

MA-870: GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

II Ciclo Lectivo del 2014

Introducción

Una de las tendencias más notables de las matemáticas en el último medio siglo ha sido el encuentro entre el análisis y la geometría. El contexto apropiado para abordar el cálculo diferencial e integral es un conjunto que puede ser parametrizado “localmente” por coordenadas cartesianas. Una reformulación de los métodos del cálculo en una forma “libre de coordenadas” permite tomar en cuenta la estructura geométrica “global” de tales conjuntos, llamados *variedades diferenciales*. A la vez, muchos de los cálculos en estas variedades son esencialmente algebraicas. Esto permite una síntesis entre diversas ramas de la matemática.

Este curso parte del análisis local (el cálculo diferencial en varias variables, las ecuaciones diferenciales ordinarias, la integración múltiple) y abre paso al análisis global en variedades.

Para abordar la geometría de tales espacios localmente euclidianos, es necesario introducir unas estructuras suplementarias en las variedades diferenciales. Una *conexión afín* sobre la variedad permite desplazamientos desde un punto hacia otros puntos vecinos; cada conexión afín determina ciertas cantidades geométricas, tales como su torsión y su curvatura.

En el primer capítulo se introduce el concepto de variedad diferencial como espacio localmente euclidiano, y se definen funciones diferenciables entre variedades y campos de vectores tangentes. En seguida se hace un catálogo de diversos ejemplos de variedades, como grupos de Lie y sus cocientes y fibrados vectoriales.

En el segundo capítulo aparecen formas diferenciales y las diversas operaciones del “cálculo exterior”.

El tercer capítulo se dedica a la integración de formas diferenciales: su pieza central es el teorema de Stokes.

En el último capítulo, se introduce el concepto de traslación paralela, mediante conexiones y métricas riemannianas, amén de los tensores que las acompañan.

Temario

Variedades diferenciales Definición y ejemplos de variedades diferenciales. Funciones y aplicaciones diferenciables, particiones de la unidad. Vectores tangentes y campos vectoriales. Curvas integrales y flujo de un campo vectorial. Grupos de Lie y sus espacios homogéneos. Fibrados principales y fibrados vectoriales, los fibrados tangente y cotangente de una variedad diferencial.

Formas diferenciales Formas diferenciales de primer grado y su dualidad con campos vectoriales. Algebra tensorial, formas de grado superior. La derivada exterior de una forma diferencial, derivadas de Lie de campos vectoriales y formas. Formas cerradas y exactas, el lema de Poincaré.

Integración en variedades Variedades orientables. Integrales de n -formas. Símplices y cadenas, homología singular. Cohomología de de Rham, el teorema de Stokes.

Conexiones y curvatura Transporte paralelo de campos vectoriales. Conexiones afines, derivadas covariantes, símbolos de Christoffel, curvas geodésicas. Métricas riemannianas y conexiones de Levi-Civita. Curvatura riemanniana, tensores de Ricci, curvatura escalar. Espacios de curvatura constante, geometría esférica.

Bibliografía

El curso seguirá mayormente los lineamientos del libro *Basic Algebra I* de Nathan Jacobson. Otros libros de mucha utilidad son los siguientes.

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden and T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer, New York, 1988.
- [2] D. Barden and C. Thomas, *An Introduction to Differential Manifolds*, Imperial College Press, London, 2003.
- [3] M. Crampin y F. A. E. Pirani, *Applicable Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- [4] R. W. R. Darling, *Differential Forms and Connections*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [5] J. A. Dieudonné, *Éléments d'Analyse*, tomo 3, Gauthier-Villars, París, 1974.
- [6] H. Flanders, *Differential Forms*, Academic Press, Orlando, FL, 1963.

- [7] T. Frankel, *The Geometry of Physics: An Introduction*, 3ª edición, Cambridge University Press, New York, 2012.
- [8] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.
- [9] L. A. Santaló, *Introducción a la geometría diferencial de variedades diferenciables*, Universidad de Buenos Aires, 1965.
- [10] I. M. Singer y J. Thorpe, *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Scott, Foresman, Glenview, IL, 1967.
- [11] M. D. Spivak, *Cálculo en Variedades*, Reverté, Barcelona, 1975.
- [12] M. D. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, tomos 1 y 2, Publish or Perish, Berkeley, CA, 1979.
- [13] C. H. Taubes, *Differential Geometry: Bundles, Connections, Metrics and Curvature*, Oxford University Press, Oxford, 2011.
- [14] L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer, New York, 2008.
- [15] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, New York, 1983.

Notaciones y convenios

Las notaciones usados en este curso serán introducidas sobre la marcha; en alguna medida, el sustrato de la geometría diferencial moderna es el manejo de su vocabulario. Sin embargo, cabe mencionar algunos detalles preliminares.

- ◊ $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ es el conjunto de los *números naturales* (enteros no negativos).¹
- ◊ $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ es el conjunto de los *números enteros*.
- ◊ $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ son los cuerpos de números *racionales, reales y complejos*, respectivamente.

¹Los autores franceses usan $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ y escriben $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. En cambio, los autores alemanes suelen poner $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ y $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. El lector debe cerciorarse si un determinado libro considera 0 como número natural o no. En estos apuntes, si hace falta, se usará $\mathbb{P} = \{1, 2, 3, \dots\}$ para denotar los *números enteros positivos*.

Si A y B son conjuntos disjuntos, $A \cap B = \emptyset$, su *unión disjunta* será denotada por $A \uplus B$. \llbracket En la teoría de conjuntos, $A \uplus B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ denota la “diferencia simétrica” o *suma booleana* de dos conjuntos A y B , no necesariamente disjuntos. \rrbracket

► En estos apuntes se usará un convenio notacional introducido por Kenneth Iverson, el inventor de *APL* (un lenguaje de computación, y recomendado por Donald Knuth para uso general.² Si $R(x)$ es una relación lógica que depende de un parámetro x , la expresión $\llbracket R(x) \rrbracket$ denota la siguiente función booleana:

$$\llbracket R(x) \rrbracket := \begin{cases} 1, & \text{si } R(x) \text{ es CIERTO;} \\ 0, & \text{si } R(x) \text{ es FALSO.} \end{cases}$$

Por ejemplo, la *función indicatriz* χ_A de un conjunto A se define como

$$\chi_A(x) := \llbracket x \in A \rrbracket = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A; \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

La función f que coincide con $\sin t$ para $t \in [0, \pi]$ y es cero fuera de ese intervalo es

$$f(t) := \sin t \llbracket 0 \leq t \leq \pi \rrbracket;$$

La función de signo sobre \mathbb{R} vale 1, 0, -1 para un número positivo, cero o negativo, respectivamente. Su definición es simplemente

$$\text{signo}(t) := \llbracket t > 0 \rrbracket - \llbracket t < 0 \rrbracket.$$

La *delta de Kronecker*, comúnmente escrito δ_{jk} o δ_j^k , se define así:

$$\llbracket j = k \rrbracket := \begin{cases} 1, & \text{si } j = k; \\ 0, & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

► Los cálculos con variedades de dimensiones mayores que 1 involucran muchos índices; el siguiente convenio simplifica la notación. Las coordenadas individuales de un vector en \mathbb{R}^n se denotarán por *superíndices* en vez de subíndices:

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

²Los documentos originales son los libros: Kenneth E. Iverson, *A Programming Language*, Wiley, New York, 1962; y Ronald L. Graham, Donald E. Knuth and Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989. Véase también el artículo: Donald E. Knuth, *Two notes on notation*, American Mathematical Monthly **99** (1992), 403–422.

Un juego de *vectores* puede listarse con subíndices. Por ejemplo, la base ortonormal usual de \mathbb{R}^n será denotada por $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Al tomar potencias de coordenadas, se colocan paréntesis para evitar ambigüedades; así, la norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$ es:

$$\|x\| := \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2}.$$

Las formas \mathbb{R} -lineales $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ constituyen el espacio vectorial dual $(\mathbb{R}^n)^*$ – los franceses lo dotan por \mathbb{R}_n . Con respecto a la *base dual* $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$, determinada por las relaciones $\varepsilon^i(e_j) = \llbracket i = j \rrbracket$, los componentes de una forma lineal se denotan por subíndices:

$$\xi = \xi_1 \varepsilon^1 + \xi_2 \varepsilon^2 + \dots + \xi_n \varepsilon^n.$$

Entonces la evaluación de la forma lineal ξ sobre el vector x se presenta así:

$$\langle \xi, x \rangle \equiv \xi(x) = \xi_1 x^1 + \xi_2 x^2 + \dots + \xi_n x^n =: \xi_k x^k.$$

La notación al lado derecho usa el **convenio de Einstein** para sumatorias: en una expresión con índices, si algún índice se repite una vez como subíndice y otra vez como superíndice, se suma sobre todos los valores de ese índice, salvo si se indica expresamente lo contrario. (Así, se ahorra muchos símbolos \sum_k en la notación.) Por ejemplo, si los elementos de una matriz A se escriben a_i^j , la expresión a_j^j es igual a su *traza* $\text{tr} A := a_1^1 + a_2^2 + \dots + a_n^n$.

Los corchetes angulares $\langle \cdot, \cdot \rangle$ también señalan una **dualidad** entre dos espacios vectoriales: para ξ fijo, la expresión $\langle \xi, x \rangle$ es \mathbb{R} -lineal en x , pero a la vez para cada x fijo, la misma expresión es \mathbb{R} -lineal en ξ . En otras palabras, se trata de una aplicación *bilineal* de $\mathbb{R}_n \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R} , en donde $\mathbb{R}_n = (\mathbb{R}^n)^*$ es el espacio vectorial dual de \mathbb{R}^n pero también indica que $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}_n)^*$ puede verse como el espacio vectorial dual de \mathbb{R}_n .

► La entrada (i, j) de una matriz A se denota más frecuentemente por a_{ij} . Esta matriz también se puede denotar por $A = [a_{ij}]$, sin más detalle. El lector debe entender que los índices i, j recorren todos los valores permisibles; no hace falta decorar la expresión con sus rangos, como $[a_{ij}]_{i,j=1}^n$ por ejemplo.

► Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es m veces continuamente diferenciable y si $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ cumplen $|r| \equiv r_1 + \dots + r_n = m$, dicese que $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}$ es un **multíndice** y la derivada parcial correspondiente de f , de orden m , se denota por

$$\frac{\partial^r f}{\partial x^r} := \frac{\partial^{r_1 + \dots + r_n} f}{\partial^{r_1} x^1 \dots \partial^{r_n} x^n}.$$

1 Variedades diferenciales

Una *variedad diferencial* de dimensión n es un conjunto que se parece localmente al espacio euclidiano \mathbb{R}^n , es decir, si cada uno de sus puntos posee un vecindario semejante a una región abierta de \mathbb{R}^n . Se trata de importar el cálculo diferencial e integral de funciones sobre \mathbb{R}^n a dicho conjunto, tomando en cuenta y luego superando la dificultad de que las correspondencias con \mathbb{R}^n pueden variar de un punto a otro.

Hay dos formas de efectuar correspondencias entre partes de un determinado conjunto X y las de \mathbb{R}^n . En primera instancia, se puede considerar funciones o aplicaciones que llevan ciertas partes de X en \mathbb{R}^n ; estas *cartas* deben cubrir el conjunto X de tal manera que cada uno de sus puntos tenga asignado un juego de coordenadas en \mathbb{R}^n . La otra alternativa es la de considerar un juego de funciones o aplicaciones que llevan abiertos de \mathbb{R}^n en ciertas partes de X ; un sistema de tales *placas* también sirve para transportar el cálculo diferencial de \mathbb{R}^n a X . Por razones de tradición se enfatiza en la primera opción.

Las cartas son funciones continuas que llevan partes abiertas de X en partes abiertas de \mathbb{R}^n . Para definir las, es necesario que X tenga una *topología* preexistente.³ Antes de abordar la teoría diferencial en detalle, conviene repasar algunos conceptos topológicos.

Definición 1.1. Un **espacio topológico** es un conjunto X dotado de una colección \mathcal{T} de partes de X (esta colección \mathcal{T} es la **topología**) que satisface tres condiciones:

- (a) $X \in \mathcal{T}$ y el conjunto vacío $\emptyset \in \mathcal{T}$ también.
- (b) Si $U, V \in \mathcal{T}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{T}$.
- (c) Si $\{U_\alpha : \alpha \in A\} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

Los elementos de \mathcal{T} se llaman **abiertos** (o *partes abiertas*) de X . Un **vecindario** de $x \in X$ es una parte $V \subseteq X$ que incluye un abierto $U \in \mathcal{T}$ que contiene x , es decir, $x \in U \subseteq V$. Una parte de X es abierta si y sólo si es un vecindario de cada uno de sus propios puntos.

Sus complementos $\{X \setminus U : U \in \mathcal{T}\}$ se llaman **cerrados** (o *partes cerradas*) de X . \diamond

Ejemplo 1.2. Una **bola abierta** en \mathbb{R}^n , con centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$, es el conjunto

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}.$$

La *topología usual* de \mathbb{R}^n es la colección de uniones arbitrarias $U = \bigcup_{\alpha \in A} B(x_\alpha, r_\alpha)$. En este caso, basta tomar *uniones numerables*, porque cada $B(x, r)$ es una unión numerable de bolas abiertas con centro en \mathbb{Q}^n y radio positivo en \mathbb{Q} .

La *bola cerrada* $\bar{B}(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$ es un cerrado de \mathbb{R}^n . \diamond

³En cambio, las placas no requieren la estructura previa del conjunto X .

Ejemplo 1.3. Si $X \subset \mathbb{R}^n$, sea $\mathcal{T} := \{X \cap U : U \text{ abierto en } \mathbb{R}^n\}$. Entonces \mathcal{T} es la llamada **topología relativa** de X : los abiertos propios de una parte X de \mathbb{R}^n son las intersecciones de X con abiertos de \mathbb{R}^n . Los cerrados de la topología relativa son los conjuntos $X \cap C$, donde C es un cerrado de \mathbb{R}^n .

De esta manera se define la “topología usual” de conjuntos como la *esfera*

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\},$$

que se determinan en primera instancia como partes de \mathbb{R}^n . ◇

Por la Definición 1.1(c), una intersección arbitraria de cerrados en X es cerrada. Si $A \subseteq X$ la intersección de cerrados que incluyen A es un cerrado \bar{A} , la **clausura** de A . Una parte $A \subseteq X$ es **densa** en X si $\bar{A} = X$. Dícese que X es **separable** si alguna parte numerable es densa; por ejemplo, un espacio euclidiano es separable porque \mathbb{Q}^n es denso en \mathbb{R}^n .

Una parte $K \subseteq X$ es **compacta** si cada cubrimiento de K por abiertos de X posee un subcubrimiento finito.

Definición 1.4. Una **distancia métrica** en un conjunto X es una función $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ que es *simétrica*: $d(x, y) = d(y, x)$ para $x, y \in X$; *definida*: $d(x, x) = 0$ si y sólo si $x = 0$; y cumple la *desigualdad triangular*:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{para todo } x, y, z \in X.$$

Una distancia define un sistema de *bolas abiertas*, $B_d(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$. Sus uniones $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_d(x_\alpha, r_\alpha)$ son los abiertos de la *topología métrica* de X . Un espacio topológico es **metrizable** si su topología viene dada por una métrica. El espacio euclidiano \mathbb{R}^n , como también sus partes $X \subseteq \mathbb{R}^n$ con la topología relativa, son metrizables. ◇

Definición 1.5. Una función $f : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos es **continua** si para todo abierto V de Y su *preimagen* $f^{-1}(V) := \{x \in X : f(x) \in V\}$ es un abierto en X .

Una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$ **converge** a $x \in X$ (escrito $x_k \rightarrow x$) si para cada vecindario V de x hay $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in V$ para $k \geq N$.

Si $f : X \rightarrow Y$ es continua, entonces $x_k \rightarrow x$ en X implica $f(x_k) \rightarrow f(x)$ en Y . La implicación inversa (que una función que preserva la convergencia de sucesiones es continua) es válida si X y Y son metrizables y separables.

Un **homeomorfismo** entre dos espacios topológicos X y Y es una aplicación biyectiva y continua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f^{-1} : Y \rightarrow X$ es también continua. En tal caso, $U \leftrightarrow f(U)$ es una correspondencia biunívoca entre las topologías de X y Y ; y se dice que los espacios X y Y son *homeomorfos*. ◇

1.1 Definición y ejemplos de variedades

Una variedad topológica de dimensión n es un espacio topológico X que es “localmente homeomorfo” al espacio euclidiano \mathbb{R}^n . Esto significa que cualquier punto de X posee un vecindario abierto que corresponde, bajo algún homeomorfismo, a un vecindario abierto del punto imagen en \mathbb{R}^n . En particular, la topología de X está determinada por un juego de abiertos básicos que son metrizable y separables; y se pierde poca generalidad al suponer que X mismo comparte estas dos propiedades.⁴

Definición 1.6. Sea X un espacio topológico metrizable y separable. Una **carta local** n -dimensional para X es un par (U, ϕ) , donde $U \subseteq X$ es un abierto de X , $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto de \mathbb{R}^n , y $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ es un homeomorfismo.

