\frac{d^2 \gamma^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} = 0. \tag{4.8}$$

Esto significa que las geodésicas $t \mapsto \gamma(t)$ están determinadas por sus posiciones y velocidades iniciales:

$$p = \gamma(0) \quad \text{y} \quad v = \dot{\gamma}(0),$$

al menos para $-\varepsilon < t < \varepsilon$ (intervalo de existencia y unicidad de las soluciones).

4.2. Clase 22

Esta es la clase virtual del 29 de octubre del 2020. Su temática comprende las secciones § 4.1: *Transporte paralelo y conexiones afines* y § 4.2: *Métricas riemannianas*.

Conexiones de Koszul

En la clase anterior, se introdujo el concepto de una conexión afín, la cual es una aplicación \mathbb{R} -bilineal ∇ sobre $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, con valores $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$. Este objeto es tensorial (o sea, $C^\infty(M)$ -lineal) en X , pero no en Y . Se expresa localmente mediante unos “símbolos de Christoffel” $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$, que transforman de una manera complicada bajo un cambio de cartas locales.

Para entenderlo mejor, es útil ampliar los horizontes mediante una generalización que reemplaza $Y \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(M, TM)$ por una sección suave $s \in \Gamma(M, E)$ de un fibrado vectorial más general que el fibrado tangente.

Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial sobre M . Una **conexión** sobre E es una aplicación

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E) : (X, s) \mapsto \nabla_X s$$

que cumple las propiedades análogas a una conexión afín:

$$\nabla_{fX} s = f \nabla_X s, \quad \nabla_X (fs) = (Xf) s + f \nabla_X s. \tag{4.9}$$

Esta generalización fue introducido por Jean-Louis Koszul (1921–2018) en su tesis doctoral (1950).

Un primer ejemplo emplea el *fibrado cotangente* $T^*M \xrightarrow{\pi} M$, cuyas secciones son 1-formas: $\mathcal{A}^1(M) = \Gamma(M, T^*M)$, Dada una conexión *afín* ∇ (la palabra “afín” es asociada al caso $E = TM$, ya visto), se define una **conexión dual**

$$\nabla' : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{A}^1(M) \rightarrow \mathcal{A}^1(M)$$

mediante la siguiente fórmula – que es una regla de Leibniz $\bullet\bullet$ – con $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$:

$$X(\langle \alpha, Y \rangle) =: \langle \nabla'_X \alpha, Y \rangle + \langle \alpha, \nabla_X Y \rangle. \tag{4.10}$$

Aquí $\langle \alpha, Y \rangle \equiv \alpha(Y) \in C^\infty(M)$; los tres términos son funciones en $C^\infty(M)$. Un cálculo fácil comprueba que

$$\nabla'_{fX} \alpha = f \nabla'_X \alpha, \quad \nabla'_X (f\alpha) = (Xf) \alpha + f \nabla'_X \alpha.$$

En coordenadas locales, debido a la relación $\langle dx^k, \partial_j \rangle \equiv \llbracket j = k \rrbracket$, la conexión dual ∇' usa los mismos símbolos de Christoffel que ∇ , con un cambio de signo:

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k \implies \nabla'_{\partial_i} dx^k = -\Gamma_{ij}^k dx^j. \quad (4.11)$$

► Otra notación que nos va a ser útil es la siguiente:

$$\mathcal{A}^k(M, E) \equiv \mathcal{A}^k(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(M, E). \quad (4.12)$$

Al lado derecho, se ve un *producto tensorial sobre $C^\infty(M)$* de dos $C^\infty(M)$ -módulos; se impone la regla: $f\omega \otimes s = \omega \otimes fs$ para cada $f \in C^\infty(M)$.

Los elementos de $\mathcal{A}^k(M, E)$ se llaman *k-formas con valores en E*.

\llbracket Como $\mathcal{A}^k(M) = \Gamma(M, \Lambda^k T^*M)$, ellas son secciones de un fibrado vectorial con fibras $\Lambda^k T_p^*M \otimes E_p$, usando un producto tensorial ordinario. \rrbracket

Esta notación permite “eliminar la X ”, resultando una aplicación \mathbb{R} -lineal

$$\nabla: \Gamma(M, E) \rightarrow \mathcal{A}^1(M, E) : s \mapsto \nabla s.$$

Como $Xf = df(X)$, su regla de Leibniz es:

$$\nabla_X(fs) = (Xf)s + f \nabla_X s \text{ para } X \in \mathfrak{X}(M) \implies \nabla(fs) = df \otimes s + f \nabla s. \quad (4.13)$$

Métricas riemannianas

Otra estructura geométrica sobre M (que tiene una conexión afín asociada, como veremos) es la de una **métrica riemanniana**. Esta es un *2-tensor covariante, simétrica y definida positiva*:

$$g: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

tal que

$$g(X, Y) = g(Y, X), \quad \text{con } g(X, X) \geq 0 \text{ para } X \in \mathfrak{X}(M)$$

y $g(X, X) = 0$ en $C^\infty(M)$ solo si $X = 0$ en $\mathfrak{X}(M)$.

Como g es un tensor (esto es, $C^\infty(M)$ -bilineal), tiene valores puntuales:

$$g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definido por } g_p(X_p, Y_p) := g(X, Y)(p). \quad (4.14)$$

Cada g_p es un *producto escalar real* sobre $T_p M$.

En cada punto $p \in M$, este producto escalar determina un isomorfismo lineal $T_p M \simeq T_p^* M$ por la receta usual.

Globalmente, g define un isomorfismo de $C^\infty(M)$ -módulos entre $\mathfrak{X}(M)$ y $\mathcal{A}^1(M)$.

► Esta correspondencia se exhibe en dos *isomorfismos musicales*:

$$X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto X^b \in \mathcal{A}^1(M), \quad \alpha \in \mathcal{A}^1(M) \mapsto \alpha^\sharp \in \mathfrak{X}(M),$$

definidas por las recetas recíprocas:

$$X^b(Y) := g(X, Y), \quad g(\alpha^\sharp, Y) := \alpha(Y). \quad (4.15)$$

Debe ser evidente que $(X^b)^\sharp = X$ y $(\alpha^\sharp)^b = \alpha$.