Si (V, ψ) es otra carta local para X , entonces $U \cap V$ es abierto en U y en V ; como ϕ y ψ son homeomorfismos, tanto $\phi(U \cap V)$ como $\psi(U \cap V)$ son abiertos de \mathbb{R}^n . Dícese que las dos cartas son **compatibles** si las *funciones de transición*

$$\begin{aligned}\psi \circ \phi^{-1} &: \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V), \\ \phi \circ \psi^{-1} &: \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V),\end{aligned}\tag{1.1}$$

son continuas (de hecho, son homeomorfismos, pues cada una es la función inversa de la otra).⁵ Nótese que esta compatibilidad se cumple trivialmente si $U \cap V = \emptyset$. \diamond

Definición 1.7. Un **atlas** sobre X es un juego de cartas locales $\mathfrak{A} := \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$, todas de la misma dimensión n y compatibles entre sí, tales que $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$.

Dos atlas \mathfrak{A} y \mathfrak{B} sobre X son *equivalentes* si cada carta local (U, ϕ) de \mathfrak{A} es compatible con cada carta local (V, ψ) de \mathfrak{B} – dicho de otra manera, si $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ es también un atlas. Fíjese que la clase de equivalencia de \mathfrak{A} contiene un *atlas maximal*, constituido por la totalidades de cartas locales (V, ψ) compatibles con todas las cartas locales de \mathfrak{A} .

Una **variedad topológica** de dimensión n es un espacio topológico X , metrizable y separable, dotado de una clase de equivalencia de atlas – o bien, X dotado de un atlas maximal – cuyas cartas tienen imágenes en \mathbb{R}^n . Se escribe $\dim X = n$ y se dice que n es la **dimensión** de esta variedad. \diamond

⁴Es posible extender la definición de variedad a una clase más amplia de espacios topológicos: los que son de Hausdorff, paracompactos y cumplen el primer axioma de numerabilidad. Consúltese cualquier texto de topología general para el alcance de estas propiedades.

⁵Un teorema importante de la topología general asegura que un abierto no vacío de \mathbb{R}^n puede ser homeomorfo con un abierto no vacío de \mathbb{R}^m solo si $m = n$. Si $U \cap V \neq \emptyset$, entonces, la dimensión del espacio euclidiano ambiente no es ambigua.

En la práctica, se declara un solo atlas \mathfrak{A} sobre X , porque un atlas maximal sería inmanejable. Pero se reserva el derecho de agregar al atlas dado cualquier otra carta local compatible, sin mayor discusión.

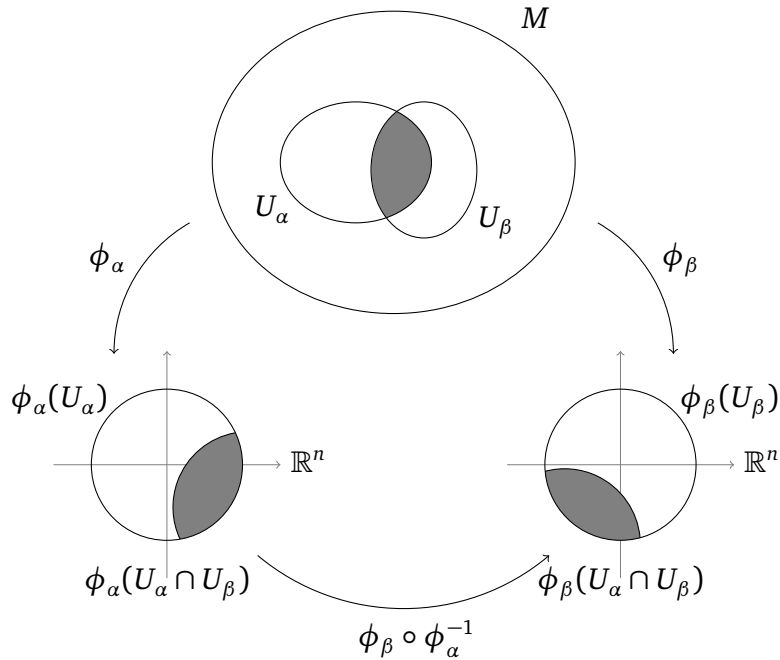


Figura 1.1: Una función de transición entre dos cartas locales

Definición 1.8. Sea M un espacio topológico metrizable y separable. Un atlas \mathfrak{A} sobre M es un **atlas de clase C^k** , para $k \in \mathbb{N}$, si todas sus funciones de transición entre abiertos de \mathbb{R}^n (Figura 1.1):

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

son de clase C^k , es decir, k veces continuamente diferenciables.

Por su definición, cada $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ es de clase C^0 , por ser continua; y es evidente que una función de clase C^{k+1} es también de clase C^k . Dos atlas de clase C^k se declaran *equivalentes* si sus cartas son compatibles con funciones de transición (1.1) de clase C^k .

Dícese que \mathfrak{A} es un **atlas de clase C^∞** si es de clase C^k para cada $k \in \mathbb{N}$; en otras palabras, *si sus funciones de transición son suaves*.

Una **variedad diferencial** de dimensión n es un espacio topológico M , metrizable y separable, dotado de una clase de equivalencia de atlas de clase C^∞ . \diamond

Ejemplo 1.9. El espacio euclidiano \mathbb{R}^n con el atlas constituido por una sola carta $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$ es una variedad diferencial de dimensión n .

De igual modo, cualquier abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es una variedad diferencial de dimensión n , cuya estructura está determinada por la sola carta (U, i) , donde $i: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ denota la inclusión. \diamond

Ejemplo 1.10. Si $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación suave e inyectiva cuya derivada no se anula, $\gamma'(t) \neq 0$ para $t \in \mathbb{R}$, la trayectoria $\gamma(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^n$ no tiene puntos singulares y la función inversa $\gamma^{-1}: \gamma(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es suave a lo largo de esta trayectoria. (Este es un caso particular del teorema de la función inversa.) En tal caso $\gamma(\mathbb{R})$, dotado de la sola carta $(\gamma(\mathbb{R}), \gamma^{-1})$, es una variedad diferencial unidimensional encajada en \mathbb{R}^n . \diamond

En el ejemplo anterior la palabra *trayectoria* denota la imagen de la función γ como una parte de \mathbb{R}^n (con la topología relativa). El término *curva* se reserva para la función γ misma: una curva es una función continua (en este caso, suave) cuyo dominio es un intervalo de la recta real. En otros contextos se suele decir que γ es una *parametrización* que recorre el conjunto $\gamma(\mathbb{R})$ con una determinada velocidad.

Ejemplo 1.11. Considérese la recta \mathbb{R} dotado de la carta (\mathbb{R}, κ) , donde $\kappa(t) := t^3$ para $t \in \mathbb{R}$. Nótese que $\kappa: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una biyección continua con inverso continuo $s \mapsto s^{1/3}$; luego, κ es un homeomorfismo de \mathbb{R} en \mathbb{R} y el atlas $\{(\mathbb{R}, \kappa)\}$ hace de \mathbb{R} una variedad topológica indistinguible del \mathbb{R} original.

Sin embargo, aunque κ es suave (cualquier polinomio es diferenciable), su función inversa κ^{-1} no es diferenciable en $s = 0$, así que las cartas $(\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}})$ y (\mathbb{R}, κ) serán incompatibles si se quiere formar un atlas de clase C^1 o mayor.

En resumen: el atlas $\{(\mathbb{R}, \kappa)\}$ – y el atlas maximal que lo incluye – determina una **estructura diferencial** sobre \mathbb{R} diferente de la usual, basada en la carta $(\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}})$. \diamond

Para simplificar la discusión, a continuación se introducirá varios ejemplos de una variedad diferencial M con un atlas \mathfrak{A} que debe tomarse como la estructura diferencial “estándar” sobre M ; a partir de ahí, se permiten únicamente cartas compatibles con este atlas. No habrá más discusión de variedades topológicas: en adelante la palabra *variedad* denotará una variedad diferencial.⁶

⁶En la geometría algebraica, la palabra **variedad** significa un conjunto de ceros de un juego finito de polinomios. Como tal, puede poseer puntos singulares, como el vértice del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ en \mathbb{R}^3 . En inglés y alemán se emplean palabras distintos: (differential) *manifold* vs. (algebraic) *variety*, (differenzierbare) *Mannigfaltigkeit* vs. (algebraische) *Varietät*; pero en francés y español los vocablos *variété* y *variedad* se usan en los dos contextos.

Ejemplo 1.12. El círculo

$$\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\theta} : -\pi < \theta \leq \pi\}$$

es una variedad unidimensional. Su atlas usual se compone de dos cartas:

$$\begin{aligned} (\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}, -i \log_{>}), \quad \log_{>}(re^{i\theta}) &:= \log r + i\theta \quad \text{para } re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]; \\ (\mathbb{S}^1 \setminus \{+1\}, -i \log_{<}), \quad \log_{<}(re^{i\phi}) &:= \log r + i\phi \quad \text{para } re^{i\phi} \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty); \end{aligned} \quad (1.2)$$

Fíjese que $-i \log_{>}(\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}) = (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}$ y $-i \log_{<}(\mathbb{S}^1 \setminus \{+1\}) = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$. Las funciones de transición son las traslaciones $\theta \mapsto \theta + \pi$ para $\theta \neq 0$ y $\phi \mapsto \phi - \pi$ para $\phi \neq \pi$. Estas funciones afines son obviamente suaves. \diamond

Ejemplo 1.13. La esfera $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ es una variedad diferencial de dimensión $(n - 1)$. Al quitar su polo norte e_n o bien su polo sur $-e_n$ se obtienen dos abiertos $U := \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{e_n\}$ y $V := \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{-e_n\}$ que cubren la esfera, pues $U \cup V = \mathbb{S}^{n-1}$. Defínase $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ y $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ por las proyecciones estereográficas (Figura 1.2):

$$\phi(x) := \frac{1}{1 - x^n}(x^1, \dots, x^{n-1}), \quad \psi(x) := \frac{1}{1 + x^n}(x^1, \dots, x^{n-1}).$$

Si $y = \phi(x)$, $z = \psi(x)$ en \mathbb{R}^{n-1} , entonces $\|y\|^2 = \frac{1 + x^n}{1 - x^n}$, por lo tanto

$$\phi^{-1}(y) = \frac{1}{1 + \|y\|^2}(2y^1, \dots, 2y^{n-1}, \|y\|^2 - 1),$$

y en consecuencia

$$z = \psi \circ \phi^{-1}(y) = \frac{1}{\|y\|^2}(y^1, \dots, y^{n-1}) = \frac{y}{\|y\|^2} \quad \text{para } y \in \phi(U \cap V) = \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}.$$

Es evidente que $\psi \circ \phi^{-1}$ es una biyección suave de $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ en sí mismo. En este caso $\psi(U \cap V) = \phi(U \cap V)$ y $\phi \circ \psi^{-1} : z \mapsto z/\|z\|^2$ también. Luego estas dos cartas forman un atlas que determina una estructura de variedad diferencial sobre la esfera \mathbb{S}^{n-1} . \diamond

Ejemplo 1.14. El plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2 := \{L \leq \mathbb{R}^3 : \dim L = 1\}$ es el conjunto de todas las rectas que pasan por el origen de \mathbb{R}^3 . Si $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, la recta L_x que pasa por 0 y x se denota por las coordenadas homogéneas $\bar{x} = [x^1 : x^2 : x^3]$; ese nombre se debe a la circunstancia de que $[tx^1 : tx^2 : tx^3] = [x^1 : x^2 : x^3]$ para $t \neq 0$. Está claro que $\mathbb{RP}^2 = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ donde

$$U_j := \{[x^1 : x^2 : x^3] : x^j \neq 0\} \quad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

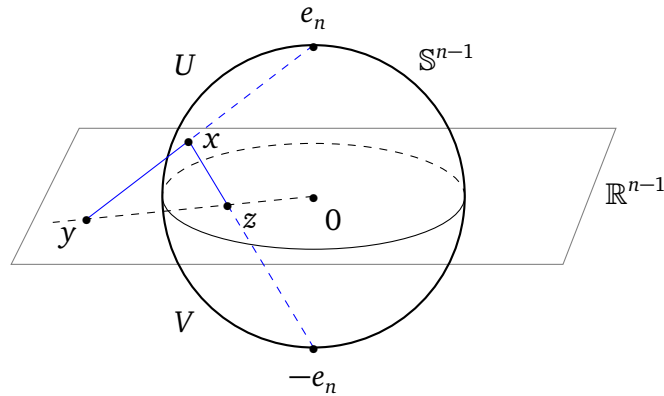


Figura 1.2: Dos proyecciones estereográficas de \mathbb{S}^{n-1} en \mathbb{R}^{n-1}

La topología de $\mathbb{R}P^2$ se define como sigue: una parta $V \subseteq \mathbb{R}P^2$ es un abierto de $\mathbb{R}P^2$ si y solo si $\tilde{V} = \bigcup_{x \in V} (L_x \setminus \{0\})$ es abierto en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.⁷ Las aplicaciones biyectivas $\phi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\phi_1(\bar{x}) := \left(\frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1} \right), \quad \phi_2(\bar{x}) := \left(\frac{x^1}{x^2}, \frac{x^3}{x^2} \right), \quad \phi_3(\bar{x}) := \left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3} \right) \quad (1.3)$$

son continuas. Fíjese que, para $j \neq k$, $\phi_j(U_j \cap U_k)$ es igual a \mathbb{R}^2 menos uno de sus ejes coordenados, Es evidente que

$$\phi_1^{-1}(y^1, y^2) = [1:y^1:y^2], \quad \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(y^1, y^2) = \left(\frac{1}{y^1}, \frac{y^2}{y^1} \right).$$

Las otras funciones de transición $\phi_k \circ \phi_j^{-1}$ son del mismo estilo. Todos sus componentes son cocientes de polinomios (de primer grado, en este caso) que no se anulan en sus dominios, y por ende son funciones suaves de dos variables. Luego $\mathbb{R}P^2$, con este atlas de tres cartas locales, es una variedad diferencial de dimensión 2.

El plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$, vista como conjunto sin estructura diferencial, es un *espacio homogéneo* definido por la acción del grupo multiplicativo $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sobre el conjunto $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ por multiplicación escalar, $t \cdot x := tx \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Las *órbitas* de esta acción de grupo son rectas menos el origen, $L_x \setminus \{0\}$.

Una definición alternativa de $\mathbb{R}P^2$ se obtiene al considerar la acción del grupo $C_2 = \{1, -1\}$ sobre la esfera $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$, por $(-1) \cdot x := -x \in \mathbb{S}^2$.

⁷El conjunto $\mathbb{R}P^2$ puede considerarse como un cociente de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ bajo la relación de equivalencia dada por $x \sim y$ si y solo si $y = tx$ para algún $t \neq 0$; la clase de equivalencia de x es $L_x \setminus \{0\}$. Esta definición de abiertos en $\mathbb{R}P^2$ se conoce como la *topología cociente*: es la topología más fuerte tal que la aplicación cociente $x \mapsto (L_x \setminus \{0\})$ sea continua.

Ahora las órbitas son *pares de puntos antipodales* $\{x, -x\}$. Esta acción de grupo se obtiene del anterior al imponer las ligaduras $\|x\| = 1$ y $|t| = 1$. Nótese que $\mathbb{S}^2 = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ donde cada V_k es el abierto $\mathbb{S}^2 \setminus \{e_k, -e_k\}$ cocientado por $x \sim -x$. Se definen tres cartas locales (V_k, ψ_k) por las mismas fórmulas respectivas (1.3) que definen los ϕ_k . La estructura diferencial sobre \mathbb{RP}^2 coincide con la anterior. \diamond

Definición 1.15. Si M y N son dos variedades diferenciales de dimensiones respectivas n y m , con atlas $\mathfrak{A} := \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ sobre M y $\mathfrak{B} := \{(V_\beta, \psi_\beta) : \beta \in B\}$ sobre N , su *producto cartesiano* $M \times N$ posee un atlas cuyas cartas locales son los $(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)$, donde

$$\phi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \mathbb{R}^{n+m} : (x, y) \mapsto (\phi_\alpha(x), \psi_\beta(y)).$$

El espacio topológico $M \times N$ dotado con este atlas es la **variedad producto** de M y N . \diamond

Ejemplo 1.16. La igualdad $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ es un isomorfismo \mathbb{R} -lineal de espacios vectoriales y un homeomorfismo de espacios topológicos. Además, la estructura diferencial de variedad producto del lado izquierdo coincide con la estructura diferencial de \mathbb{R}^{n+r} al lado derecho, porque $1_{\mathbb{R}^n} \times 1_{\mathbb{R}^m} = 1_{\mathbb{R}^{n+m}}$. \diamond

Ejemplo 1.17. El **toro** (o *2-toro*) $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es el producto cartesiano de dos círculos. (Se usa la letra \mathbb{T} , de “toro”, como sinónimo de \mathbb{S}^1 ; así, $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$.)

Inductivamente, se define el **n -toro** $\mathbb{T}^n := \mathbb{T} \times \mathbb{T}^{n-1}$. Esta es una variedad n -dimensional para cualquier $n \in \mathbb{P}$. \diamond

1.2 Aplicaciones diferenciables

Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ son dos abiertos en espacios euclidianos, la definición de aplicación diferenciable de U en V es un concepto ya conocido. Recuérdense primero que una función $f : U \rightarrow V$ es *diferenciable en* $x \in U$ si hay una aplicación \mathbb{R} -lineal $L_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$ vale

$$\|f(x+h) - f(x) - L_x(h)\| < \varepsilon \|h\| \quad \text{toda vez que} \quad \|h\| < \delta,$$

donde $\delta = \delta(\varepsilon)$ puede depender de ε y además $B(x, \delta) \subseteq U$. En otras palabras, la aplicación $h \mapsto f(x+h) - f(x)$ puede ser aproximado hasta primer orden por una función lineal $L_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. En segundo lugar, se dice que f es *continuamente diferenciable* en U , o *de clase C^1* en U , si además la aplicación $x \mapsto L_x$ es continua en el dominio U . Al escribir $Df(x) := L_x$ se obtiene una función (continua, en el segundo caso) $Df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$; esta es la **derivada** de la función diferenciable f .

Este formalismo “libre de coordenadas” es excelente para ciertos propósitos, entre ellos para demostrar la **regla de la cadena**:

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x), \quad (1.4)$$

cuando $g: V \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^k$ es otra función [continuamente] diferenciable en V ; el punto elevado indica la composición de aplicaciones lineales en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ y $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Sin embargo, resulta incómodo que la derivada Df tenga imagen en un espacio euclidiano de mayor dimensión, si $n > 1$; y en casos concretos es preferible emplear coordenadas cartesianas. Para ello, se escribe la aplicación lineal $Df(x)$ como *una matriz de derivadas parciales*:

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix} \equiv \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right].$$

La continuidad de la aplicación Df es equivalente a la continuidad de cada derivada parcial $\partial f^i / \partial x^j$; es decir, f es de clase C^1 si y solo si todas sus derivadas parciales son continuas.

En seguida, f es de clase C^2 si su derivada Df es de clase C^1 , lo cual es equivalente a que todas las derivadas parciales de segunda orden $\partial^2 f^i / \partial x^j \partial x^k$ sean continuas. Nótese que, para $x \in U$, la aplicación lineal $D^2f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ puede ser considerada como una aplicación bilineal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R}^m . Un teorema conocido de Euler asegura que la continuidad de D^2f garantiza que esta aplicación bilineal es *simétrica*; en términos matriciales, las derivadas parciales mixtas de segundo orden coinciden:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^j} \quad \text{para todo } j, k = 1, \dots, n.$$

Por inducción, f es de clase C^{k+1} si Df es de clase C^k . Dícese que f es *suave* o de clase C^∞ si f es de clase C^k para todo k ; en cuyo caso, Df es también suave y las derivadas parciales de orden superior de f son invariantes bajo permutaciones de las variables x^j .

Lema 1.18 (Hadamard). *Si $f: B(x, r) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^{k+1} definida en una bola centrada en $x \in \mathbb{R}^n$, entonces hay funciones $g_1, \dots, g_n: B(x, r) \rightarrow \mathbb{R}$, todas de clase C^k , tales que*

$$f(y) = f(x) + \sum_{j=1}^n (y^j - x^j) g_j(y) \quad \text{para } \|y - x\| < r. \quad (1.5)$$

Demostración. Para $y \in B(x, r)$, defínase $u_y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $u_y(t) := f((1-t)x + ty)$. Entonces la función u_y es $(k+1)$ veces diferenciable, con $u_y(0) = f(x)$, $u_y(1) = f(y)$. El

teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena muestran que

$$\begin{aligned} u_y(1) - u_y(0) &= \int_0^1 u'_y(t) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n (y^j - x^j) \frac{\partial f}{\partial x^j}((1-t)x + ty) dt \\ &= \sum_{j=1}^n (y^j - x^j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}((1-t)x + ty) dt. \end{aligned}$$

Basta con definir

$$g_j(y) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}((1-t)x + ty) dt.$$

Se verifica fácilmente, con la regla de la cadena, que cada g_j es de clase C^k . De hecho, para el caso $k = 0$, se ve que g_j es continua porque el integrando es continuo en las variables (y, t) . Nótese que $g_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x)$ para cada j . \square

► Antes de proseguir, conviene recordar ciertos resultados clásicos sobre funciones diferenciables de varias variables, que se supondrán conocidos.⁸

Definición 1.19. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $x \in U$, la aplicación lineal $Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ posee una matriz cuadrada en $M_n(\mathbb{R})$, con respecto de la base usual de \mathbb{R}^n . El **jacobiano** de f es la función $Jf : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Jf(x) := \det Df(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} \equiv \left| \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right|. \quad (1.6)$$

Nótese que $Df(x)$ es una aplicación lineal invertible si y sólo si $Jf(x) \neq 0$. \diamond

Teorema 1.20 (de la aplicación inversa). *Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $Jf(x) \neq 0$ para algún $x \in U$, entonces hay un vecindario abierto V de x con $V \subseteq U$, con $f(V)$ abierto en \mathbb{R}^n , donde la restricción $f|_V$ es uno-a-uno; y la biyección diferenciable $f|_V : V \rightarrow f(V)$ tiene una función inversa $g : f(V) \rightarrow V$, la cual es también de clase C^1 con $Jg(f(y)) = 1/Jf(y)$ para todo $y \in V$. Si f es de clase C^k , la función inversa local g también es de clase C^k .* \square

⁸Estos teoremas están enunciadas y demostradas en muchos textos de análisis. Consúltese, por ejemplo, en los libros de Abraham, Marsden y Ratiu; de Spivak (ambos); y de Warner, entre los libros de la bibliografía. Véase también el capítulo 10 del libro: J. A. Dieudonné, *Fundamentos de análisis moderno*, Reverté, Barcelona, 1976.

Nótese que la función original f no tiene que ser uno-a-uno. Si $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, tómese $f(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy)$, obviamente dos-a-uno – es la versión real del cuadrado complejo $z \mapsto z^2$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces $Jf(x, y) = 4x^2 + 4y^2 > 0$ para todo $(x, y) \in U$. El punto $(1, 0) \in U$ posee un vecindario abierto V , por ejemplo el semiplano $x > 0$, en donde f sí es uno-a-uno. En este caso, $f(V)$ es el “plano cortado” $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$; la función inversa local es $re^{i\theta} \mapsto \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ definido para $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$. En un vecindario del punto $(-1, 0)$, habría que usar otra rama de la raíz cuadrada compleja.

A veces conviene considerar funciones diferenciables $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ donde U es un abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. En un punto $(x_0, y_0) \in U$, la derivada $Df(x_0, y_0)$ tiene una matriz cuyas columnas se organizan en dos bloques $D_1f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ y $D_2f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$. En términos de las inclusiones $i_1: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m} : x \mapsto (x, y_0)$ e $i_2: \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m} : y \mapsto (x_0, y)$, estos bloques son las derivadas de las funciones $f \circ i_1$ y $f \circ i_2$ en los puntos respectivos x_0, y_0 .

Teorema 1.21 (de la función implícita). *Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función de clase C^1 definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y si $(x_0, y_0) \in U$ es un punto donde $f(x_0, y_0) = 0$ y $D_2f(x_0, y_0)$ es invertible, entonces hay vecindarios abiertos V de x_0 en \mathbb{R}^n y W de y_0 en \mathbb{R}^m y una aplicación $g: V \rightarrow W$ de clase C^1 tales que $f(x, y) = 0$ para $(x, y) \in V \times W$ si y solo si $y = g(x)$. La derivada de g está dada por*

$$Dg(x) = -D_2f(x, g(x))^{-1}D_1f(x, g(x)) \quad \text{para todo } x \in V.$$

Si f es de clase C^k , entonces g es de clase C^k también. □

Definición 1.22. Sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde U es un abierto de \mathbb{R}^n , una aplicación de clase C^1 , así que $Df: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es continua. El **rango de f en un punto $x \in U$** es el rango de la aplicación lineal $Df(x)$. Este rango es, a su vez, el número de columnas linealmente independientes en la matriz⁹ de $Df(x)$; o bien, el mayor $r \in \mathbb{N}$ tal que esa matriz tenga un menor $r \times r$ diferente de 0. Por la continuidad de Df , hay un vecindario V de x tal que, para $y \in V$, los mismos menores de $Df(y)$ no sean ceros, así que el rango de $Df(y)$ es mayor o igual que el rango de $Df(x)$. En otras palabras,¹⁰ el conjunto $\{y \in U : \text{rango } Df(y) \geq \text{rango } Df(x)\}$ es un abierto de \mathbb{R}^n . ◇

Teorema 1.23 (del rango). *Sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función de clase C^k definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, de rango constante \underline{r} en un vecindario abierto de un punto $x \in U$. Entonces hay un vecindario abierto V de x en U y un vecindario abierto W de $f(x)$ en \mathbb{R}^m , junto con*

⁹Con respecto a bases cualesquiera de \mathbb{R}^n y de \mathbb{R}^m .

¹⁰Dícese que la función $\text{rango } Df: U \rightarrow \mathbb{N}$ es **semicontinua superiormente** (si f es de clase C^1).

biyecciones $\phi: V \rightarrow \phi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\psi: W \rightarrow \psi(W) \subseteq \mathbb{R}^m$ con $\phi, \phi^{-1}, \psi, \psi^{-1}$ todos de clase C^k , tales que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(V) \rightarrow \psi(W)$ tenga la forma

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}: (y^1, \dots, y^n) = (y^1, \dots, y^r, 0, \dots, 0), \quad \text{para todo } y \in \phi(V). \quad \square$$

Está claro que la aplicación $Df(x)$, de rango r , tenga una matriz $m \times n$ con un bloque 1, y otros bloques de ceros, al elegir bases apropiadas de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m para colocar esa matriz en una “forma escalonada”, por un algoritmo conocido del álgebra lineal. El teorema del rango afirma que la función f puede ser “rectificada” por cambios de coordenadas locales apropiadas, representadas por las funciones ϕ y ψ , de tal manera que este algoritmo sea aplicable simultáneamente en un vecindario del punto x . Evidentemente, esto sólo es posible si el rango de f es constante en dicho vecindario.

► ¿Cómo definir una aplicación diferenciable entre dos variedades que no necesariamente son abiertos de espacios euclidianos? Las cartas locales permiten llevar la discusión al ámbito de la situación clásica: esa circunstancia sirve para *definir* la diferenciabilidad.

Definición 1.24. Sean M, N dos variedades diferenciales de dimensiones respectivas n y m . Una aplicación continua $f: M \rightarrow N$ es **suave**, o *indefinidamente diferenciable*, si para cada par de cartas locales (U, ϕ) para M y (V, ψ) para N , la composición

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V) \quad (1.7)$$

es una aplicación suave entre abiertos euclidianos; véase la Figura 1.3. \diamond

Si $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ y $\mathfrak{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ son atlas sobre M y N respectivamente, entonces $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un cubrimiento abierto de M y $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ es un cubrimiento abierto de N . Como f es continua, las preimágenes $f^{-1}(V_\beta)$ cubren M con abiertos; las $U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)$ forman un cubrimiento abierto de M que refina los primeros dos. Luego, todas las aplicaciones (1.7) son suficientes para determinar el comportamiento de la función original $f: M \rightarrow N$.

Es posible definir, de igual manera, el concepto de una *aplicación de clase C^k* entre dos variedades. Dícese que $f: M \rightarrow N$ es de clase C^k si y solo si todas las aplicaciones de (1.7) entre abiertos euclidianos son de clase C^k . Para simplificar la exposición, en este curso se considera únicamente funciones suaves, que son de clase C^∞ en este sentido.

Definición 1.25. Un **difeomorfismo** entre dos variedades diferenciales M y N es una aplicación biyectiva y suave $f: M \rightarrow N$ cuya función inversa $f^{-1}: N \rightarrow M$ también es suave. Dos variedades M y N se llaman **difeomorfas** si existe un difeomorfismo de M en N . \diamond

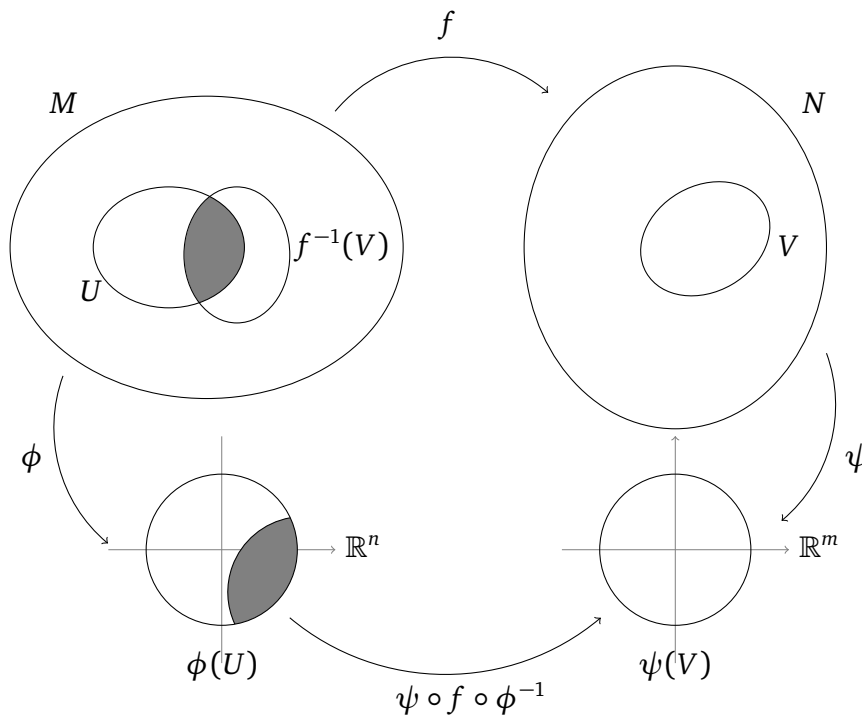


Figura 1.3: Una versión local de una función suave

Ejemplo 1.26. Sea $\mathbb{B}^n \equiv B(0, 1) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ la bola abierta unitaria de \mathbb{R}^n (con respecto a la norma euclidiana). La función biyectiva $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$f(x) := \frac{2x}{1 - \|x\|^2}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{1 + \sqrt{1 + \|y\|^2}}$$

es suave y f^{-1} también es suave, como se verifica fácilmente. En este caso no es necesario usar cartas locales porque los dominios y codominios son abiertos de \mathbb{R}^n . Por lo tanto, la bola \mathbb{B}^n es difeomorfa al espacio total \mathbb{R}^n . \diamond

Ejemplo 1.27. Una función suave $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ puede tener soporte compacto sin ser idénticamente nula.¹¹ Si $a < b$ en \mathbb{R} , considérese la función f dada por

$$f(t) := e^{-1/(b-t)(t-a)} \llbracket a < t < b \rrbracket.$$

El empleo de la notación de Iverson y Knuth indica que $f(t) = 0$ para $t \leq a$ o $t \geq b$. Se verifica fácilmente que f alcanza su máximo en $\frac{1}{2}(a + b)$, que es creciente en el intervalo

¹¹El **soporte** $\text{sop } f$ de una función $f: X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos es un cerrado de X , definido como sigue: su complemento $X \setminus (\text{sop } f)$ es la unión de los abiertos de X en donde f se anula, o bien, lo que es lo mismo, es el mayor abierto de X en donde f se anula idénticamente.

$a < t < \frac{1}{2}(a + b)$ y decreciente en $\frac{1}{2}(a + b) < t < b$, y que $f^{(r)}(a) = f^{(r)}(b) = 0$ para todo $r \in \mathbb{N}$. También es evidente que $\text{sop}(f) = [a, b]$, un intervalo compacto.

Considérese también su integral indefinida normalizada:

$$g(t) := \frac{\int_{-\infty}^t f(s) ds}{\int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds}.$$

Está claro que $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave tal que $g(t) = 0$ para $t \leq a$ y $g(t) = 1$ para $t \geq b$. \diamond

El ejemplo anterior permite definir una función suave $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes características. Dado un punto $x \in \mathbb{R}^n$ y dos números reales a, b con $0 \leq a < b$, se requiere que

$$\begin{aligned} h(y) &= 1 & \text{para } \|y - x\| \leq a, \\ 0 < h(y) < 1 & \text{para } a < \|y - x\| < b, \\ h(y) &= 0 & \text{para } \|y - x\| \geq b. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Basta definir $h(y) := 1 - g(\|y - x\|^2)$ para la función g del Ejemplo 1.27.

Si U es un abierto en \mathbb{R}^n , entonces que $U = \bigcup_k U_k$ es una unión numerable – tal vez finita – donde cada $U_k = B(x_k, r_k)$ es una bola abierta con centro $x_k \in U \cap \mathbb{Q}^n$ y radio racional $r_k \in (0, +\infty) \cap \mathbb{Q}$. Entonces, por (1.8), hay una función suave $h_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h_k(y) > 0$ para $y \in U_k$ pero $h_k(z) = 0$ para $z \notin U_k$.

En la bola cerrada $\bar{U}_k = \bar{B}(x_k, r_k)$, las funciones continuas $|\partial^r h_k / \partial x^r|$ alcanzan un máximo, para cada multiíndice $r \in \mathbb{N}^n$. Defínase

$$M_k := \sup \left\{ \left| \frac{\partial^r h_k}{\partial x^r} \right| : x \in \mathbb{R}^n, |r| \leq k \right\},$$

notando que el lado derecho se anula fuera de U_k , así que el supremo se alcanza efectivamente en \bar{U}_k . Entonces la función definido por la siguiente serie:

$$h(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k M_k} h_k(x)$$

converge uniformemente en todo \mathbb{R}^n . Además, al reemplazar cada h_k al lado derecho por su derivada parcial $\partial^r h_k / \partial x^r$ la serie correspondiente converge uniformemente a $\partial^r h / \partial x^r$, lo cual muestra que h es de clase C^∞ en \mathbb{R}^n . Por su construcción, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave que se anula fuera de U y cumple $h(y) > 0$ para $y \in U$.