Otra manera de usar estos isomorfismos es la de convertir el 2-tensor covariante g en un 2-tensor *contravariante*, apodado $g^{-1}: \mathcal{A}^1(M) \times \mathcal{A}^1(M) \rightarrow C^\infty(M)$, así:

$$g^{-1}(\alpha, \beta) := g(\alpha^\sharp, \beta^\sharp).$$

Por qué g^{-1} ? En un carta local (U, ϕ) , $g|_U$ se expresa con una matriz invertible de funciones $[g_{ij}]$; y $g^{-1}|_U$ tiene otra matriz $[g^{rs}]$. Ambas matrices se definen así:

$$g_{ij} := g(\partial_i, \partial_j); \quad g^{rs} := g^{-1}(dx^r, dx^s). \quad (4.16)$$

No es difícil comprobar que $[g^{rs}]$ es la matriz inversa de $[g_{ij}]$.

Las fórmulas locales generales para g y g^{-1} son:

$$g(f^i \partial_i, h^j \partial_j) = g_{ij} f^i h^j, \quad g^{-1}(a_r dx^r, b_s dx^s) = g^{rs} a_r b_s.$$

Sobre la undécima lista de ejercicios

Ejercicio 4.1 Una conexión afín determina el transporte paralelo a lo largo de una curva a través de soluciones (únicas) de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejercicio 4.3 Una función exponencial $\gamma(t) = e^{at}$ es una geodésica en la variedad $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Se pide comprobar que esta es la solución única de una ecuación geodésica asociada a una cierta conexión afín sobre \mathbb{R}^+ .

Ejercicio 4.4 La derivada direccional ordinaria es una conexión afín en \mathbb{R}^3 . Sobre una superficie regular en \mathbb{R}^3 , se obtiene una conexión afín al proyectar esa derivada direccional sobre sus planos tangentes.

Ejercicio 4.5 Se requiere identificar las geodésicas posibles sobre el cilindro recto circular $x^2 + y^2 = 1$, que es una superficie regular en \mathbb{R}^3 . Dependiendo de su vector de velocidad inicial, estas geodésicas pueden ser rectas, círculos o hélices.

4.3. Clase 23

Esta es la clase virtual del 2 de noviembre del 2020. Su temática comprende la sección § 4.2: *Métricas riemannianas*.

Conexiones de Levi-Civita

Hay una conexión afín particular asociada a una métrica riemanniana, determinada por dos condiciones extras: compatibilidad con la métrica y ausencia de torsión. Vamos a examinar esas dos condiciones para luego comprobar que la conexión que las satisface existe y es única.

Una **isometría** entre dos variedades riemannianas (M, g) y (N, h) es un difeomorfismo $\tau: M \rightarrow N$ tal que $\tau^*h = g$; o sea, $h(\tau_*X, \tau_*Y) = g(X, Y)$ si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Se dice que una conexión afín ∇ sobre M es *compatible con la métrica* g si su transporte paralelo (a lo largo de curvas en M) es isométrico. Como ∇ determina el transporte paralelo a través de ciertas ecuaciones diferenciales (Ejercicio 4.1) se puede mostrar (en un ejercicio futuro) que esta condición se reduce a

$$\dot{\gamma}(t)(g(X, Y)) = g(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}X, Y) + g(X, \nabla_{\dot{\gamma}(t)}Y)$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\gamma: I \rightarrow M$ una curva suave cualquiera en M . Luego se puede reemplazar los vectores tangentes $\dot{\gamma}(t)$ por $Z_p \in T_pM$ donde $p = \gamma(t)$; y se llega a la siguiente definición de compatibilidad:

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \quad (4.17)$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

La **torsión** de una conexión afín ∇ es la siguiente cantidad:

$$T_{\nabla}(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \quad (4.18)$$

Aquí $T_{\nabla}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ resulta ser un 2-tensor antisimétrico. Para comprobar que T_{∇} es efectivamente $C^\infty(M)$ -bilineal, basta hacer el cálculo siguiente:

$$\begin{aligned} T_{\nabla}(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y(fX) - [fX, Y] \\ &= f \nabla_X Y - (Yf)X - f \nabla_Y X - f[X, Y] + (Yf)X \\ &= f T_{\nabla}(X, Y), \end{aligned}$$

donde se ha empleado una fórmula ya vista: $[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X$.

[[Por cierto, esta fórmula es sinónima a $\mathcal{L}_Y(fX) = \mathcal{L}_Y(f)X + f\mathcal{L}_Y(X)$.]]

Entonces ∇ es *libre de torsión* si $T_\nabla(X, Y) = 0$, esto es,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

En coordenadas locales, esto dice que

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k = [\partial_i, \partial_j] = 0$$

para cada i, j, k . La ausencia de torsión significa que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

► La Prop. 4.14 muestra que hay una única condición afín ∇^g sobre (M, g) que cumple estos dos requisitos: esta es la **conexión de Levi-Civita** asociada a la métrica g .

Primero la *unicidad*: la compatibilidad con la métrica (4.17) se escribe tres veces:

$$\begin{aligned} Z g(X, Y) &= g(\nabla_Z^g X, Y) + g(X, \nabla_Z^g Y), \\ Y g(Z, X) &= g(\nabla_Y^g Z, X) + g(Z, \nabla_Y^g X), \\ X g(Y, Z) &= g(\nabla_X^g Y, Z) + g(Y, \nabla_X^g Z). \end{aligned}$$

Al sumar el segundo y el tercero y al restar el primero, queda:

$$\begin{aligned} X g(Y, Z) + Y g(Z, X) - Z g(X, Y) \\ &= g(\nabla_Y^g Z - \nabla_Z^g Y, X) + g(\nabla_X^g Z - \nabla_Z^g X, Y) + g(\nabla_X^g Y + \nabla_Y^g X, Z) \\ &= g([Y, Z], X) + g([X, Z], Y) - g([X, Y], Z) + 2g(\nabla_X^g Y, Z). \end{aligned} \quad (4.19)$$

En la segunda igualdad, se empleó la libertad de torsión (tres veces).

Nótese que ∇^g solo aparece en el último término. Al despejar $g(\nabla_X^g Y, Z)$, queda:

$$\frac{1}{2} \{ X g(Y, Z) + Y g(Z, X) - Z g(X, Y) - g([Y, Z], X) - g([X, Z], Y) + g([X, Y], Z) \}.$$

Esta expresión es $C^\infty(M)$ -lineal en Z – y así determina $\nabla_X^g Y$.

Para la existencia, el Ejercicio 4.6 pide verificar que esta expresión es también $C^\infty(M)$ -lineal en X y obedece una regla de Leibniz en Y : luego, ∇^g es una conexión afín. También se puede chequear que esta ∇^g es libre de torsión y compatible con g .