Lema 1.28. Si A y B son dos partes cerradas de \mathbb{R}^n con $A \cap B = \emptyset$, entonces hay una función suave $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 & \text{para } x \in A, \\ 0 < f(x) < 1 & \text{para } x \notin (A \uplus B), \\ f(x) &= 0 & \text{para } x \in B. \end{aligned}$$

Demostración. Los complementos $U := \mathbb{R}^n \setminus A$ y $V := \mathbb{R}^n \setminus B$ son dos abiertos que cubren \mathbb{R}^n . Con la construcción anterior, se puede fabricar dos funciones suaves $g, h: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ tales que $h(x) = 0$ si y sólo si $x \in A$, y $g(x) = 0$ si y sólo si $x \in B$. Entonces $g(x) + h(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ pues $U \cup V = \mathbb{R}^n$. Luego, la función

$$f(x) := \frac{g(x)}{g(x) + h(x)} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

es suave y no negativa; cumple $f(x) = 1$ si y solo si $h(x) = 0$ si y solo si $x \in A$; y cumple $f(x) = 0$ si y solo si $g(x) = 0$ si y solo si $x \in B$. \square

► Si M es una variedad diferencial, una aplicación continua $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ es suave si y solo si $f \circ \phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ es suave, para cada carta local (U, ϕ) de M . La totalidad de aplicaciones suaves de M en \mathbb{R} es entonces un álgebra real, es decir, un espacio \mathbb{R} -vectorial con un producto asociativo compatible con las operaciones de suma y multiplicación escalar:

$$\underline{f + g}(p) := f(p) + g(p); \quad \underline{fg}(p) := f(p)g(p); \quad \underline{tf}(p) := tf(p) \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Para comprobar que el producto puntual fg de dos funciones suaves es otra función suave, basta recordar que eso se verifica para funciones suaves en abiertos de \mathbb{R}^n y aplicar la fórmula de composición:

$$(fg) \circ \phi^{-1} = (f \circ \phi^{-1})(g \circ \phi^{-1}).$$

Esta álgebra será denotada por $C^\infty(M)$, o bien por $C^\infty(M, \mathbb{R})$ si se quiere precisar que los escalares son reales.

Una función con valores complejos $h: M \rightarrow \mathbb{C}$ es suave (por definición) si sus partes real e imaginaria $\Re h: M \rightarrow \mathbb{R}$, $\Im h: M \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones reales suaves. Ellas forman un álgebra compleja $C^\infty(M, \mathbb{C})$ con las mismas operaciones puntuales.

Definición 1.29. Si (U, ϕ) es una carta local para una variedad M , se puede suponer, sin perder generalidad, que $0 \in \phi(U)$. Llámese p al punto de U tal que $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Para cualquier $q \in U$, sean (x^1, \dots, x^n) las coordenadas cartesianas del vector $x := \phi(q)$.

Las funciones suaves $x^j: U \rightarrow \mathbb{R}$, para $j = 1, 2, \dots, n$, son las **coordenadas locales** de M asociadas con la carta local (U, ϕ) .

Dicho de otro modo: sea $\text{pr}_j: x \mapsto x^j$ la proyección de \mathbb{R}^n sobre \mathbb{R} que corresponde al eje coordenado número j , dado por $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n$, siendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base ortonormal estándar de \mathbb{R}^n . Las coordenadas locales son las *funciones* $x^j = \text{pr}_j \circ \phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ para $j = 1, \dots, n$, que son suaves sobre U porque cada pr_j es suave sobre \mathbb{R}^n . \diamond

Si (V, ψ) es alguna otra carta local para M con $p \in V$ tal que $\psi(p) = 0$ también, las coordenadas cartesianas del vector $y = \psi(q)$ dan otro sistema de coordenadas locales (y^1, \dots, y^n) sobre V . La transformación $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1, \dots, y^n)$ es una función vectorial de n variables que representa la aplicación

$$\psi \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V).$$

Por lo tanto, este **cambio de coordenadas locales** es una aplicación suave. Su derivada es la matriz de derivadas parciales, de $\phi(U \cap V)$ en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$:

$$D(\psi \circ \phi^{-1}) = \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right], \quad \text{con determinante } J(\psi \circ \phi^{-1}) := \left| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right| \neq 0.$$

Este determinante, el **acobiano** de $\psi \circ \phi^{-1}$, no se anula en $\phi(U \cap V)$ porque la matriz $D(\psi \circ \phi^{-1})$ es invertible, por la regla de la cadena (1.4) aplicada a las funciones inversas $\psi \circ \phi^{-1}$ y $\phi \circ \psi^{-1}$.

Ejemplo 1.30. Para el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ del Ejemplo 1.14, llámese (y^1, y^2) a las coordenadas locales de la carta local (U_1, ϕ_1) y (z^1, z^2) a las coordenadas locales de la carta local (U_2, ϕ_2) . Entonces resulta que $z^1 = 1/y^1$, $z^2 = y^2/y^1$ en el dominio común $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y^2) : y^2 \in \mathbb{R}\}$. Entonces

$$D(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) = \begin{pmatrix} -1/(y^1)^2 & 0 \\ -y^2/(y^1)^2 & 1/y^1 \end{pmatrix}, \quad J(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) = -\frac{1}{(y^1)^3} \neq 0.$$

Obsérvese que en este caso $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ es **disconexo**,¹² por ser la unión disjunta de dos semiplanos abiertos $y^1 > 0$ y $y^1 < 0$. En uno de ellos el jacobiano tiene signo negativo y en el otro tiene signo positivo. Esta situación es incómoda, pero es un artefacto del cubrimiento abierto $\mathbb{R}P^2 = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ usado para el atlas minimal de tres cartas. Al usar cartas con dominios menos extensos, pero compatibles con el atlas original, se podría haber llegado a cambios de coordenadas cuyos jacobianos tuvieran un signo definido. \diamond

¹²Un espacio topológico X es **disconexo** si $X = U \cup V$ es la unión disjunta de dos abiertos no vacíos $U \neq \emptyset$ y $V \neq \emptyset$. El plano \mathbb{R}^2 menos una recta es desconexo: los dos semiplanos a cada lado de la recta forman una desconexión. Por el contrario, dicese que X es **conexo** si no es desconexo. Un teorema de topología asegura que la imagen continua de un espacio conexo es también conexo.

1.3 Vectores tangentes

Una superficie suave en \mathbb{R}^3 posee en cada uno de sus puntos un *plano tangente*; se pretende ahora generalizar este concepto a variedades de cualquier dimensión, no necesariamente encajadas en un espacio euclidiano ambiente. Un plano tangente a una superficie es un espacio afín: desde el punto de contacto con la superficie a cualquier punto del plano tangente se puede trazar un *vector tangente*. Este vector juega un papel doble: por un lado, representa la velocidad de una curva en la superficie que atraviesa el punto de contacto; pero también puede verse como una derivada direccional, en el punto de contacto, de las funciones diferenciables sobre la superficie.

Definición 1.31. Si M es una variedad diferencial y si $p \in M$, considérese las funciones suaves definidos cerca de p pero no necesariamente en todo M . Una tal función $f : V_f \rightarrow \mathbb{R}$ posee un dominio V_f que es un vecindario abierto de p pero puede depender de f , y la función f es suave en ese dominio: si (U, ϕ) es una carta de M con $p \in U$, entonces $\phi(U \cap V_f)$ es abierto en \mathbb{R}^n y $f \circ \phi^{-1}$ debe ser suave en ese dominio.

Denótese por $C^\infty(M, p)$ la totalidad de dichas funciones. Si $f, g \in C^\infty(M, p)$, $t \in \mathbb{R}$, tómesese $V_{tf} := V_f$ y $V_{f+g} = V_{fg} := V_f \cap V_g$; sobre estos vecindarios de p se definen las funciones tf , $f + g$ y fg , respectivamente. De este manera, $C^\infty(M, p)$ resulta ser un álgebra real conmutativa que incluye $C^\infty(M)$. De hecho, $C^\infty(M)$ es la intersección de todas las $C^\infty(M, p)$, para $p \in M$.

Las coordenadas locales x^1, \dots, x^n introducidas en la Definición 1.29 son elementos del álgebra $C^\infty(M, p)$. ◇

Definición 1.32. Sea M una variedad diferencial de dimensión n y sea $p \in M$. Un **vector tangente en p** es una forma \mathbb{R} -lineal $\nu : C^\infty(M, p) \rightarrow \mathbb{R}$, es decir,

$$\left. \begin{aligned} \nu(f + g) &= \nu(f) + \nu(g) \\ \nu(tf) &= t \nu(f) \end{aligned} \right\} \text{ para } f, g \in C^\infty(M, p), t \in \mathbb{R}; \quad (1.9a)$$

que además cumple la siguiente *regla de Leibniz local*:

$$\nu(fg) = \nu(f)g(p) + f(p)\nu(g) \quad \text{para todo } f, g \in C^\infty(M, p). \quad (1.9b)$$

La totalidad de vectores tangentes en p es un espacio \mathbb{R} -vectorial, denotado T_pM . ◇

Lema 1.33. Sea $\nu \in T_pM$. Si $f, g \in C^\infty(M, p)$ coinciden en un vecindario de p , entonces $\nu(f) = \nu(g)$. Si $c \in C^\infty(M, p)$ es constante en un vecindario de p , entonces $\nu(c) = 0$.

Demostración. Sea (U, ϕ) una carta local de M con $p \in U$ y sea V un abierto de M con $p \in \bar{V} \subset U \cap V_f \cap V_g$ tal que $f(q) = g(q)$ para todo $q \in V$. Por el Lema 1.28, hay una

función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ tal que $F(\phi(q)) = 1$ para $q \in V$ y $F(y) = 0$ para $y \notin \phi(U)$. Defínase $h \in C^\infty(M, p)$ con $V_h = U$ por $h(q) := F(\phi(q))$, de tal manera que $h(q) = 1$ para $q \in V$. Resulta entonces que $(f - g)h = 0$ en $C^\infty(M, p)$. De las propiedades (1.9) se obtiene

$$0 = v((f - g)h) = (v(f) - v(g))1 + (f(p) - g(p))v(h) = v(f) - v(g)$$

para todo $v \in T_p M$.

Se puede suponer, entonces, que c es una función constante definido en todo M . Luego, si $f \in C^\infty(M, p)$, se verifica

$$c(p)v(f) = v(c(p)f) = v(cf) = v(c)f(p) + c(p)v(f),$$

así que $v(c)f(p) = 0$, cualquiera que sea $f(p)$; lo cual implica que $v(c) = 0$. \square

Proposición 1.34. $T_p M$ es un espacio \mathbb{R} -vectorial de dimensión finita: $\dim T_p M = \dim M$.

Demostración. Sea (U, ϕ) una carta local de M tal que $\phi(p) = 0$. Las coordenadas locales x^1, \dots, x^n asociadas con esta carta son elementos de $C^\infty(M, p)$. Denótese por $\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$, para $j = 1, \dots, n$, la forma \mathbb{R} -lineal sobre $C^\infty(M, p)$ dada por

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p : f \mapsto \partial_j(f \circ \phi^{-1})(0), \quad (1.10)$$

donde ∂_j denota la j -ésima derivada parcial ordinaria de una función de clase C^1 sobre un abierto de \mathbb{R}^n , en este caso el abierto $\phi(U \cap V_f)$, que contiene 0. La regla del producto para tales derivadas parciales implica que

$$\partial_j(fg \circ \phi^{-1})(0) = \partial_j(f \circ \phi^{-1})(0)g(p) + f(p)\partial_j(g \circ \phi^{-1})(0),$$

así que $\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \in T_p M$.

Al tomar $f = x^k$ para $k = 1, \dots, n$, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (x^k) = \llbracket j = k \rrbracket,$$

de donde se ve que $\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p$ son linealmente independientes en $T_p M$.

Para $v \in T_p M$ cualquiera, escríbase $v^k := v(x^k)$. Si $f \in C^\infty(M, p)$, el Lema 1.5 muestra que la función suave $f \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap V_f) \rightarrow \mathbb{R}$ puede expresarse en la forma¹³

$$(f \circ \phi^{-1})(\phi(q)) = (f \circ \phi^{-1})(0) + x^j(q)g_j(\phi(q))$$

¹³Hay una suma implícita sobre $j = 1, \dots, n$, por el convenio de Einstein.

donde cada $g_j: \phi(U \cap V_f) \rightarrow \mathbb{R}$ es suave y $g_j(0) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (f)$. En consecuencia, se verifica $f = c + x^j(g_j \circ \phi)$ en $C^\infty(M, p)$, donde c es una constante. Como $v(c) = 0$, y cada $x^j(p) = 0$, se obtiene la *regla de Leibniz*:

$$v(f) = v(x^j) g_j(0) = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (f).$$

Como f es arbitrario, se obtiene la combinación lineal $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$. Por ende, los n vectores tangentes $\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ forman una base para $T_p M$, de donde $\dim T_p M = n$. \square

Definición 1.35. Una **curva** suave en una variedad diferencial M es una aplicación continua $\gamma: I \rightarrow M$, donde $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado¹⁴ de \mathbb{R} , tal que γ sea suave en el interior (a, b) . \diamond

Fíjese que la curva es la aplicación γ misma y no el conjunto imagen $\gamma(I) \subseteq M$, el cual es la *trayectoria* de la curva. Por ejemplo, si $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ se define por $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$, la trayectoria es el círculo \mathbb{S}^1 , pero la curva es el recorrido de ese círculo, infinitas veces en sentido contrario a reloj.

Definición 1.36. Sea M una variedad diferencial con $p \in M$, y sea $\gamma: I \rightarrow M$ una curva en M con $\gamma(t_0) = p$. La siguiente receta¹⁵ define un vector tangente en $T_p M$:

$$f \mapsto (f \circ \gamma)'(t_0) := \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (f \circ \gamma)(t).$$

El vector tangente será denotado por $\dot{\gamma}(t_0)$, de modo que

$$\langle \dot{\gamma}(t_0), f \rangle := (f \circ \gamma)'(t_0), \quad (1.11)$$

Este $\dot{\gamma}(t_0)$ se llama la **derivada direccional en p a lo largo de la curva γ** . \diamond

Definición 1.37. Sea $f: M \rightarrow N$ una aplicación suave entre dos variedades diferenciales. Para cada $p \in M$, la **aplicación tangente** $T_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es la aplicación \mathbb{R} -lineal determinado por:

$$T_p f(v): h \mapsto v(h \circ f) \quad \text{para } v \in T_p M, h \in C^\infty(N, f(p)).$$

Obsérvese que $T_p f(v) \in T_{f(p)} N$, puesto que

$$\begin{aligned} T_p f(v)(hk) &= v(hk \circ f) = v((h \circ f)(k \circ f)) \\ &= v(h \circ f) k(f(p)) + h(f(p)) v(k \circ f). \end{aligned} \quad \diamond$$

¹⁴Se permiten los casos $a = -\infty$ y $b = +\infty$, excluyendo los extremos en tales casos.

¹⁵Si t_0 es un extrema del intervalo I , se usa la derivada unilateral correspondiente en $t = t_0$.

Lema 1.38. Si $f : M \rightarrow N$ es una aplicación suave, si (x^1, \dots, x^n) y (y^1, \dots, y^m) son coordenadas locales para cartas (U, ϕ) de M y (V, ψ) de N con $\phi(p) = \psi(f(p)) = 0$, la matriz de la aplicación tangente $T_p f$ con respecto a la base (1.10) de $T_p M$ y la base análoga de $T_{f(p)} N$ es la matriz de derivadas parciales de la expresión local de f en el origen:

$$\left[\frac{\partial f^k}{\partial x^j} \Big|_p \right] := \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (y^k \circ f) \right] = D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(0). \quad (1.12)$$

Demostración. Por su definición, $T_p f$ obedece

$$T_p f \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) : y^k \mapsto \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (y^k \circ f) = \partial_j (y^k \circ f \circ \phi^{-1})(0).$$

Esta es la entrada (k, j) de la matriz de derivadas parciales en 0 de $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$. \square

Lema 1.39 (Regla de la cadena). Si $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow R$ son aplicaciones suaves entre variedades, y si $p \in M$, entonces la aplicación tangente $T_p(g \circ f)$ está dada por:

$$T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_p f. \quad (1.13)$$

Demostración. Elijanse cartas locales (U, ϕ) para M , (V, ψ) para N y (W, χ) para R , con $p \in U$, $f(p) \in V$ y $g(f(p)) \in W$. Sin perder generalidad, se puede suponer que $\phi(p) = 0$ y que $\psi(f(p)) = 0$. Sean $F := \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ y $G := \chi \circ g \circ \psi^{-1}$ las expresiones locales de f y g entre los dominios apropiados. La regla de cadena ordinaria (1.4) aplicada a F y G en el punto $0 = \phi(p)$, produce la multiplicación de matrices (1.12) que corresponde con la composición de aplicaciones lineales (1.13). \square

1.4 Subvariedades

Definición 1.40. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación suave entre dos variedades. Dícese que f es una **inmersión** si para todo $p \in M$, la aplicación tangente $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es *inyectiva*.

Si $f : M \rightarrow N$ es una inmersión y si además $f : M \rightarrow f(M) \subseteq N$ es un homeomorfismo, f se llama un **encaje** (*embedding*, en inglés; *plongement*, en francés).

Una aplicación suave $g : M \rightarrow N$ es una **sumersión** si para todo $p \in M$, la aplicación tangente $T_p g$ es *sobreyectiva*.¹⁶ \diamond

¹⁶En algunos textos en español, se aplica el vocablo *sumersión* a un encaje, lo cual puede causar cierta confusión. Este error lingüístico posiblemente se debe al libro de Santaló (ver la bibliografía).

Si $f : M \rightarrow N$ es una inmersión y una sumersión a la vez, es decir, si cada aplicación tangente $T_p f$ es biyectiva, entonces $\dim M = \dim N$ y la matriz (1.12) es invertible para cada $p \in M$. Por el *teorema de la función inversa*, hay un vecindario abierto O de $\phi(p)$ en \mathbb{R}^n en el cual la aplicación suave $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es uno-a-uno y posee un inverso suave. Luego f es inyectiva y posee un inverso suave, en el sentido de la Definición 1.24, en el vecindario abierto $W = \phi^{-1}(O)$ de p en M . En tales circunstancias, f resulta ser un **difeomorfismo local**.

Ejemplo 1.41. La función $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 : e^{i\theta} \mapsto e^{2i\theta}$ es dos-a-uno y por lo tanto no es un difeomorfismo. La aplicación tangente $T_1 f$ se calcula así. Sean $U := \{e^{i\theta} : -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ y $V := \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ y defínase $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ por $\phi(e^{i\theta}) := \theta$ y $\psi(e^{i\theta}) := \theta$. La expresión local de f con estas cartas es $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \theta \mapsto 2\theta$, así que $T_1 f$ es la aplicación lineal $v \mapsto 2v$, la cual es biyectiva.

Si $p = e^{i\alpha} \neq 1$, es posible adaptar este cálculo con rotaciones apropiadas de U y V para comprobar que $T_p f$ tiene el mismo formato $w \mapsto 2w$ con respecto a bases apropiadas de $T_p \mathbb{S}^1$ y $T_{p^2} \mathbb{S}^1$; en cada caso, $T_p f$ es biyectiva. En conclusión, esta *doble envoltura* del círculo es un difeomorfismo local pero no es un difeomorfismo “global”. \diamond

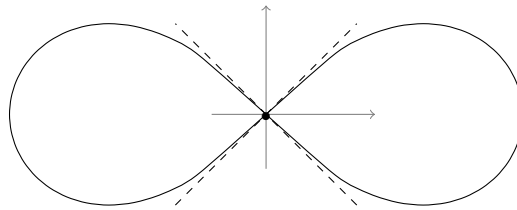


Figura 1.4: La lemniscata de Bernoulli

Ejemplo 1.42. La **lemniscata de Bernoulli** es la curva en \mathbb{R}^2 cuya trayectoria obedece la ecuación polinomial de cuarto grado:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2),$$

donde $a > 0$ es un parámetro. Esta curva se puede parametrizar por las funciones

$$x(t) := \frac{a\sqrt{2}\cos t}{1 + \sin^2 t}, \quad y(t) := \frac{a\sqrt{2}\cos t \sin t}{1 + \sin^2 t}.$$

En otras palabras, la curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) := (x(t), y(t))$ recorre la trayectoria dada (infinitas veces); para obtener un solo recorrido hay que restringir γ a un intervalo de longitud 2π , por ejemplo $[0, 2\pi)$. Esta parametrización es *regular* porque $\gamma'(t) \neq (0, 0)$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces el vector tangente $\dot{\gamma}(t) : v \mapsto \gamma'(t)v$ no se anula en el punto $\gamma(t)$ de la curva. Luego cada $\dot{\gamma}(t)$ es uno-a-uno, así que γ es una inmersión de \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 .

Sin embargo, la curva γ no es un encaje. Aun cuando se considera la restricción de γ a una función suave del intervalo abierto $(0, 2\pi)$ al abierto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a\sqrt{2}, 0)\}$ en el plano, esta tampoco es un encaje porque no es uno-a-uno, como evidencia el *punto doble* $(0, 0) = \gamma(\pi/2) = \gamma(3\pi/2)$: véase la Figura 1.4. \diamond

Definición 1.43. Sean M y R dos variedades diferenciales con $R \subseteq M$ y con $\dim R \leq \dim M$; sea $i : R \hookrightarrow M$ la aplicación de inclusión. Dícese que R es una **subvariedad** de M con $\dim R = r$ si para cada $p \in R$ hay una carta local (U, ϕ) de M , con $p \in U$ y $\phi(p) = 0$, tal que

$$R \cap U = \{ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0) : x \in \mathbb{R}^r \text{ con } (x, 0) \in \phi(U) \}. \quad (1.14)$$

Aquí se ha abreviado $(x, 0) \equiv (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0)$. En tal caso, la expresión local de i , la cual es $\phi \circ i|_{R \cap U} \circ \phi^{-1}$, coincide con la inclusión $x \mapsto (x, 0) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$, y por tanto la aplicación i es una inmersión. \diamond

Proposición 1.44. Sea $f : M \rightarrow N$ una sumersión y sea S una subvariedad de N . Entonces $R = f^{-1}(S)$ es una subvariedad de M , de dimensión $\dim R = \dim M - \dim N + \dim S$.

Demostración. Escribese $n = \dim M$, $m = \dim N$, $s = \dim S$; entonces $n \geq m \geq s$. Tómesese $p \in R$ y sea $q := f(p) \in S$. Hay una carta local (V, ψ) para N con $q \in V$, $\psi(q) = 0$, tal que $S \cap V = \psi^{-1}(\mathbb{R}^s \cap \psi(V))$.¹⁷

Si (U, ϕ) es una carta local en M con $p \in U$, $\phi(p) = 0$, la aplicación $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es suave y su derivada es sobreyectiva en cada punto de $\phi(U)$. Por el teorema del rango (Teorema 1.23), se puede modificar las cartas [reemplazando ϕ por $\phi_1 \circ \phi$ y ψ por $\psi_1 \circ \psi$ si fuera necesario, con difeomorfismos apropiados ϕ_1 y ψ_1 entre abiertos de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente] de tal manera que la aplicación modificada $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ tenga la forma $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^m)$. Entonces

$$\begin{aligned} \phi(R \cap f^{-1}(V)) &= (\phi \circ f^{-1})(S \cap V) = (\psi \circ f \circ \phi^{-1})^{-1}(\mathbb{R}^s \cap \psi(V)) \\ &= \mathbb{R}^{n-m+s} \cap \phi(f^{-1}(V)), \end{aligned}$$

de modo que $(f^{-1}(V), (\psi \circ f) \times 1_{n-m})$ resulta ser una carta local para M con $p \in f^{-1}(V)$. Esta carta local cumple la condición (1.14). Se concluye que R es una subvariedad de M , de dimensión $n - m + s$. \square

¹⁷Aquí hay algún abuso de notación, al identificar \mathbb{R}^s con su imagen en \mathbb{R}^n bajo la inclusión $x \mapsto (x, 0)$.

Corolario 1.45. Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función suave, un elemento $a \in f(M)$ es un **valor regular** de f si $T_p f$ es sobreyectiva toda vez que cada $f(p) = a$. Dado un valor regular a de f , la preimagen

$$f^{-1}(a) = \{p \in M : f(p) = a\}$$

es una subvariedad de M , de dimensión $n - m$.

Demostración. El punto $\{a\}$ es una subvariedad de \mathbb{R}^m de dimensión 0. La hipótesis dice que la aplicación lineal $T_p f$ tiene rango maximal $n - m$ para cada $p \in f^{-1}(a)$.

Cada expresión local $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ con $\phi(p) = 0$ tiene derivada $D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de rango maximal en $x = 0$. El rango de una matriz es el número de columnas linealmente independientes: si hay $n - m$ columnas independientes en $x = 0$, habrá $n - m$ columnas independientes para x en un vecindario W_p de 0, porque los menores de la matriz $D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x)$ son funciones continuas de x .

La unión $V := \bigcup_{f(p)=a} f^{-1}(W_p)$ es un abierto de M que incluye $f^{-1}(a)$, y se ha comprobado que $f|_V : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una sumersión. El resultado ahora sigue de la Proposición 1.44; la dimensión de la subvariedad $f^{-1}(a)$ de V [y por ende de M] es $n - m + 0$. \square

Ejemplo 1.46. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es el polinomio cuadrático $f(x) := (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2$, entonces la esfera $\mathbb{S}^{n-1} = f^{-1}(1)$ es una subvariedad de \mathbb{R}^n , de dimensión $n - 1$. \diamond

Ejemplo 1.47. Sea $M_n(\mathbb{R})$ el álgebra de matrices $n \times n$ reales. Su dimensión como espacio \mathbb{R} -vectorial es n^2 ; en efecto, las entradas individuales a_{ij} de la matriz $A = [a_{ij}]$ forman un sistema de coordenadas cartesianas para $M_n(\mathbb{R})$. El grupo $GL(n, \mathbb{R})$ de matrices *invertibles* $n \times n$ es un abierto en este espacio vectorial, y como tal es una variedad diferencial de dimensión n^2 . Además, está claro que

$$GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Fíjese que la función determinante $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es un polinomio en las entradas matriciales y como tal es una función suave. En particular, es una función continua, así que la preimagen de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un abierto en $M_n(\mathbb{R})$. \diamond

Ejemplo 1.48. El subgrupo de las matrices en $GL(n, \mathbb{R})$ de determinante 1 es

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}.$$

Resulta que 1 es un valor regular de la función \det , así que $SL(n, \mathbb{R})$ es una subvariedad de $M_n(\mathbb{R})$, de dimensión $(n^2 - 1)$. \diamond

Ejemplo 1.49. Otro subgrupo importante de $GL(n, \mathbb{R})$ es el llamado **grupo ortogonal**,

$$O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t A = AA^t = 1_n\}, \quad (1.15)$$

donde A^t es la matriz transpuesta de A y 1_n denota la matriz identidad $n \times n$. Cada matriz ortogonal es invertible, con $A^{-1} = A^t$, por su definición. Además, como $\det A^t = \det A$, se ve que $(\det A)^2 = 1$ y por ende $\det A = \pm 1$ para $A \in O(n)$.

Considérese también el conjunto de las matrices reales *simétricas*,

$$\text{Sim}(n) := \{X \in M_n(\mathbb{R}) : X^t = X\},$$

el cual es un espacio vectorial real – y por ende una variedad diferencial con una sola carta local – de dimensión $n(n+1)/2$; sus coordenadas son las entradas supradiagonales $\{x_{rs} : r \leq s\}$. Defínase $f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sim}(n)$ por $f(A) := A^t A$, de modo que $O(n) = f^{-1}(1_n)$. Es evidente que f es suave porque cada componente de la función vectorial f es un polinomio en las entradas de A .

Como $GL(n, \mathbb{R})$ es un abierto en un espacio \mathbb{R} -vectorial, no hace falta pasar a expresiones locales (1.12) para calcular la aplicación tangente $T_B f$ en el punto $B = 1_n$. Su matriz tiene entrada (rs, ij) , con $r \leq s$, igual a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \Big|_{A=1_n} \left(\sum_{k=1}^n a_{kr} a_{ks} \right) &= \sum_{k=1}^n \llbracket i = k \rrbracket \llbracket j = r \rrbracket \llbracket k = s \rrbracket + \llbracket k = r \rrbracket \llbracket i = k \rrbracket \llbracket j = s \rrbracket \\ &= \llbracket i = s \rrbracket \llbracket j = r \rrbracket + \llbracket i = r \rrbracket \llbracket j = s \rrbracket, \end{aligned}$$

al notar que la entrada (k, s) de 1_n es $\llbracket k = s \rrbracket$. Esta expresión vale 1 si $r < s$ y si $(i, j) = (r, s)$ o bien $(j, i) = (r, s)$; vale 2 si $r = s$ con $i = j = r$; y vale 0 en otros casos.

Entonces se puede escribir la matriz de $T_{1_n} f$ en dos bloques $[P | Q]$, donde P reúne las columnas con $i \leq j$ y Q se compone de columnas con $i > j$; el bloque P es una *matriz cuadrada diagonal* con entradas diagonales 1 y 2. Esta “forma escalonada” de $T_{1_n} f$ evidencia que $\text{rango}[P | Q] = \text{rango}(P) = n(n+1)/2$, así que la matriz rectangular de $T_{1_n} f$ tiene rango maximal y por ende $T_{1_n} f$ es sobreyectivo.

Un cálculo directo del rango de $T_B f$, para $B \neq 1_n$ en $GL(n, \mathbb{R})$, es factible pero engorroso. En su lugar, se puede aprovechar la operación de grupo (la multiplicación matricial) en $GL(n, \mathbb{R})$. Es cuestión de notar que

$$f(A) = A^t A = B^t B^{-t} A^t A B^{-1} B = R_B L_{B^t} f(AB^{-1}), \quad (1.16)$$

donde las operaciones matriciales de *premultiplicación* $L_{B^t} : C \mapsto B^t C$ y *postmultiplicación* $R_B : C \mapsto CB$ son transformaciones lineales de $M_n(\mathbb{R})$. La relación (1.16) puede ser reescrito en la forma

$$f = R_B \circ L_{B^t} \circ f \circ R_{B^{-1}}$$

y la regla de la cadena (1.13) ahora dice que

$$T_B f = T_{B^t}(R_B) \circ T_{1_n}(L_{B^t}) \circ T_{1_n} f \circ T_B(R_{B^{-1}}) = R_B \circ L_{B^t} \circ T_{1_n} f \circ R_{B^{-1}}.$$

(La derivada de una función lineal L es la función constante de valor L .) Las operaciones lineales que aparecen al lado derecho son invertibles (por ejemplo, el inverso de R_B es $R_{B^{-1}}$) y $T_{1_n} f$ es sobreyectivo, así que $T_B f$ es también sobreyectivo para todo $B \in GL(n, \mathbb{R})$.

Se ha comprobado que f es una *sumersión* de $GL(n, \mathbb{R})$ en $\text{Sim}(n)$. Luego 1_n es un valor regular de f y su preimagen $O(n) := f^{-1}(1_n)$ es una subvariedad de $GL(n, \mathbb{R})$, en vista del Corolario 1.45. Ese corolario también proporciona su dimensión:

$$\dim O(n) = \dim GL(n, \mathbb{R}) - \dim \text{Sim}(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (1.17)$$

El grupo $O(n)$ es una *variedad disconexa*: el determinante $\det : O(n) \rightarrow \{1, -1\}$ es una función continua con exactamente dos valores reales. La preimagen $\det^{-1}(1)$ es a su vez una subvariedad de $O(n)$ de la misma dimensión, por el Corolario 1.45 de nuevo; es también un subgrupo, porque \det es un homomorfismo. Este subgrupo es el **grupo especial ortogonal**,

$$SO(n) := \{A \in O(n) : \det A = +1\} = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}).$$

Resulta que $SO(n)$ es conexo; este es el *componente neutro* del grupo $O(n)$. ◇

1.5 Campos vectoriales

Definición 1.50. Sea M una variedad diferencial. Un **campo vectorial** sobre M es un operador lineal $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, es decir,

$$\left. \begin{aligned} X(f+g) &= Xf + Xg \\ X(tf) &= tXf \end{aligned} \right\} \text{ para } f, g \in C^\infty(M), t \in \mathbb{R};$$

que además cumple la siguiente **regla de Leibniz**:

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg) \quad \text{para todo } f, g \in C^\infty(M). \quad (1.18)$$

Tales operadores lineales conforman un espacio \mathbb{R} -vectorial, denotado por $\mathfrak{X}(M)$. ◇

Cabe notar, en la definición anterior, la omisión de paréntesis alrededor del argumento de una aplicación lineal: se escribe Xf en vez de $X(f)$. Esta costumbre ahorra una buena cantidad de paréntesis innecesarias.

Definición 1.51. Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ define en cada punto $p \in M$ un vector tangente $X_p \in T_p M$ mediante la *evaluación en p* :

$$X_p(f) := Xf(p). \quad (1.19)$$

El vector X_p cumple la regla de Leibniz local (1.9b), al evaluar los dos lados de (1.18) en el punto p :

$$X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g). \quad \diamond$$

Si (U, ϕ) es una carta local para M con $\phi(p) = 0$, un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ define un **campo vectorial local** $X|_U \in \mathfrak{X}(U)$ por restricción. Nótese, sin embargo, que en general $C^\infty(U)$ no es una subálgebra de $C^\infty(M)$. Por ejemplo, si $M = \mathbb{R}$ y $U = (0, \infty)$, la función $t \mapsto 1/t$ en $C^\infty(0, \infty)$ no tiene una extensión suave (ni continua) a una función en $C^\infty(\mathbb{R})$. No obstante, una función en $C^\infty(U)$ que se anula en un vecindario de la frontera de U puede ser extendido a $C^\infty(M)$ al declararla igual a cero fuera de U .

Si U es un abierto en una variedad diferencial M y si $f \in C^\infty(U)$, se puede afirmar lo siguiente: para cada $x \in U$, hay un abierto V de M con $x \in V \subseteq U$ y una función suave $h \in C^\infty(M)$ tal que $h|_V = f|_V$.