En coordenadas locales, los componentes g_{ij} de la métrica deben determinar los símbolos de Christoffel de ∇ . El Lema 4.16 ofrece la fórmula buscada:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \quad (4.21)$$

► El Ejemplo 4.17 calcula un caso importante: la esfera \mathbb{S}^2 con su *métrica redonda*. En coordenadas esféricas, esta métrica es

$$g = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Estas coordenadas locales (θ, ϕ) excluyen los polos $N = e_3$ y $S = -e_3$ de \mathbb{S}^2 . Pero se puede usar el atlas $\{(U, (x, y)), (V, (u, v))\}$, con $U := \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ y $V := \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$. Hay coordenadas locales

$$(x, y) := \left(\frac{x^1}{1-x^3}, \frac{-x^2}{1-x^3} \right), \quad (u, v) := \left(\frac{x^1}{1+x^3}, \frac{x^2}{1+x^3} \right).$$

(El jacobiano de la transición es positivo en $U \cap V$.)

En estas coordenadas locales, se obtiene

$$g = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1+u^2+v^2)^2}. \quad (4.22)$$

En la carta $(U, (x, y))$, abreviemos $q := 1 + x^2 + y^2$. Entonces

$$g = 4q^{-2}(dx^2 + dy^2), \quad g_{ij} = 4q^{-2} \delta_{ij}, \quad g^{kl} = \frac{1}{4}q^2 \delta^{kl}.$$

Si se redefine $(x^1, x^2) \equiv (x, y)$, se obtiene $\partial_l g_{ij} = -16x^l q^{-3} \delta_{ij}$. De ahí, se obtiene:

$$\Gamma_{ij}^k = -\frac{2}{q}(x^i \delta_j^k + x^j \delta_i^k - x^k \delta_{ij}). \quad (4.23)$$

Solo falta reexpresar Γ_{ij}^k en coordenadas esféricas: un ejercicio futuro.

4.4. Clase 24

Esta es la clase virtual del 5 de noviembre del 2020. Su temática comprende las secciones § 4.2: *Métricas riemannianas* y § 4.3: *Tensor de curvatura*.

Bases ortonormales locales

En cada punto $p \in M$, los productos escalares g_p sobre $T_p M$ y g_p^{-1} sobre $T_p^* M$ definen una noción de *ortogonalidad* para vectores tangentes o covectores, respectivamente. No siempre se puede definir ortogonalidad para campos vectoriales o 1-formas de manera “global”, pero sí es posible hablar de esas nociones en una carta local.

Una *base ortonormal local de campos vectoriales* es una familia $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathfrak{X}(U)$ con $g(E_\mu, E_\nu) \equiv \delta_{\mu\nu}$ sobre U .

Una *base ortonormal local de 1-formas* es otra familia $\{\theta^1, \dots, \theta^n\} \subset \mathcal{A}^1(U)$ con $g^{-1}(\theta^\mu, \theta^\nu) \equiv \delta^{\mu\nu}$ sobre U .

Cómo se construyen estas bases ortonormales? Se podría aplicar el algoritmo de Gram y Schmidt a las bases locales $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ de $\mathfrak{X}(U)$ y $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ de $\mathcal{A}^1(U)$. Algo más eficiente es encontrar una “raíz cuadrada” de la matriz $G = [g_{ij}]$ de g .

Se trata de buscar una matriz simétrica invertible H tal que $H^2 = G$: se sabe que G es definida positiva. También será $H^{-2} = G^{-1}$. Si $H = [h_j^\beta]$ y $H^{-1} = [\tilde{h}_\alpha^r]$, entonces

$$h_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} h_j^\beta = g_{ij}, \quad \tilde{h}_\alpha^r \delta^{\alpha\beta} \tilde{h}_\beta^s = g^{rs}.$$

Como $H^{-1}GH^{-1} = 1$ y $HG^{-1}H = 1$, hay fórmulas inversas:

$$\tilde{h}_\mu^i g_{ij} \tilde{h}_\nu^j = \delta_{\mu\nu}, \quad h_r^\mu g^{rs} h_s^\nu = \delta^{\mu\nu}.$$

Las campos y 1-formas locales ortogonales se definen así:

$$\underline{E_\mu} := \tilde{h}_\mu^i \partial_i, \quad \underline{\theta^\nu} := h_s^\nu dx^s. \tag{4.24}$$

Se ve que

$$g(E_\mu, E_\nu) = g(\tilde{h}_\mu^i \partial_i, \tilde{h}_\nu^j \partial_j) = \tilde{h}_\mu^i g(\partial_i, \partial_j) \tilde{h}_\nu^j = \tilde{h}_\mu^i g_{ij} \tilde{h}_\nu^j = \delta_{\mu\nu}.$$

Ejemplo 4.19: en $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, la métrica de \mathbb{S}^2 tiene matriz diagonal:

$$g_{ij} = 4q^{-2} \delta_{ij} \implies h_j^\beta := 2q^{-1} \delta_j^\beta, \quad \tilde{h}_\alpha^r := \frac{1}{2}q \delta_\alpha^r.$$

Las bases ortonormales locales en $U \subset \mathbb{S}^2$ son, con $q := 1 + x^2 + y^2$:

$$E_1 := \frac{q}{2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad E_2 := \frac{q}{2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{y} \quad \theta^1 := \frac{2}{q} dx, \quad \theta^2 := \frac{2}{q} dy.$$

► Si (M, g) es orientable, hay una forma de volumen v_g dada por

$$v_g|_U := \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^n.$$

De (4.24) sale $v_g|_U = \det[h_s^\nu] dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$; como $H^2 = G$ y $\det g := \det[g_{ij}] > 0$, se deduce la forma de volumen riemanniana:

$$v_g|_U = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \tag{4.25}$$

Ejemplo: la forma de área de la esfera \mathbb{S}^2 es

$$\sigma = \theta^1 \wedge \theta^2 = 4q^{-2} dx \wedge dy = \sin \theta d\theta \wedge d\phi.$$

Tensores de curvatura

Antes de abordar el tema de curvatura, un poco más de notación.

Si $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial, los endomorfismos de cada fibra son fibras de un “fibrado matricial” $\text{End } E \xrightarrow{\Pi} M$. Esto dice que $(\text{End } E)_p := \text{End}_{\mathbb{R}}(E_p)$ para $p \in M$.