Definición 1.52. Una función suave $g \in C^\infty(U)$ tiene **soporte compacto** si hay una parte compacta $K \subset U$ tal que $g(y) = 0$ para $y \in U \setminus K$. (En tal caso, el soporte $\text{sop } g$ es un cerrado incluido en K y por tanto es también compacto.) Por un teorema de topología,¹⁸ hay abiertos V, W de M tales que \bar{V} y \bar{W} son compactos, con $K \subset V \subset \bar{V} \subset W \subset \bar{W} \subset U$. Una variante del Lema 1.28, adaptado a la variedad M en vez de \mathbb{R}^n , muestra que hay una función suave $k \in C^\infty(M)$ tal que

$$\begin{aligned} k(q) &= 1 && \text{para } q \in \bar{V}, \\ 0 < k(q) < 1 && \text{para } q \in W \setminus \bar{V}, \\ k(q) &= 0 && \text{para } q \in M \setminus W. \end{aligned}$$

Defínase $h \in C^\infty(M)$ por

$$h(q) := \begin{cases} g(q)k(q) & \text{si } q \in U, \\ 0 & \text{si } q \in M \setminus U. \end{cases}$$

Entonces $h|_V = g|_V$. Nótese que $\text{sop } h \subseteq \text{sop } k = \bar{W}$, así que $h \in C^\infty(M)$ también tiene soporte compacto.

Escríbese $\mathcal{D}(U)$ – o alternativamente $C_c^\infty(U)$ – para denotar la totalidad de funciones suaves sobre U con soporte compacto. Esta es una \mathbb{R} -subálgebra de $C^\infty(U)$. \diamond

¹⁸Como M es metrizable, se puede formar V al cubrir el compacto K por una cantidad finita de bolas abiertas dentro de U , de tal manera que \bar{V} sea también compacto. Se forma W al cubrir \bar{V} del mismo modo.

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial sobre M . Tómesese $f \in C^\infty(U)$ donde U es un abierto de M . Para cada $p \in U$ hay un vecindario abierto V de p (que depende implícitamente de la función f) con $p \in V \subseteq U$, y existe $h \in C^\infty(M)$ tal que $f(q) = h(q)$ para $q \in V$. Escríbase $Xf(p) := X_p h$.

Resulta que este $Xf(p)$ está bien definido. En efecto, si W es otro vecindario abierto de p y si $k \in C^\infty(M)$ coincide con f en W , entonces $k(q) = f(q) = h(q)$ para $q \in V \cap W$, así que $X_p k = X_p h$ por el Lema 1.33, porque la función $k - h \in C^\infty(M)$ se anula en el vecindario $V \cap W$ de p .

El mismo argumento muestra que $X_q k = X_q h$ para todo q en el abierto $V \cap W$ (un abierto es un vecindario de cada uno de sus puntos). Luego los dos elementos Xh y Xk de $C^\infty(M)$, coinciden en $U \cap W$. En particular, Xf es suave en cada p en U (y por lo tanto, es una función suave en U), y coincide con Xh en V y con Xk en W .

Esta correspondencia $f \mapsto Xf$ es un operador lineal sobre $C^\infty(U)$ que además cumple una regla de Leibniz análoga a (1.18), porque los valores en cada $p \in M$ cumplen (1.9b). Este operador $X|_U: C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$ es la **restricción** de X al abierto U . Fíjese que $X|_U \in \mathfrak{X}(U)$.

No es difícil comprobar que si $g \in \mathcal{D}(U)$, entonces $Xg \in \mathcal{D}(U)$ también, y tanto g como Xg pueden ser considerados como elementos de $C^\infty(M)$, extendidos como funciones suaves que se anulan fuera de U .

► Para simplificar la discusión, se puede tomar una sola carta local (U, ϕ) de una variedad M y considerar el dominio U como subvariedad de dimensión n . Si (x^1, \dots, x^n) es el sistema de coordenadas locales asociadas con la carta (U, ϕ) , las derivadas parciales de funciones en \mathbb{R}^n proporcionan campos vectoriales en $\mathfrak{X}(U)$ por la receta:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} : f \mapsto \partial_j(f \circ \phi^{-1}) \circ \phi, \quad \text{para } f \in C^\infty(U), \quad (1.20a)$$

con $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Su linealidad sobre $C^\infty(U)$ y su regla de Leibniz son evidentes. En el punto $p = \phi(0) \in U$, los vectores tangentes correspondientes son los $\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ de (1.10), al reemplazar 0 por $\phi(p)$ en esa fórmula.

Si $q \in U$ con $q \neq p$, entonces $\phi(q) \neq 0$. Sea $A: x \mapsto x - \phi(q)$ la traslación de \mathbb{R}^n que lleva $\phi(q)$ en 0. Entonces $(U, A \circ \phi)$ es otra carta local de M , compatible con (U, ϕ) , tal que $A \circ \phi(q) = 0$. El vector tangente de (1.20a) en q resulta ser

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_q (f) = \partial_j(f \circ \phi^{-1} \circ A^{-1})(0) = \partial_j(f \circ \phi^{-1})(\phi(q)), \quad (1.20b)$$

al aplicar la regla de la cadena a la composición $(f \circ \phi^{-1}) \circ A^{-1}$, porque $A^{-1}(0) = \phi(q)$ y la derivada de la función afín A^{-1} es el operador identidad $1_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Lema 1.53. *Sea M una variedad diferencial y sea (U, ϕ) una de sus cartas locales. Entonces cualquier campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tiene restricción al dominio U de la forma*

$$X|_U = \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (1.21)$$

con coeficientes suaves $a^1, \dots, a^n \in C^\infty(U)$.

Demostración. Si $f \in C^\infty(U)$ y $q \in U$, entonces $Xf(q) = X_q(f)$ con $X_q \in T_qM$. Este vector tangente es una combinación lineal de los vectores tangentes básicos, por la Proposición 1.34; es decir,

$$X_q = \sum_{j=1}^n a^j(q) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_q \quad \text{para algunos } a^1(q), \dots, a^n(q) \in \mathbb{R}.$$

La fórmula (1.20b) muestra que

$$Xf(q) = X_q(f) = \sum_{j=1}^n a^j(q) \partial_j(f \circ \phi^{-1})(\phi(q)) = \sum_{j=1}^n a^j(q) \frac{\partial}{\partial x^j}(f)(q).$$

En resumen, se ha fabricado un juego de funciones $a^1, \dots, a^n: U \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $Xf = \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j}(f)$ para $f \in C^\infty(U)$. En particular, las coordenadas locales $x^k := \text{pr}_k \circ \phi$ son elementos del álgebra $C^\infty(U)$ que cumplen las relaciones¹⁹

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(x^k) = \llbracket j = k \rrbracket \quad \text{para } j, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Entonces, para cada $k = 1, \dots, n$, se obtiene

$$a^k = \sum_{j=1}^n a^j \llbracket j = k \rrbracket = \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^k) = X(x^k),$$

así que $q \mapsto a^k(q)$ es una función suave sobre U . De hecho, como $x^k \in C^\infty(U)$ se ve que $a^k = Xx^k \in C^\infty(U)$ también. \square

Al lado derecho de la fórmula (1.21) se puede *suprimir la sumatoria explícita* sobre j si se extiende el **convenio de Einstein** al caso, adoptando como regla que el superíndice j en el denominador de $\partial/\partial x^j$ se considera como *subíndice* de la expresión total. De hecho, si no hay ambigüedad en el sistema de coordenadas locales, se puede abreviar $\partial_j \equiv \partial/\partial x^j$, de modo que (1.21) se escribe $X|_U = a^j \partial_j$ como una expresión más corta.

¹⁹Al lado derecho, cada $\llbracket j = k \rrbracket$ es una función constante sobre U , de valor 0 o 1.

Si (V, ψ) es otra carta local de M con $U \cap V \neq \emptyset$ y si (y^1, \dots, y^n) son las coordenadas locales para la carta (U, ϕ) , entonces el campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tiene el aspecto local

$$X|_V = b^i \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{con } b^1, \dots, b^n \in C^\infty(V).$$

¿Cuál es la relación entre los coeficientes a^j y los b^i en la intersección $U \cap V$? Si se escribe $F(x) := f \circ \phi^{-1}(x)$ para $x \in \phi(U \cap V)$, entonces la regla de la cadena (ordinaria) en varias variables muestra que

$$\frac{\partial F}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial F}{\partial x^j}.$$

Este es el resultado de aplicar los siguientes campos vectoriales locales a una función suave $f \in C^\infty(U \cap V)$:

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{en la intersección } U \cap V.$$

Por lo tanto,

$$X|_{U \cap V} = b^i \frac{\partial}{\partial y^i} = b^i \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = a^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

lo cual justifica la relación:

$$a^j = b^i \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \quad \text{en } C^\infty(U \cap V).$$

Fíjese que $[\partial x^j / \partial y^i]$ es la matriz (cuyas entradas son derivadas parciales) de la derivada $D(\phi \circ \psi^{-1})$ en el dominio $\psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$. Su matriz inversa es $[\partial y^i / \partial x^j]$, la cual representa $D(\psi \circ \phi^{-1})$ en $\phi(U \cap V)$. Las últimas fórmulas exhiben diversas maneras de concretar la regla de la cadena, empleando el convenio de Einstein.

► La estructura algebraica de $\mathfrak{X}(M)$, a partir de la Definición 1.50, no es menos importante que los detalles intrincados de estas expresiones locales.

Definición 1.54. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, $g \in C^\infty(M)$, se puede definir un elemento $gX \in \mathfrak{X}(M)$ por la correspondencia $f \mapsto g(Xf)$ (el producto puntual de las funciones g y Xf), la cual es evidentemente lineal en f y cumple la regla de Leibniz. Es inmediato que la aplicación $(g, X) \mapsto gX$ es \mathbb{R} -bilineal y cumple

$$g(hX) = (gh)X \quad \text{si } X \in \mathfrak{X}(M) \text{ y } g, h \in C^\infty(M), \quad 1X = X.$$

Aquí 1 denota la función constante de valor 1 sobre M . En otras palabras, el espacio \mathbb{R} -vectorial $\mathfrak{X}(M)$ es un *módulo* (a izquierda) sobre el álgebra conmutativa $C^\infty(M)$. \diamond

Proposición 1.55. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, el **corchete**

$$[X, Y]: f \mapsto X(Yf) - Y(Xf) \quad (1.22a)$$

define un nuevo campo vectorial $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$. Este corchete cumple dos propiedades:

(a) La correspondencia $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ es bilineal y antisimétrico, $[Y, X] = -[X, Y]$.

(b) El corchete satisface la **identidad de Jacobi**:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \text{para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.22b)$$

Demostración. Ad (a): Escribese $Wf := X(Yf) - Y(Xf)$. Está claro que $f \mapsto Wf$ es \mathbb{R} -lineal y W lleva $C^\infty(M)$ en $C^\infty(M)$. Además, se verifica

$$\begin{aligned} W(fg) &= X((Yf)g + f(Yg)) - Y((Xf)g + f(Xg)) \\ &= X(Yf)g + (Yf)(Xg) + (Xf)(Yg) + f(X(Yg)) \\ &\quad - Y(Xf)g - (Xf)(Yg) - (Yf)(Xg) - f(Y(Xg)) \\ &= (Wf)g + f(Wg), \end{aligned}$$

así que $W \in \mathfrak{X}(M)$. Es evidente que $[Y, X] = -[X, Y]$.

Ad (b): Obsérvese que

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]](f) &= X([Y, Z]f) - [Y, Z](Xf) \\ &= X(Y(Zf)) - X(Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf)). \end{aligned}$$

Al sumar los cuatro términos al lado derecho con otros ocho obtenidos de las permutaciones cíclicas de las tres letras X, Y, Z , se obtienen 12 términos que se cancelan en pares, así que esta suma es cero. \square

La Proposición 1.55 anterior dice que $\mathfrak{X}(M)$ es un ejemplo de un **álgebra de Lie**. Un espacio \mathbb{R} -vectorial E es un álgebra de Lie si existe un corchete bilineal y antisimétrica $[\cdot, \cdot]: E \times E \rightarrow E$ que cumple la identidad de Jacobi (1.22b). Se debe notar que esta operación binaria en E no es asociativa, porque en general $[X, [Y, Z]] \neq [[X, Y], Z]$; de hecho, la identidad de Jacobi declara la falta de asociatividad en forma concreta, porque la antisimetría hace posible reacomodar (1.22b) así:

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]. \quad (1.23)$$

Considérese la aplicación $\text{ad}_X: E \rightarrow E$ definida por $\text{ad}_X(Y) := [X, Y]$. Con esta notación, la relación (1.23) asuma la forma

$$\text{ad}_X([Y, Z]) = [\text{ad}_X(Y), Z] + [Y, \text{ad}_X(Z)]$$

de modo que cada ad_X cumple una *regla de Leibniz* con respecto al corchete de E .

► Dadas dos variedades diferenciales M y N , se quiere comparar sus campos vectoriales. Esto es factible si M y N son difeomorfismos: cada difeomorfismo $\tau: M \rightarrow N$ da lugar a una correspondencia entre $\mathfrak{X}(M)$ y $\mathfrak{X}(N)$, detallada a continuación.

Definición 1.56. Sea $\tau: M \rightarrow N$ un difeomorfismo entre dos variedades diferenciales. A cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ se puede asociarle un nuevo campo vectorial $\tau_*X \in \mathfrak{X}(N)$ por

$$\tau_*X(h) := X(h \circ \tau) \circ \tau^{-1} \quad \text{para } h \in C^\infty(N). \quad (1.24)$$

El campo vectorial τ_*X es la **imagen directa**²⁰ de X bajo τ . Al evaluar los dos lados de (1.24) en un punto $\tau(p) \in N$, se obtiene

$$\tau_*X(h)(\tau(p)) = X(h \circ \tau)(p) = X_p(h \circ \tau) = T_p\tau(X_p)(h).$$

al invocar la aplicación tangente (Definición 1.37). Al eliminar la función h de estas fórmulas, resulta

$$(\tau_*X)_{\tau(p)} = T_p\tau(X_p). \quad (1.25)$$

De esta manera, se obtiene un isomorfismo lineal entre los espacios tangentes en $p \in M$ y en $\tau(p) \in N$, dado por $T_p\tau: T_pM \rightarrow T_{\tau(p)}N: X_p \mapsto (\tau_*X)_{\tau(p)}$, cuya aplicación lineal inversa es $T_{\tau(p)}\tau^{-1}$.

En el caso de que $M = N$ y τ es un difeomorfismo de M en sí mismo, dicese que X es **invariante bajo τ** si $\tau_*X = X$. \diamond

Lema 1.57. Si $\tau: M \rightarrow N$ y $\sigma: N \rightarrow R$ son dos difeomorfismos y si $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $\sigma_*(\tau_*X) = (\sigma \circ \tau)_*X$ en $\mathfrak{X}(R)$.

Demostración. Si $k \in C^\infty(R)$, se calcula

$$\begin{aligned} \sigma_*(\tau_*X)(k) &= \tau_*X(k \circ \sigma) \circ \sigma^{-1} = X((k \circ \sigma) \circ \tau) \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} \\ &= X(k \circ (\sigma \circ \tau)) \circ (\sigma \circ \tau)^{-1}. \end{aligned}$$

Alternativamente, nótese que la fórmula (1.25) y la regla de la cadena (1.13) implican

$$(\sigma_*(\tau_*X))_{\sigma \circ \tau(p)} = T_{\tau(p)}\sigma((\tau_*X)_{\tau(p)}) = T_{\tau(p)}\sigma(T_p\tau(X_p)) = T_p(\sigma \circ \tau)(X_p)$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $p \in M$. \square

Lema 1.58. Sea $\tau: M \rightarrow N$ un difeomorfismo entre dos variedades diferenciales. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $\tau_*[X, Y] = [\tau_*X, \tau_*Y]$.

²⁰En inglés: **pushout** o *push-forward*.

Demostración. Basta calcular el efecto de $[\tau_*X, \tau_*Y]$ sobre una función $h \in C^\infty(N)$:

$$\begin{aligned} [\tau_*X, \tau_*Y](h) &= \tau_*X(\tau_*Y(h)) - \tau_*Y(\tau_*X(h)) \\ &= \tau_*X(Y(h \circ \tau) \circ \tau^{-1}) - \tau_*Y(X(h \circ \tau) \circ \tau^{-1}) \\ &= X(Y(h \circ \tau)) \circ \tau^{-1} - Y(X(h \circ \tau)) \circ \tau^{-1} \\ &= [X, Y](h \circ \tau) \circ \tau^{-1} = \tau_*[X, Y](h). \end{aligned} \quad \square$$

1.6 Curvas integrales y flujos

Definición 1.59. Una **curva integral** de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ es una curva suave $\gamma: I \rightarrow M$ tal que

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \quad \text{para todo } t \in I. \quad (1.26)$$

La función $t \mapsto \dot{\gamma}(t)$ es la **velocidad** de la curva γ . \diamond

Sea (U, ϕ) una carta local de M tal que $\gamma(s) \in U$ para algún $s \in I$. La expresión local (1.21) del campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ permite calcular el efecto del vector de velocidad $\dot{\gamma}(s)$ sobre una función $f \in C^\infty(U)$:

$$\dot{\gamma}(s)f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} f(\gamma(t)) = a^j(\gamma(s)) \frac{\partial f}{\partial x^j}(\gamma(s)).$$

Al tomar $f = x^k$, una de las funciones coordenadas, resulta

$$(x^k \circ \gamma)'(s) = a^k(\gamma(s)).$$

Sea J un subintervalo de I tal que $s \in J \subseteq I \cap \gamma^{-1}(U)$. Las funciones $y^k \equiv x^k \circ \gamma: J \rightarrow \mathbb{R}$, para $k = 1, \dots, n$, satisfacen

$$(y^k)'(t) = (a^k \circ \phi^{-1})(y^1(t), \dots, y^n(t)) \quad \text{para todo } t \in J. \quad (1.27)$$

Este es un *sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden*. La búsqueda de las curvas integrales de X (dentro del dominio U de una carta local) se reduce a la resolución de esta clase de ecuaciones diferenciales.

Las funciones $a^k \circ \phi^{-1}$ son suaves sobre el abierto $\phi(U)$ de \mathbb{R}^n . El teorema de existencia y unicidad para soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden garantiza que, en la presencia de las *condiciones iniciales* $y^k(t_0) = x_0^k$ referidos a algún $t_0 \in J$, este sistema posee una solución única en un subintervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ de J .²¹ Sin perder generalidad, se puede redefinir J como este intervalo.

²¹Si t_0 resulta ser un extremo de J , el intervalo de existencia y unicidad tiene la forma $[t_0, t_0 + \delta)$ o bien $(t_0 - \delta, t_0]$, según el caso. Se deja al lector adaptar la discusión para cubrir estas posibilidades.

Las condiciones iniciales pueden ser reexpresadas como $\phi(\gamma(t_0)) = x_0 \in \phi(U)$, o bien como $\gamma(t_0) = p$, donde p es el punto de U tal que $\phi(p) = x_0$. En breve, se ha comprobado que *la ecuación vectorial con condición inicial*:

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}, \quad \gamma(t_0) = p, \quad (1.28)$$

posee una solución única $t \mapsto \gamma(t)$, definida en un intervalo $t \in J \subseteq I$.

Debido a la suavidad de las funciones $a^k \circ \phi$ al lado derecho de (1.27), la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias asegura que las soluciones $y(t)$ dependen suavemente de las condiciones iniciales. En detalle: existen un número $\varepsilon > 0$; un abierto $V \subseteq U$; y una aplicación suave $\beta: (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times \phi(V) \rightarrow \phi(U)$ tal que, para cada $x \in \phi(V)$, $y_x(t) \equiv \beta(t, x)$ es una solución de (1.27) con la condición inicial $y_x(t_0) = x$.

Defínase $\alpha(t, q) := \phi^{-1}(\beta(t, \phi(q)))$ para $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ y $q \in V$. Entonces α es una función suave con dominio $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times V \subseteq I \times M$ y la función $\gamma_q: t \mapsto \alpha(t, q)$ es una curva integral de X con $\gamma_q(t_0) = q$.

De ahora en adelante, conviene tomar $t_0 = 0$; es cuestión de reparametrizar las curvas de marras con $t \mapsto t - t_0$. La aplicación $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \rightarrow U$ de la discusión anterior se llama un *flujo local* del campo vectorial X .

Definición 1.60. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial sobre una variedad M . Para cada punto $p \in M$, sea I_p el *intervalo maximal*²² con $0 \in I_p \subseteq \mathbb{R}$ tal que la ecuación diferencial (1.26) tenga una solución $\gamma_p: I_p \rightarrow M$ con condición inicial $\gamma_p(0) = p$. En el dominio $D_X := \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M : t \in I_p\}$, defínase la función

$$\alpha: D_X \rightarrow M : (t, p) \mapsto \gamma_p(t).$$

Este dominio D_X es un abierto de la variedad producto $\mathbb{R} \times M$ y la función α es suave, en vista de la discusión anterior. Esta función α es el **flujo** (global) del campo vectorial X . Se debe notar que $\alpha(0, p) = p$ para todo $p \in M$, y además:

$$\alpha(t, \alpha(s, p)) = \alpha(t + s, p) \quad (1.29)$$

si los dos lados están definidos. En efecto, la curva $t \mapsto \alpha(t + s, p) = \gamma_p(t + s)$ pasa por el punto $\gamma_p(s) = \alpha(s, p)$ cuando $t = 0$, y su vector de velocidad en $t = 0$ es

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma_p(t + s) : f \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \gamma_p)(t + s) = (f \circ \gamma_p)'(s) = \dot{\gamma}_p(s)f,$$

²²El teorema de existencia y unicidad para soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias garantiza que haya una solución única en un intervalo corto $(-\delta, \delta)$ alrededor de 0. En cada instante t_0 de ese intervalo se puede replantear la ecuación diferencial con una condición inicial obtenida de la primera solución, lo cual extiende la solución única a un intervalo mayor $(-\varepsilon_2, \varepsilon_1)$; y se repite el proceso. La unión de una sucesión de tales extensiones es el *intervalo maximal*.

el cual es el vector $\dot{\gamma}_p(s) \in T_{\gamma_p(s)}M$. La unicidad de las soluciones de (1.28) entonces implica que $\gamma_p(t+s) = \gamma_{\gamma_p(s)}(t)$, que es un sinónimo de la fórmula (1.29). \diamond

Proposición 1.61. Si la variedad diferencial M es compacta, entonces $D_X = \mathbb{R} \times M$ para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Si $p \in M$, hay un número $\varepsilon_p > 0$ y un vecindario abierto V_p de p tales que $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \times V_p \subseteq D_X$. Los abiertos V_p recubren M ; como M es compacto, hay un número finito de puntos p_1, \dots, p_r tales que $M = V_{p_1} \cup \dots \cup V_{p_r}$. Sea $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$; entonces $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M \subseteq D_X$.

Si $-\varepsilon < s < \varepsilon$, la curva $t \mapsto \gamma_{\gamma_p(s)}(t)$ está definida para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, y su vector tangente en $t = 0$ es $\dot{\gamma}_p(s) = X_{\gamma_p(s)}$. Luego $\gamma_p(t+s)$ está definido, con $\gamma_p(t+s) = \gamma_{\gamma_p(s)}(t)$. Como los $t+s$ recorren el intervalo $(-2\varepsilon, 2\varepsilon)$ y p es arbitrario, se deduce que $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times M \subseteq D_X$. Por inducción, se obtiene $(-2^k\varepsilon, 2^k\varepsilon) \times M \subseteq D_X$ para todo $k \in \mathbb{N}$, así que $\mathbb{R} \times M = D_X$. \square

Definición 1.62. Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se llama **completo** si $D_X = \mathbb{R} \times M$. La proposición anterior asegura que sobre una variedad compacta, cada campo vectorial es completa. \diamond

Ejemplo 1.63. En la variedad unidimensional \mathbb{R} , con coordenada x , considérese el campo vectorial $X := (1 + x^2)d/dx$. Sus curvas integrales satisfacen la ecuación diferencial $y'(t) = 1 + y(t)^2$. Dada la condición inicial $y(0) = 0$, la solución única es $y(t) \equiv \operatorname{tg} t$, con derivada $y'(t) = \sec^2 t = 1 + \operatorname{tg}^2 t$. El intervalo maximal para esta solución es $(-\pi/2, \pi/2)$. Por lo tanto, este X no es completo. \diamond

Ejemplo 1.64. En la variedad no compacta \mathbb{R}^2 , con coordenadas (x, y) , considérese el campo vectorial

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Sus curvas integrales $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ están dadas por (1.27):

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t),$$

cuyas soluciones son de la forma

$$x(t) = r \cos(t - t_0), \quad y(t) = r \operatorname{sen}(t - t_0),$$

que dependen de dos constantes r, t_0 , determinadas por las condiciones iniciales $\gamma(0) = (x_0, y_0) = (r \cos t_0, -r \operatorname{sen} t_0)$.

Si $r = 0$, la curva integral es constante, $\gamma(t) \equiv (0, 0)$ cuya trayectoria es un punto en donde el campo vectorial X se anula. Si $r \neq 0$, la trayectoria es un círculo de radio $|r|$

recorrido infinitas veces (el signo de r determina el sentido del recorrido). Este campo vectorial es completo, porque en cada caso el recorrido está parametrizado por todo \mathbb{R} :

$$\alpha(t, (x, y)) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t). \quad \diamond$$

Definición 1.65. Sea X un campo vectorial completo sobre una variedad M , con flujo $\alpha: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$. Escribáse $\alpha_t(p) \equiv \alpha(t, p)$. Entonces cada $\alpha_t: M \rightarrow M$ es un difeomorfismo, con inverso α_{-t} y con $\alpha_0 = 1_M$. En efecto, la fórmula (1.29) se transcribe en este caso como

$$\alpha_{t+s} = \alpha_t \circ \alpha_s \quad \text{para todo } t, s \in \mathbb{R}. \quad (1.30)$$

Por lo tanto, $t \mapsto \alpha_t$ es un *homomorfismo* del grupo aditivo \mathbb{R} en el *grupo de difeomorfismos* $\text{Diff}(M)$ de la variedad diferencial M . La familia de difeomorfismos $\{\alpha_t : t \in \mathbb{R}\}$ constituye un subgrupo de $\text{Diff}(M)$; este es el **grupo uniparamétrico** generado por el campo vectorial completo X . \diamond

El flujo de un campo vectorial incompleto no forma un grupo de difeomorfismos. En todo caso, si $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V \subseteq D_X$, las aplicaciones $\alpha_t: p \mapsto \alpha(t, p)$ cumplen (1.30) toda vez que $t, s, t+s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. En particular, vale $\alpha_{-t} \circ \alpha_t = \alpha_t \circ \alpha_{-t} = 1_V$ sobre V para $-\varepsilon < t < \varepsilon$; dícese que los α_t forman un *seudogrup* de difeomorfismos locales.

Proposición 1.66. Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$. Si α es el flujo de X , entonces

$$Xf(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\alpha_t(p)) - f(p)}{t} \quad \text{para todo } p \in M. \quad (1.31)$$

Demostración. El lado derecho es la derivada, en $t = 0$, de la función

$$t \mapsto f(\alpha(t, p)) = f(\gamma_p(t)),$$

donde γ_p es la curva integral de X tal que $\gamma_p(0) = p$. Esta derivada en $t = 0$ coincide con $\dot{\gamma}_p(0)f = X_p f = Xf(p)$. \square

Al eliminar el punto p de la fórmula (1.31), queda una relación entre funciones suaves:

$$Xf = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ \alpha_t - f}{t}.$$

Dícese que el campo vectorial X es el **generador** del flujo α . En particular, el generador de un grupo uniparamétrico de difeomorfismos es un campo vectorial completo.

1.7 Grupos de Lie y espacios homogéneos

Definición 1.67. Un **grupo de Lie** es una variedad diferencial G , que es a su vez un grupo, en donde las operaciones de grupo

$$m: G \times G \rightarrow G: (g, h) \mapsto gh, \quad \iota: G \rightarrow G: g \mapsto g^{-1}$$

son aplicaciones suaves. ◇

En un grupo de Lie G , la *inversión* $\iota: g \mapsto g^{-1}$ es un *difeomorfismo* de G en G , porque es biyectiva y suave, y coincide con su propio inverso. Las **traslaciones a izquierda** $\lambda_g: h \mapsto gh$ son también difeomorfismos: el inverso de λ_g es la traslación contraria $\lambda_{g^{-1}}$. Las **traslaciones a derecha** $\rho_g: h \mapsto hg$ constituyen otro juego de difeomorfismos de G .

Ejemplo 1.68. Un espacio vectorial real V de dimensión finita es un grupo de Lie abeliano bajo la operación de suma. En particular, $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo de Lie de dimensión n . ◇

Ejemplo 1.69. El grupo multiplicativo $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un grupo de Lie unidimensional no compacto. Esta variedad diferencial es disconexa, pues $\mathbb{R}^\times = (-\infty, 0) \uplus (0, +\infty)$ es una unión disjunta de dos abiertos no vacíos. Su *componente neutro*, es decir, el componente conexo que incluye el elemento neutro 1, es el *subgrupo* $\mathbb{R}_+^\times := (0, +\infty)$, que es también una subvariedad de \mathbb{R}^\times .

En resumen, \mathbb{R}_+^\times es un **subgrupo de Lie** de \mathbb{R}^\times . Fíjese que la función exponencial $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$ es simultáneamente un isomorfismo de grupos (su inverso es la función logarítmica) y un difeomorfismo, pues tanto \exp como $\log: \mathbb{R}_+^\times \rightarrow \mathbb{R}$ son biyecciones suaves. En breves palabras, \exp es un **isomorfismo de grupos de Lie**. ◇

Ejemplo 1.70. El *círculo* $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es un grupo de Lie unidimensional *compacto*. (Las notaciones \mathbb{T} y \mathbb{S}^1 son sinónimos; generalmente se prefiere usar \mathbb{T} cuando se quiere considerar el círculo como grupo de Lie.) ◇

Ejemplo 1.71. El grupo de matrices invertibles $GL(n, \mathbb{R})$ del Ejemplo 1.47 es un grupo de Lie de dimensión n^2 . Para verificar la suavidad de su producto, basta recordar que las entradas matriciales de la matriz $C = AB$ son polinomios en las entradas de A y de B , mediante la fórmula $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$. La suavidad de la inversión es una consecuencia de la regla de Cramer: la entrada (i, j) de A^{-1} es $(-1)^{i+j} m_{ji} / \det A$, donde la menor m_{ji} es un polinomio en las entradas de A .

La subvariedad $SL(n, \mathbb{R})$ del Ejemplo 1.48 es también un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$. Luego este es un *subgrupo de Lie* de $GL(n, \mathbb{R})$, de dimensión $(n^2 - 1)$. ◇

Ejemplo 1.72. El grupo de matrices invertibles *complejas*

$$GL(n, \mathbb{C}) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$$

y su subgrupo $SL(n, \mathbb{C}) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \det A = 1\}$ son grupos de Lie, de dimensiones $2n^2$ y $(2n^2 - 2)$, respectivamente. De hecho, $GL(n, \mathbb{C})$ es un abierto en $M_n(\mathbb{C})$, un espacio vectorial *real* de dimensión $\dim_{\mathbb{R}} M_n(\mathbb{C}) = 2n^2$. Las coordenadas cartesianas de $A \in GL(n, \mathbb{C})$ son $\Re a_{ij}$ y $\Im a_{ij}$, las partes real e imaginaria de sus n^2 entradas complejas.

Resulta que la aplicación polinomial $\underline{\det} : GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^\times \equiv \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es una submersión de la cual 1 es un valor regular, así que $SL(n, \mathbb{C})$ es una subvariedad (y también un subgrupo) de $GL(n, \mathbb{C})$. \diamond

Ejemplo 1.73. El *grupo ortogonal* $O(n)$ del Ejemplo 1.49 es un grupo de Lie de dimensión $n(n-1)/2$.

El *grupo ortogonal especial* $SO(n) := O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo de Lie de $O(n)$, también con dimensión $n(n-1)/2$. \diamond

Ejemplo 1.74. Un *grupo finito* G , con su topología discreta, es un grupo de Lie de dimensión 0. (Las condiciones de suavidad son triviales en dimensión cero.)

El grupo ortogonal es un producto semidirecto, $O(n) \simeq SO(n) \rtimes C_2$, de su subgrupo normal $SO(n)$ – de índice 2 – y el subgrupo finito $C_2 := \{1_n, R\}$, donde $R = \text{diag}[-1, 1, \dots, 1]$ es la *reflexión* de \mathbb{R}^n en el hiperplano $x^1 = 0$. \diamond

► La geometría diferencial se simplifica al utilizar las traslaciones a izquierda – que son difeomorfismos de G – para llevar un vecindario de cualquier punto $g \in G$ en un vecindario del elemento neutro $1 \in G$.²³ Por ejemplo, una curva integral de un campo vectorial que pasa por g puede obtenerse por la traslación de una curva correspondiente que pasa por 1. De entre todos los campos vectoriales sobre G , se destacan aquellas que son invariantes por estas traslaciones a izquierda.

Definición 1.75. Sea G un grupo de Lie cualquiera. Un campo vectorial $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(G)$ es **invariante a la izquierda** si todas las traslaciones a izquierda lo conservan:

$$(\lambda_g)_* \tilde{X} = \tilde{X} \quad \text{para todo } g \in G.$$

Escríbase $X := \tilde{X}_1 \in T_1 G$. El campo vectorial \tilde{X} queda determinado por el vector tangente X mediante (1.25):

$$\tilde{X}_g = T_1 \lambda_g(\tilde{X}_1) = T_1 \lambda_g(X), \quad \text{con el isomorfismo lineal } T_1 \lambda_g : T_1 G \rightarrow T_g G. \quad (1.32)$$

²³Algunos autores denotan el elemento neutro por la letra e , de modo que $g = m(g, e) = m(e, g)$ para todo $g \in G$. Esta es una complicación innecesaria.

Inversamente, dado un vector $Y \in T_1G$, las recetas $\tilde{Y}_g := T_1\lambda_g(Y)$, $\tilde{Y}f(g) := \tilde{Y}_g f$ determinan un campo vectorial \tilde{Y} invariante a izquierda. Denótese por \mathfrak{g} la totalidad de estos campos vectoriales invariantes a izquierda; este es un subespacio vectorial de $\mathfrak{X}(G)$.

Resulta, entonces, que $\tilde{X} \leftrightarrow X$ es una biyección \mathbb{R} -lineal entre \mathfrak{g} y T_1G ; por ende, \mathfrak{g} es *finitodimensional* y su dimensión coincide con $n = \dim G$, la dimensión de la variedad diferencial G . \diamond

Lema 1.76. Si $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{g}$, entonces $[\tilde{X}, \tilde{Y}] \in \mathfrak{g}$ también.