Si E tiene fibra típica $F \simeq \mathbb{R}^k$, la fibra típica de $\text{End } E$ es $\text{End}_{\mathbb{R}} F \simeq M_k(\mathbb{R})$.

Las secciones $A \in \Gamma(M, \text{End } E)$ actúan sobre $\Gamma(M, E)$ “por fibras”: $(As)_p := A_p(s_p)$.

$\Gamma(M, \text{End } TM)$ actúa sobre los campos vectoriales $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(M, TM)$.

► Dada una conexión afín ∇ sobre M , se define $R = R_{\nabla}$ como el operador

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (4.26)$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Lema 4.22: esta expresión es $C^\infty(M)$ -trilineal.

En efecto, se verifica $R(fX, Y)Z = f R(X, Y)Z$ por cálculos ya vistos; y se nota que $R(Y, X)Z = -R(X, Y)Z$. La $C^\infty(M)$ -linealidad en Z es más interesante:

$$\begin{aligned} R(X, Y)(hZ) &= \nabla_X((Yh)Z + h\nabla_Y Z) - \nabla_Y((Xh)Z + h\nabla_X Z) - [X, Y](h)Z - h\nabla_{[X, Y]}Z \\ &= X(Yh)Z + (Yh)\nabla_X Z + (Xh)\nabla_Y Z + h\nabla_X \nabla_Y Z - [X, Y](h)Z \\ &\quad - Y(Xh)Z - (Xh)\nabla_Y Z - (Yh)\nabla_X Z - h\nabla_Y \nabla_X Z - h\nabla_{[X, Y]}Z \\ &= h\nabla_X \nabla_Y Z - h\nabla_Y \nabla_X Z - h\nabla_{[X, Y]}Z + \{X(Yh) - Y(Xh) - [X, Y](h)\}Z \\ &= hR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Se puede reemplazar $Z \in \mathfrak{X}(M)$ por $s \in \Gamma(M, E)$ y definir un operador $R(X, Y) \in \Gamma(M, \text{End } E)$ por la misma fórmula (4.26):

$$R(X, Y)s := \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s. \quad (4.28)$$

Como R es tensorial y antisimétrico en (X, Y) , es una *2-forma con valores en $\text{End } E$* , esto es, $R \in \mathcal{A}^2(M, \text{End } E)$.

► Cuando $\nabla = \nabla^g$ es la conexión de Levi-Civita para g , este $R \in \mathcal{A}^2(M, \text{End } TM)$ es la **curvatura riemanniana** de (M, g) .

La curvatura riemanniana tiene diversas simetrías. El primer de ellos es la antisimetría en $X \leftrightarrow Y$, ya notado:

$$R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0.$$

La segunda simetría, Prop. 4.25(b), es válida para cualquier conexión afín libre de torsión. Esta es la **identidad de Bianchi**:

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0. \quad (4.29c)$$

Para mostrarla, primero se debe notar que

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_X [Y, Z] = \nabla_X (T_{\nabla}(Y, Z)) = 0.$$

Al sumar tres copias de esta relación, se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z \nabla_Y X \\ - \nabla_X [Y, Z] - \nabla_Y [Z, X] - \nabla_Z [X, Y] = 0. \end{aligned}$$

Al enchufar la definición (4.26) de $R(X, Y)Z$, esto es

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + \nabla_{[X, Y]} Z + R(Y, Z)X + \nabla_{[Y, Z]} X + R(Z, X)Y + \nabla_{[Z, X]} Y \\ - \nabla_X [Y, Z] - \nabla_Y [Z, X] - \nabla_Z [X, Y] = 0. \end{aligned}$$

Ahora $T_{\nabla} = 0$ implica que $\nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_Z [X, Y] = [[X, Y], Z]$. La expresión anterior se convierte en:

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y + [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

La identidad de Jacobi elimina los últimos tres términos, dejando (4.29c).

4.5. Clase 25

Esta es la clase virtual del 9 de noviembre del 2020. Su temática comprende las secciones § 4.3: *Tensores de curvatura* y § 4.4: *Fibrados principales y formas de conexión*.

Curvatura riemanniana

En la clase pasada se discutieron dos simetrías del tensor de curvatura $R = R_{\nabla}$ asociada a una conexión afín ∇ sobre M : (a) la antisimetría $R(Y, X) = -R(X, Y)$, válida para ∇ cualquiera; y (b) la identidad de Bianchi, válida para conexiones con $T_{\nabla} = 0$.

Si $\nabla = \nabla^g$ es la *conexión de Levi-Civita* para una variedad riemanniana (M, g) , hay dos simetrías más, en términos del 4-tensor covariante con valores $g(R(X, Y)Z, W)$. La tercera simetría es:

$$g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z),$$

esto es, antisimetría bajo el cambio $Z \leftrightarrow W$.

Esto es equivalente a demostrar que $g(R(X, Y)Z, Z) = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Si se pone $h := g(Z, Z)$, se ve que

$$Xh = X g(Z, Z) = g(\nabla_X^g Z, Z) + g(Z, \nabla_X^g Z) = 2 g(\nabla_X^g Z, Z)$$

porque ∇^g es compatible con g . El resto es un cálculo:

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, Z) &:= g(\nabla_X^g \nabla_Y^g Z, Z) - g(\nabla_Y^g \nabla_X^g Z, Z) - g(\nabla_{[X, Y]}^g Z, Z) \\ &= X g(\nabla_Y^g Z, Z) - g(\nabla_Y^g Z, \nabla_X^g Z) - Y g(\nabla_X^g Z, Z) + g(\nabla_X^g Z, \nabla_Y^g Z) - \frac{1}{2}[X, Y](h) \\ &= X g(\nabla_Y^g Z, Z) - Y g(\nabla_X^g Z, Z) - \frac{1}{2}[X, Y](h) \\ &= \frac{1}{2}X(Yh) - \frac{1}{2}Y(Xh) - \frac{1}{2}[X, Y](h) = 0 \end{aligned}$$

basado también en la compatibilidad de ∇^g con g .

La cuarta simetría es invariante bajo cambio de pares $(X, Y) \leftrightarrow (Z, W)$, así:

$$g(R(X, Y)W, Z) = g(R(W, Z)X, Y).$$

Para ello, se combinan astutamente las tres simetrías anteriores: véase la demostración de la Prop. 4.24.

► Consideremos ahora *los componentes del tensor R en coordenadas locales*. Para una conexión afín cualquiera, se define, en una carta local:

$$R_{jkl}^i := \langle dx^i, R(\partial_k, \partial_l) \partial_j \rangle. \quad (4.31)$$

De la definición de R y la fórmula $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$, se obtiene:

$$R_{jkl}^i = \partial_k \Gamma_{jl}^i - \partial_l \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mk}^i - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{ml}^i. \quad (4.32)$$

En el caso de una conexión de Levi-Civita, se puede usar la métrica $g = [g_{ij}]$ para *bajar el índice superior* y obtener la curvatura riemanniana como tensor covariante:

$$R_{ijkl} := g_{im} R_{jkl}^m = g(\partial_i, R(\partial_k, \partial_l) \partial_j). \quad (4.33)$$

Las simetrías de R se expresan mediante tres fórmulas en estos componentes:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= -R_{jikl} = -R_{ijlk}, \\ R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} &= 0, \\ R_{ijkl} &= R_{klij}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Debido a las simetrías, el número de componentes independientes es mucho menor que n^4 (si $\dim M = n$). Resulta que esta cantidad es $n^2(n^2 - 1)/12$. Para $n = 2, 3, 4$, el número de componentes es 1, 6, 20, respectivamente. En particular, cuando $n = 2$, R está determinada por su componente R_{1212} .

► El 4-tensor covariante R da lugar a otros tensores por contracción (suma sobre índices iguales). El primero es el **tensor de Ricci**:

$$R_{jl} \equiv \text{Ric}_{jl} := R^k_{jkl}, \tag{4.35}$$

que resulta ser un 2-tensor simétrico: $R_{lj} = R_{jl}$. Una segunda contracción da lugar a la **curvatura escalar** $S \in C^\infty(M)$:

$$S := g^{jl} R_{jl} = g^{jl} g^{km} R_{mjkl}. \tag{4.36}$$

Algunas variedades especiales tienen *curvatura escalar constante*. Para $n \geq 3$, los cálculos son engorrosos; pero para $n = 2$, se puede determinar *superficies* de curvatura escalar constante. Para \mathbb{R}^2 con su métrica euclidiana ($g_{11} = g_{22} = 1, g_{12} = 0$), cada $\Gamma^k_{ij} \equiv 0$ y $S \equiv 0$.

La Prop. 4.27 muestra que para $M = \mathbb{S}^2$, vale $S \equiv 2$. [En la carta $(U, (x, y))$ ya vista, se calcula que $R_{1212} = 16/q^4$.]

En el Ejercicio 4.9, se comprueba que en el plano hiperbólico $M = \mathbb{H}^2$ vale $S \equiv -2$.

Fibrados de marcos locales

Un punto de vista alternativo sobre conexiones y curvatura sale de los trabajos de clasificación de Élie Cartan en los años 1930s. Su herramienta principal fue su *repère mobile* – un marco de referencia móvil.

En lenguaje moderno, un **marco local** es una base local de campos vectoriales $\{X_1, \dots, X_n\} \subset \mathfrak{X}(U)$, definidos en una carta local (U, ϕ) de M . Sus valores en cada punto $p \in U$ deben formar una base vectorial del espacio tangente $T_p M$.

Al poner $u(e_i) := (X_i)_p$, se obtiene un *isomorfismo lineal* $u : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ – y viceversa. Tales u constituyen la *fibra* $\mathcal{F}_p M$ en p de un **fibrado de marcos** $\mathcal{F}M \xrightarrow{\sigma} M$. Su fibra típica es el grupo de Lie $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ de matrices $n \times n$ invertibles.

El grupo de Lie G actúa (a la derecha) sobre la fibra $\mathcal{F}_p M$ por composición:

$$u \mapsto u \circ A : \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{u} T_p M.$$

Esta acción es libre y transitiva. En resumen, $\mathcal{F}M \xrightarrow{\sigma} M$ es un *fibrado principal* con grupo de estructura G .

Las ecuaciones de estructura de Cartan

Dado un marco local $\{X_1, \dots, X_n\}$ para $\mathfrak{X}(U)$ y una conexión afín ∇ sobre M , se puede expresar $X \in \mathfrak{X}(M)$ y las derivadas direccionales $\nabla_X(X_j)$ localmente en U mediante *ciertas 1-formas locales*:

$$X|_U =: \underline{\theta^i(X)} X_i, \quad \nabla_X(X_j) =: \underline{\omega_j^i(X)} X_i \quad \text{con } \theta^i, \omega_j^i \in \mathcal{A}^1(U). \quad (4.37)$$

Del mismo modo, se puede expresar la torsión T_∇ y la curvatura R_∇ localmente en U mediante *ciertas 2-formas locales*:

$$T_\nabla(X, Y)|_U =: \underline{\tau^i(X, Y)} X_i, \quad R_\nabla(X, Y) X_j =: \underline{\Omega_j^i(X, Y)} X_i; \quad \tau^i, \Omega_j^i \in \mathcal{A}^2(U). \quad (4.38)$$

El Teorema 4.31 establece que estas formas locales están ligadas mediante unas *ecuaciones de estructura*:

$$\begin{aligned} \tau^i &= d\theta^i + \omega_j^i \wedge \theta^j, \\ \Omega_j^i &= d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Se verá la demostración de estas fórmulas en la próxima clase.

Sobre la duodécima lista de ejercicios

Ejercicio 4.6 Aquí se verifica en detalle que la fórmula para la conexión de Levi-Civita es efectivamente una conexión libre de torsión y compatible con la métrica riemanniana.

Ejercicios 4.7 y 4.9 Se pide calcular símbolos de Christoffel para la esfera S^2 y el plano hiperbólico H^2 ; y en el segundo caso, establecer que la curvatura escalar es constante (y negativa).

Ejercicio 4.10 Si una variedad M está encajada en \mathbb{R}^n , la métrica euclidiana de \mathbb{R}^n induce una métrica riemanniana sobre M .

Ejercicio 4.11 Para la esfera unitaria S^2 , encajada en \mathbb{R}^3 , se investiga una base ortonormal de campos vectoriales y la curvatura riemanniana de esa esfera.

4.6. Clase 26

Esta es la clase virtual del 12 de noviembre del 2020. Su temática comprende la sección § 4.4: *Fibrados principales y formas de conexión*.

Las ecuaciones de estructura de Cartan

Las ecuaciones de estructura (4.39) se demuestran por cálculos directos. En ambos casos se trata de establecer la igualdad de un par de 2-formas, al evaluarlos en un par de campos vectoriales (X, Y) . El primer cálculo es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \tau^i(X, Y) X_i &= T_{\nabla}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\
 &= \nabla_X(\theta^j(Y) X_j) - \nabla_Y(\theta^j(X) X_j) - \theta^j([X, Y]) X_j \\
 &= \{X(\theta^j(Y)) - Y(\theta^j(X)) - \theta^j([X, Y])\} X_j + \theta^j(Y) \nabla_X(X_j) - \theta^j(X) \nabla_Y(X_j) \\
 &= d\theta^j(X, Y) X_j + \theta^j(Y) \omega_j^i(X) X_i - \theta^j(X) \omega_j^i(Y) X_i \\
 &= \{d\theta^i(X, Y) + \omega_j^i(X) \theta^j(Y) - \omega_j^i(Y) \theta^j(X)\} X_i \\
 &= \{d\theta^i(X, Y) + \omega_j^i \wedge \theta^j(X, Y)\} X_i
 \end{aligned}$$

En cada línea del cálculo se aplica una identidad conocida:

- ◇ las definiciones de τ^i , (4.38), y de la torsión T_{∇} ;
- ◇ la definición (4.37) de θ^i para expandir campos en la base local de los X_j ;
- ◇ la regla de Leibniz para ∇ (dos veces);
- ◇ la fórmula general (2.31) para $d\theta^j$;
- ◇ una agrupación del coeficiente total de X_i ;
- ◇ la definición $\omega_j^i \wedge \theta^j = \omega_j^i \otimes \theta^j - \theta^j \otimes \omega_j^i$ de un producto exterior de 1-formas.

La independencia lineal de los $(X_i)_p$ en cada punto p muestra que los coeficientes de cada X_i coinciden.

Un cálculo paralelo muestra que $\Omega_j^i(X, Y) = (d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k)(X, Y)$ para todo X, Y .

Los índices en las fórmulas (4.39) señalan que los θ^i y los τ^i se pueden agrupar en *vectores columna de formas*:

$$\theta := [\theta^i] \in \mathcal{A}^1(U, \mathbb{R}^n), \quad \tau := [\tau^i] \in \mathcal{A}^2(U, \mathbb{R}^n).$$

De igual modo, los ω_j^i y Ω_j^i son entradas de ciertas *matrices de formas*: si $\mathfrak{g} = M_n(\mathbb{R})$, se obtiene

$$\omega := [\omega_j^i] \in \mathcal{A}^1(U, \mathfrak{g}), \quad \Omega := [\Omega_j^i] \in \mathcal{A}^2(U, \mathfrak{g}).$$

Con estas notaciones, las ecuaciones de estructura de Cartan se pueden escribir de una manera compacta:

$$\tau = d\theta + \omega \wedge \theta, \quad \Omega = d\omega + \omega \wedge \omega. \quad (4.40)$$

Fibrados principales

Para poder “globalizar” las fórmulas locales (4.39) o (4.40), es necesario introducir una herramienta más: un **fibrado principal**. Según la Defn. 4.32, esto es un fibrado $P \xrightarrow{\sigma} M$ donde la fibra típica es un grupo de Lie G (el *grupo de estructura*) que actúa libremente sobre P a la derecha, de tal manera que sus órbitas son las fibras mismas: $P_{\sigma(u)} = \{ u \triangleleft g : g \in G \}$.

Un caso es fibrado principal *trivial*: $P = M \times G$, cuya acción a derecha es simplemente $(p, g) \triangleleft h := (p, gh)$. En el caso general, se exige que las trivializaciones locales $\psi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times G$ sean *equivariantes*: $\psi_j(u \triangleleft h) = \psi_j(u) \triangleleft h$ para $u \in U_j, h \in G$.

El fibrado de marcos $\mathcal{F}(M) \xrightarrow{\sigma} M$ de la clase anterior es un fibrado principal: su grupo de estructura es $G = GL(n, \mathbb{R})$.

La construcción del fibrado de marcos se basa en hallar bases locales para secciones del fibrado tangente $TM \xrightarrow{\tau} M$. Se puede hacer lo mismo para cualquier *fibrado vectorial* $E \xrightarrow{\pi} M$. Hay un fibrado de marcos $\mathcal{F}(E) \xrightarrow{\sigma} M$, en la Defn. 4.33, cuyas fibras $\mathcal{F}(E_p)$ son bases vectoriales para E_p , o mejor: *isomorfismos lineales* $u_p : \mathbb{R}^k \rightarrow E_p$. (Aquí $k = \dim E_p$ es el rango del fibrado vectorial.) Se define:

$$\mathcal{F}(E) := \{ u = (p, u_p) : p \in M, u_p \in \mathcal{F}(E_p) \}, \quad \sigma(u) := p. \quad (4.41)$$

La Defn. 4.34 introduce una acción *a izquierda* del grupo $GL(k, \mathbb{R})$ sobre $\mathcal{F}(E) \times \mathbb{R}^k$ por la fórmula:

$$A \triangleright (u, x) := (u \circ A^{-1}, Ax) \quad \text{para } A \in GL(k, \mathbb{R}). \quad (4.42)$$

Las órbitas de esta acción son clases de equivalencia $[u, x]$ con $u \in \mathcal{F}(E), x \in \mathbb{R}^k$, que cumplen la relación

$$[u \circ A, x] = [u, Ax] \quad \text{para cada } A \in GL(k, \mathbb{R}).$$

El conjunto cociente se denota por $\mathcal{F}(E) \times_G \mathbb{R}^k$, un *producto fibrado*. Al definir (bien) $\bar{\sigma}([u, x]) := \sigma(u) \in M$, se obtiene un fibrado vectorial $\mathcal{F}(E) \times_G \mathbb{R}^k \xrightarrow{\bar{\sigma}} M$ que es isomorfo al fibrado vectorial original $E \xrightarrow{\pi} M$.

Una variante importante del fibrado de marcos (el caso $E = TM$) ocurre cuando (M, g) es una variedad riemanniana. Ahora el espacio tangente $T_p M$ es euclidiano, pues g_p es un producto escalar real. Una *base ortonormal* $\{v_1, \dots, v_n\}$ de $T_p M$ es la imagen de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n bajo una **isometría lineal** $v: \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$.

Entonces existe un fibrado principal $\mathcal{O}(M) \xrightarrow{\sigma} M$, cuya fibra $\mathcal{O}_p M$ es la totalidad de esas isometrías lineales v . Su grupo de estructura es el *grupo ortogonal* $O(n)$: si $A \in O(n)$, entonces $v \circ A: \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{v} T_p M$ es otra isometría: la acción de $O(n)$ sobre $\mathcal{O}(M)$ es $v \mapsto v \circ A$. Esto define el **fibrado de marcos ortonormales** de (M, g) .

4.7. Clase 27

Esta es la clase virtual del 16 de noviembre del 2020. Su temática comprende la sección §4.4: *Fibrados principales y formas de conexión*.

Campos vectoriales fundamentales sobre un fibrado principal

El grupo de estructura G actúa (a la derecha) libremente sobre el espacio total P del fibrado principal. Esto significa que $u = u \triangleleft g$ en P si y solo si $g = 1$ en G . Si $X \in \mathfrak{g}$ es un elemento del álgebra de Lie de G , la curva en P dada por $\underline{\gamma(t)} := u \triangleleft \exp tX$ pasa por u y su vector velocidad en $t = 0$ es el vector tangente

$$\tilde{X}_u := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (u \triangleleft \exp tX) = \dot{\gamma}(0) \in T_u P. \tag{4.43}$$

De esta manera se define un campo vectorial $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$, por

$$\tilde{X}f(u) \equiv \tilde{X}_u(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(u \triangleleft \exp tX).$$

Este \tilde{X} es el **campo vectorial fundamental** sobre P asociado a $X \in \mathfrak{g}$.

Como la acción de G sobre P es libre, se ve que $\dot{\gamma}(0) = 0$ en la fórmula (4.43) si y solo si $X = 0$ en \mathfrak{g} . Entonces la correspondencia $X \mapsto \tilde{X}_u: \mathfrak{g} \rightarrow T_u P$ es \mathbb{R} -lineal e inyectiva. También la aplicación

$$j: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(P): X \mapsto \tilde{X} \tag{4.44}$$

es \mathbb{R} -lineal e inyectiva – y resulta ser un homomorfismo de álgebras de Lie.

El Lema 4.37 dice que j es *equivariante* para dos acciones (a derecha) de G sobre \mathfrak{g} y $\mathfrak{X}(P)$, respectivamente. La acción de G sobre \mathfrak{g} es una variante de la acción adjunta:

$$X \mapsto \text{Ad}(g^{-1})X := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g^{-1}(\exp tX)g.$$

Para definir la acción de G sobre $\mathfrak{X}(P)$, considérese dos aplicaciones suaves:

$$\underline{\theta}_u: G \rightarrow P : g \mapsto u \triangleleft g, \quad \underline{r}_g: P \rightarrow P : u \mapsto u \triangleleft g,$$

La equivariancia de $j: X \mapsto \tilde{X}$ se expresa así:

$$(r_g)_* \tilde{X} = (\text{Ad}(g^{-1})X)^\sim. \tag{4.45}$$

En su demostración, se encuentra otra fórmula útil:

$$\tilde{X}_u = \dot{\gamma}(0) = T_1\theta_u(X).$$

Fíjese que $T_1\theta_u$ lleva $\mathfrak{g} = T_1G$ en T_uP .

► Ahora considérese la sumersión sobreyectiva $\sigma: P \rightarrow M$ y su aplicación tangente $T_u\sigma: T_uP \rightarrow T_{\sigma(u)}M$. Esta aplicación lineal es sobreyectiva (porque σ es una sumersión) pero no es inyectiva, porque $\dim P = \dim M + \dim G > \dim M$, excepto si G sea un grupo discreto. Su *núcleo* es el llamada *espacio tangente vertical* en u :

$$V_u := \ker T_u\sigma \quad \text{de modo que} \quad V_u \leq T_uP.$$

Entonces, por definición, hay una *sucesión exacta corta de espacios vectoriales*:

$$0 \longrightarrow V_u \longrightarrow T_uP \xrightarrow{T_u\sigma} T_{\sigma(u)}M \longrightarrow 0. \tag{4.46}$$

El cálculo siguiente muestra que $\tilde{X}_u \in V_u$:

$$T_u\sigma(\tilde{X}_u) = T_u\sigma(T_1\theta_u(X)) = T_u(\sigma \circ \theta_u)(X) = 0,$$

porque $\sigma \circ \theta_u: g \mapsto \sigma(u \triangleleft g) = \sigma(u)$ es una *función constante* sobre G : la acción de G preserva la fibra $P_{\sigma(u)}$.

Como $X \mapsto \tilde{X}_u: \mathfrak{g} \rightarrow V_u$ es inyectiva, se obtiene

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} &\leq \dim_{\mathbb{R}} V_u = \dim_{\mathbb{R}} T_uP - \dim_{\mathbb{R}} T_{\sigma(u)}M \\ &= \dim P - \dim M = \dim G = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

esto es, $\dim_{\mathbb{R}} V_u = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$: cada vector vertical en V_u es un \tilde{X}_u , para un único $X \in \mathfrak{g}$.

En la próxima clase, se buscará un *espacio tangente horizontal* H_u en cada $u \in P$, tal que $T_uP = V_u \oplus H_u$. Esto siempre es factible porque la SEC (4.46) escinde.

4.8. Clase 28

Esta es la clase virtual del 19 de noviembre del 2020. Su temática finaliza la sección §4.4: *Fibrados principales y formas de conexión*.

Construcción de un subfibrado horizontal

En la clase anterior, se identificó el subfibrado vertical $V \xrightarrow{\tau} P$ del fibrado tangente $TP \xrightarrow{\tau} P$, generado por los campos vectoriales fundamentales \tilde{X} , para $X \in \mathfrak{g}$. Faltaba obtener un subfibrado horizontal $H \xrightarrow{\tau} P$ tal que $TP = V \oplus H$, en el sentido de que $T_uP = V_u \oplus H_u$ para cada $u \in P$.

Considérese el caso más importante donde $P = \mathcal{F}M$: el fibrado principal es el *fibrado de marcos* para (el fibrado tangente de) M . En una carta local (U, ϕ) de M , se toma un marco local $\{X_1, \dots, X_n\}$. En un punto de $p \in U$, hay un elemento $u \in P$ dado por $u(e_j) := X_j|_p$ para que $\sigma(u) = p$.

Se puede tomar una curva $\gamma: I \rightarrow U$ tal que $\gamma(0) = p$, y para evitar casos triviales, $\dot{\gamma}(0) \neq 0$ en T_pM .

El motor de la construcción del subfibrado horizontal es *una conexión afín* ∇ sobre M . Esto permite trasladar los vectores tangentes en T_pM paralelamente a lo largo de γ , al resolver el problema de valor inicial:

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y_j(t) = 0; \quad Y_j(0) = X_j|_p \in T_pM \tag{4.47}$$

para $j = 1, \dots, n$. Así se obtiene un juego de curvas $t \mapsto Y_j(t)$ en TM , linealmente independientes en T_pM cuando $t = 0$ y – por unicidad de soluciones de (4.47) – linealmente independientes en cada $T_{\gamma(t)}M$ también.

El resultado es un par de curvas en $P = \mathcal{F}M$, dadas por

$$\underline{\Gamma}(t) \equiv \{Y_1(t), \dots, Y_n(t)\} \quad \text{y} \quad \underline{u}(t) := \{X_1|_{\gamma(t)}, \dots, X_n|_{\gamma(t)}\}.$$

Como $\sigma(\Gamma(t)) = \gamma(t)$ y $\sigma(u(t)) = \gamma(t)$, las dos curvas están relacionadas por traslaciones verticales en cada fibra $P_{\gamma(t)}$:

$$u(t) = \Gamma(t) \triangleleft g(t) \quad \text{para} \quad t \in I. \tag{4.48}$$

Aquí $g(t) \in G = GL(n, \mathbb{R})$ con $g(0) = 1$. Si $A := \dot{g}(0)$, se obtiene la derivada en $t = 0$ de (4.48):

$$\dot{u}(0) = \dot{\Gamma}(0) + \tilde{A}_u \quad \text{en} \quad T_uP.$$

El Lema 4.41 muestra que $A = \omega(\dot{\gamma}(0))$, donde $\omega = [\omega_j^i]$ es la matriz de 1-formas asociada al marco local dado. Su prueba aprovecha que los $Y_j(t)$ son paralelos a lo largo de γ .

Entonces, tanto $\dot{u}(0)$ como \tilde{A}_u dependen linealmente de $\dot{\gamma}(0)$; luego, $\dot{\Gamma}(0)$ depende linealmente de $\dot{\gamma}(0)$.

Por lo tanto, todos los posibles $\dot{\Gamma}(0)$, junto con $0 \in T_u P$, conforman un *subespacio vectorial* de $T_u P$. Este es H_u . Hay una aplicación \mathbb{R} -lineal

$$l_u : T_p M \rightarrow H_u : \dot{\gamma}(0) \mapsto \dot{\Gamma}(0).$$

Como $\sigma(\Gamma(t)) \equiv \gamma(t)$ por construcción, se obtiene $T_u \sigma(\dot{\Gamma}(0)) = \dot{\gamma}(0)$. Esto dice que $T_u \sigma \circ l_u = 1$ sobre $T_p M$, de donde l_u es inyectiva. Entonces $\dim_{\mathbb{R}} H_u = \dim_{\mathbb{R}} T_p M$ y se llega a la meta:

$$T_u P = V_u \oplus H_u \quad \text{para todo } u \in P. \quad (4.50)$$

► En la dirección vertical, hay una proyección lineal $\eta_u : T_u P \rightarrow V_u$ cuyo núcleo es H_u . Al combinarla con el inverso del isomorfismo lineal $T_1 \theta_u : \mathfrak{g} \rightarrow V_u : X \mapsto \tilde{X}_u$, se obtiene

$$\omega_u := (T_1 \theta_u)^{-1} \circ \eta_u : T_u P \rightarrow \mathfrak{g} \quad (4.51)$$

que cumple $\ker \omega_u = H_u$ y

$$\omega_u(\tilde{X}_u) = X \quad \text{si } X \in \mathfrak{g}. \quad (*)$$

Si $Z_u \in T_u P$, la suma directa (4.50) dice que $Z_u = \tilde{X}_u + Y_u$, con $X \in \mathfrak{g}$, $Y_u \in H_u$. Un cálculo que emplea la fórmula (4.45) muestra que $(r_g^* \omega)_u(Z_u) = \text{Ad}(g^{-1}) \omega_u(Z_u)$, y por lo tanto:

$$\underline{r_g^* \omega} = \text{Ad}(g^{-1}) \omega \quad \text{para todo } g \in G. \quad (**)$$

► La definición generaliza este ω al contexto de cualquier fibrado principal $P \xrightarrow{\sigma} M$. Una **1-forma de conexión** sobre P es un $\omega \in \mathcal{A}^1(P, \mathfrak{g})$ que satisface (*) y (**).

En este contexto general, se mueve en el sentido contrario, al *definir* H_u como el núcleo de $\omega_u : T_u P \rightarrow \mathfrak{g}$.

También, se introduce una **2-forma de curvatura** $\Omega \in \mathcal{A}^2(P, \mathfrak{g})$ al poner, simplemente,

$$\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega. \quad (4.52)$$

Es de notar que tanto ω como Ω están definidos globalmente (pero sobre P en vez de M). Para recuperar las matrices de formas locales $\omega_j^i \in \mathcal{A}^1(U)$ y $\Omega_j^i \in \mathcal{A}^2(U)$, en el caso $P = \mathcal{F}M$, se debe escoger un marco local $\{X_1, \dots, X_n\}$ en U . Este es *una sección local del fibrado de marcos* $\chi \in \Gamma(U, \mathcal{F}M)$.

Por pullback bajo χ^* , se obtienen las formas locales de antes:

$$[\omega_j^i] = \chi^* \omega, \quad [\Omega_j^i] = \chi^* \Omega,$$

que cumplen ecuaciones de estructura de Cartan.

Sobre la décima tercera lista de ejercicios

Ejercicio 4.12 Si $\nabla = \nabla^g$ es una conexión de Levi-Civita para una métrica riemanniana, se establece una relación entre las 2-formas locales y curvatura y los componentes del tensor de curvatura riemanniana.

Ejercicio 4.13 Las formas locales de conexión y curvatura cumplen una relación más: la *segunda identidad de Bianchi* entre 3-formas locales.

Ejercicio 4.15 En una superficie con métrica riemanniana, se puede definir la llamada *curvatura gaussiana* K en términos de la 2-forma Ω_2^1 . Se pide calcularla en el caso del plano hiperbólico.

Ejercicio 4.16 Un famoso fibrado principal (no trivial) de baja dimensión es el *fibrado de Hopf* $S^3 \xrightarrow{\sigma} S^2$, con grupo de estructura \mathbb{T} .

Ejercicio 4.17 En contraste con el caso de fibrados vectoriales, un fibrado *principal* admite una sección global si y solo si es trivial.