Demostración. Del Lema 1.58 se obtiene inmediatamente:

$$(\lambda_g)_*[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [(\lambda_g)_*\tilde{X}, (\lambda_g)_*\tilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}] \quad \text{para todo } g \in G. \quad \square$$

Definición 1.77. Defínase un **corchete** en el espacio vectorial T_1G por

$$[X, Y] := [\tilde{X}, \tilde{Y}]_1. \quad (1.33)$$

En vista de la correspondencia (1.32) y del Lema 1.76, este corchete es una operación bilineal antisimétrica sobre T_1G que cumple la identidad de Jacobi. Con ello, T_1G es un álgebra de Lie finitodimensional, isomorfo a \mathfrak{g} que es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$. Entonces T_1G recibe el nombre de **álgebra de Lie** del grupo G . \diamond

A partir de ahora, se identificará \mathfrak{g} con T_1G y se escribirá X en vez de \tilde{X} para los campos vectoriales que pertenecen a \mathfrak{g} .

► Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie \mathfrak{g} . Si $X \in \mathfrak{g}$, sea γ_X la curva integral del campo vectorial invariante X tal que $\gamma_X(0) = 1$. Entonces $\dot{\gamma}_X(0) = X$. Considérese el intervalo I de definición inicial de la curva $\gamma_X: I \rightarrow G$. En algunos casos, es posible que sea $I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$; pero si el teorema de existencia y unicidad para soluciones de (1.28) solo ofrece un intervalo acotado $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, resulta que este intervalo puede prolongarse en \mathbb{R} . En efecto, para cualquier instante²⁴ $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, la curva η determinada por la ecuación diferencial

$$\dot{\eta}(t) = X_{\eta(t)} = (\lambda_g)_* X_{g^{-1}\eta(t)}, \quad \eta(0) = g := \gamma_X(s),$$

tiene como solución única $\eta(t) \equiv \gamma_X(s)\gamma_X(t)$, definida para $-\varepsilon < t < \varepsilon$. Esta curva constituye una prolongación de γ_X al intervalo $s - \varepsilon < t < s + \varepsilon$. De este modo, se obtiene una curva $\gamma_X: (-2\varepsilon, 2\varepsilon) \rightarrow G$ cuya restricción al subintervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ coincide con la curva

²⁴Nótese el uso de una metáfora temporal para referirse al parámetro de la curva integral γ_X . Se puede imaginar el flujo de X como un movimiento material a lo largo de las curvas integrales (las “líneas de flujo”, en la hidrodinámica) a través del tiempo.

original. Al iterar este proceso k veces, se prolonga γ_X al intervalo $(-2^k \varepsilon, 2^k \varepsilon)$; luego, por inducción, se produce una curva $\gamma_X: \mathbb{R} \rightarrow G$, que además cumple

$$\gamma_X(s+t) = \gamma_X(s)\gamma_X(t) \quad \text{para todo } s, t \in \mathbb{R}. \quad (1.34)$$

Definición 1.78. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie \mathfrak{g} . Si $X \in \mathfrak{g}$ es un campo vectorial invariante a izquierda, su curva integral tal que $\gamma_X(0) = 1$ cumple $\dot{\gamma}_X(0) = X$; su intervalo de definición es todo \mathbb{R} ; y γ_X satisface (1.34). Por lo tanto, esta curva $t \mapsto \gamma_X(t)$ es un *subgrupo uniparamétrico* de G , determinado unívocamente por la condición $\dot{\gamma}_X(0) = X \in \mathfrak{g}$. Escríbase

$$\underline{\exp} X := \gamma_X(1).$$

La construcción de γ_X evidencia que $\gamma_{tX}(1) = \gamma_X(t)$, es decir,

$$\gamma_X(t) = \exp tX \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (1.35)$$

La aplicación $\underline{\exp}: \mathfrak{g} \rightarrow G$ así definida es la **aplicación exponencial** asociada al grupo de Lie G . ◇

Ejemplo 1.79. En el círculo $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, considérese la carta local (U, ℓ) , donde $U = \mathbb{T} \setminus \{-1\}$ y $\ell: U \rightarrow (-\pi, \pi)$ está dada por $\ell(e^{i\theta}) = \theta$. Fíjese que la coordenada local θ vale $\theta = 0$ en el punto $z = 1$ del círculo. El campo vectorial $X = d/d\theta$, definido inicialmente en U , se extiende a todo \mathbb{S}^1 como campo vectorial invariante por las “traslaciones” que en este caso son las *rotaciones rígidas* del círculo, $\lambda_w: z \mapsto wz$.

La curva integral de X tal que $\gamma_X(0) = 1$ está dada por $\gamma_X(t) := e^{it} \equiv \cos t + i \sin t$. En efecto, esta curva satisface, por (1.11):

$$\langle \dot{\gamma}_X(0), f \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(e^{it}) = if'(1) = \left. \frac{d}{d\theta} \right|_1 (f),$$

así que $\dot{\gamma}_X(0) = (d/d\theta)|_1 = X_1 = X$, bajo la identificación del campo vectorial invariante con su valor en 1.

En este caso, la curva integral está definido inicialmente en el intervalo $(-\pi, \pi)$ por la fórmula $\gamma_X(\theta) \equiv e^{i\theta}$. Su prolongación a todo $t \in \mathbb{R}$ señala que la curva integral gira alrededor del círculo infinitas veces. En este caso, la función exponencial es $\exp tX \equiv e^{it}$ y el grupo uniparamétrico define un homomorfismo sobreyectivo (pero no inyectivo) $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$.

Nota: la “rama principal” de la función logarítmica es $\log: U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\log(e^{i\theta}) = i\theta$. Si se cambia ℓ por $\underline{\log}$ en el cálculo anterior, la fórmula $\exp t := e^{it}$ se modifica en $\exp(it) = e^{it}$. Bajo este convenio, se identifica el espacio tangente $T_1\mathbb{T}$ con $i\mathbb{R}$, considerado como espacio vectorial *real* unidimensional, para el cual $\{i\}$ es una base. ◇

Si G es un **grupo de Lie lineal**, es decir, $G \subseteq GL(n, \mathbb{F})$ con $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , para algún $n \in \mathbb{N}$, el espacio tangente T_1G puede identificarse con un subespacio \mathbb{R} -vectorial de $M_n(\mathbb{F})$. En tales casos, la **exponencial matricial**

$$\exp X := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$

coincide con la aplicación exponencial de G , salvo por un posible factor convencional de i , como en el ejemplo anterior. En ese contexto, la búsqueda del álgebra de Lie se reduce a la tarea de identificar un subespacio (real) de matrices:

$$\mathfrak{g} = \{ X \in M_n(\mathbb{F}) : \exp tX \in G \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \}, \quad (1.36)$$

en vista del siguiente resultado sobre exponenciales matriciales.

Lema 1.80. Si $X, Y \in M_n(\mathbb{F})$ con $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , entonces

$$\left. \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} (\exp tX \exp tY \exp(-tX) \exp(-tY)) = XY - YX. \quad (1.37)$$

Demostración. El resultado se basa en la **fórmula de Campbell, Baker y Hausdorff**.²⁵

$$\exp tX \exp tY = \exp\left(t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3)\right). \quad (1.38)$$

Esta fórmula viene del desarrollo de Taylor en $t = 0$:

$$\begin{aligned} \exp tX \exp tY &= \left(1 + tX + \frac{1}{2}t^2X^2 + O(t^3)\right)\left(1 + tY + \frac{1}{2}t^2Y^2 + O(t^3)\right) \\ &= 1 + t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3) \\ &= 1 + t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(X + Y)^2 + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3) \\ &= \exp\left(t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3)\right). \end{aligned}$$

En el último paso, se ha empleado la expansión logarítmica

$$1 + A = \exp\left(A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \dots\right)$$

porque la serie al lado derecho converge en el caso de interés $A = t(X + Y)$ si t es suficientemente pequeño. Al aplicar (1.38) dos veces, se obtiene

$$\begin{aligned} &\exp tX \exp tY \exp(-tX) \exp(-tY) \\ &= \exp\left(t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3)\right) \exp\left(-t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3)\right) \\ &= \exp\left(t^2(XY - YX) + O(t^3)\right). \end{aligned}$$

Luego, al derivar dos veces en $t = 0$, se obtiene la fórmula deseada. □

²⁵La notación de Landau $O(t^3)$ indica alguna función $F(t)$ tal que $F(t)/t^3$ está acotada cuando $t \rightarrow 0$, y por ende puede despreciarse en comparación con t^2 cuando t es pequeño.

En vista del lema anterior, sea G un grupo de Lie cualquiera, con álgebra de Lie \mathfrak{g} . Si $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{g}$ con $X = \tilde{X}_1, Y = \tilde{Y}_1$ en T_1G , la fórmula

$$f \mapsto \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(\exp \sqrt{s}X \exp \sqrt{s}Y \exp(-\sqrt{s}X) \exp(-\sqrt{s}Y))$$

define un vector tangente en T_1G . Al notar que

$$Xf = \tilde{X}_1 f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\exp tX)$$

puesto que $t \mapsto \exp tX$ es una curva integral de \tilde{X} , el Lema 1.80 permite calcular este vector tangente en el caso matricial. Basta observar que el cambio de parámetro $t = \sqrt{s}$, $s = t^2$ conduce a

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{ds} + 2s \frac{d^2}{ds^2} \implies \left. \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0}$$

y la fórmula (1.37) da como resultado el *conmutador* $XY - YX$ cuando $\mathfrak{g} \leq M_n(\mathbb{F})$. Por otro lado, los cálculos de la demostración del Lema 1.80, usando la relación $\tilde{X}f = \frac{d}{dt} f(\exp tX)$ y el desarrollo de Taylor de f hasta segundo orden, muestran que

$$f(\exp tX \exp tY) = f\left(\exp(t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2Z)\right) + O(t^3)$$

donde $Z = \tilde{Z}_1$ y $\tilde{Z} = \tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X}$ en $\mathfrak{X}(G)$, lo cual implica que $Z = [X, Y]$ en T_1G . La conclusión de los dos cálculos – como era de esperar – es que

$$[X, Y] \equiv [\tilde{X}, \tilde{Y}]_1 = XY - YX \quad \text{cuando} \quad \mathfrak{g} \leq M_n(\mathbb{F}).$$

Definición 1.81. Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . Un **álgebra de Lie matricial** (real o complejo, según el caso) es un subespacio \mathbb{F} -vectorial \mathfrak{g} de $M_n(\mathbb{F})$, para algún $n \in \mathbb{N}$, que es cerrado bajo la formación de conmutadores: si $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces $XY - YX \in \mathfrak{g}$. Su corchete de Lie es el conmutador, $[X, Y] := XY - YX$.

Escríbase $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) := M_n(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) := M_n(\mathbb{C})$ para denotar todos las matrices $n \times n$, considerados como álgebras de Lie matriciales. Ellas son las álgebras de Lie asociados a los grupos de matrices invertibles $GL(n, \mathbb{R})$ y $GL(n, \mathbb{C})$, respectivamente. \diamond

Ejemplo 1.82. Cualquier matriz $X \in M_n(\mathbb{F})$, se verifica la identidad:

$$\det(\exp X) = e^{\text{tr} X}, \quad (1.39)$$

donde $\text{tr} X$ denota la *traza* de la matriz X . Para comprobarlo, basta considerar el caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Fíjese que $\exp(PXP^{-1}) = P(\exp X)P^{-1}$, así que la semejanza $X \mapsto PXP^{-1}$ deja sin

cambio los dos lados de (1.39); sin perder generalidad, entonces, se puede suponer que la matriz X es triangular²⁶ con entradas diagonales $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Entonces $\exp X$ es una matriz triangular, con entradas diagonales $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$, de donde (1.39) es obvio.

En particular, la condición $\det(\exp tX) \equiv 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es equivalente a la condición $\text{tr}X = 0$. Por lo tanto, el álgebra de Lie de $G = \text{SL}(n, \mathbb{F})$ es

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) := \{X \in M_n(\mathbb{F}) : \text{tr}X = 0\}.$$

Este resultado proporciona otra manera de calcular la dimensión de $\text{SL}(n, \mathbb{R})$, al observar que $\dim \text{SL}(n, \mathbb{R}) = \dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$. \diamond

Definición 1.83. Sea d una forma bilineal simétrica no degenerada sobre \mathbb{R}^n , es decir, $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$; con $d(x, y) = 0$ para todo x solo si $y = 0$. Por el teorema de Sylvester, después de un cambio de base en \mathbb{R}^n , se puede tomar d de la forma

$$d(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1}y_{p+1} - \dots - x_{p+q}y_{p+q}, \quad (1.40)$$

con rango $p + q = n$ (pues d es no degenerada) y *signatura* $p - q$. Defínase el grupo de simetría de d por

$$O(p, q) := \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) : d(Ax, Ay) = d(x, y) \text{ para } x, y \in \mathbb{R}^n\}. \quad (1.41)$$

Si $q = 0$, la forma bilineal d es *definida positiva* y se escribe $O(n)$ en vez de $O(n, 0)$; este coincide con el grupo ortogonal del Ejemplo 1.49; en este caso, d es el producto escalar usual sobre \mathbb{R}^n . Si en (1.41) se toma $g \in \text{SL}(n, \mathbb{R})$, es decir, si se añade la condición $\det g = 1$, se obtiene los grupos

$$\text{SO}(p, q) := O(p, q) \cap \text{SL}(p + q, \mathbb{R}). \quad \diamond$$

Definición 1.84. Sea s una forma bilineal alternante no degenerada sobre \mathbb{R}^{2n} , es decir, $s(x, y) = -s(y, x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$; con $s(x, y) = 0$ para todo x solo si $y = 0$. Tales formas alternantes no degeneradas existen solo si la dimensión es par. Después de un cambio de base en \mathbb{R}^{2n} , se puede tomar s de la forma

$$s(x, y) = x_{n+1}y_1 + \dots + x_{2n}y_n - x_1y_{n+1} - \dots - x_ny_{2n}.$$

Escríbase

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R}). \quad (1.42)$$

²⁶Una matriz compleja es *trigonalizable* por un cambio de base ortonormal de \mathbb{C}^n ; alternativamente, posee una forma normal de Jordan, la cual es triangular. Estas técnicas no están disponibles en el caso de matrices reales; por ejemplo, la matriz real $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ no es trigonalizable sin usar escalares complejos.

entonces la forma bilineal $d_J(x, y) := s(x, Jy)$ es simétrica y definida positiva. El **grupo simpléctico** de \mathbb{R}^{2n} es el grupo de simetría de s , dado por

$$\text{Sp}(n, \mathbb{R}) := \{ B \in \text{GL}(2n, \mathbb{R}) : s(Bx, By) = s(x, y) \text{ para } x, y \in \mathbb{R}^{2n} \}. \quad (1.43)$$

Si $B \mapsto B^t$ denota la transpuesta de la matriz B con respecto a la forma simétrica d_J , entonces $B \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$ si y solo si $d_J(JBx, By) \equiv d_J(Jx, y)$ si y solo si $\underline{B^t JB} = J$.

Nótese que $J \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$ y que $J^2 = -1_{2n}$ en $M_{2n}(\mathbb{R})$. ◇

Definición 1.85. Denótese por $A^* = [\bar{a}_{ji}]$ el conjugado hermítico de $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$. El **grupo unitario**

$$\text{U}(n) := \{ U \in M_n(\mathbb{C}) : U^*U = 1_n \}$$

es un grupo de Lie. Este es el grupo de simetría del producto escalar usual en \mathbb{C}^n , el cual es una forma sesquilineal hermítica. Obsérvese que $\text{U}(1) = \mathbb{T}$, el círculo unitario.

El subgrupo de Lie

$$\text{SU}(n) := \text{U}(n) \cap \text{SL}(n, \mathbb{C}) = \{ U \in \text{U}(n) : \det U = 1 \}$$

es un **grupo especial unitario**. ◇

Definición 1.86. Si V es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , denótese por $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \equiv V \oplus iV$ su **complexificación**, la cual es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} . Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V , los vectores $v_j + iv_k$ forman una base de $V_{\mathbb{C}}$ como espacio vectorial *real*; los mismos vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ forman una base de $V_{\mathbb{C}}$ como espacio vectorial *complejo*. Luego, vale $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}}$. En particular, se ve que $(\mathbb{R}^n)_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^n$.

Una forma bilineal sobre V puede ser amplificada a forma *bilineal* (ino sesquilineal!) sobre $V_{\mathbb{C}}$, al tomar

$$d(u + iv, x + iy) := d(u, x) - d(v, y) + i d(u, y) + i d(v, x) \in \mathbb{C}.$$

En la clasificación de formas bilineales simétricas sobre \mathbb{C}^n , la signatura no cuenta porque $-1 = i^2$ es un cuadrado. Si d es no degenerada sobre \mathbb{R}^n , el grupo de simetría de la d amplificada sobre \mathbb{C}^n es

$$\text{O}(n, \mathbb{C}) := \{ C \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) : d(Cx, Cy) = d(x, y) \text{ para } x, y \in \mathbb{C}^n \}.$$

De modo similar, se puede amplificar una forma bilineal alternante s sobre \mathbb{R}^n a otra sobre \mathbb{C}^n , dando lugar a su grupo de simetría complejo:

$$\text{Sp}(n, \mathbb{C}) := \{ D \in \text{GL}(2n, \mathbb{C}) : s(Dx, Dy) = s(x, y) \text{ para } x, y \in \mathbb{C}^{2n} \}.$$

Nótese que tanto $\text{Sp}(n, \mathbb{C})$ como $\text{U}(2n)$ son subgrupos de $\text{GL}(2n, \mathbb{C})$. Su intersección es otro grupo de Lie:

$$\text{Sp}(n) := \text{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \text{U}(2n). \quad \diamond$$

Proposición 1.87. *Los grupos de Lie $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ y $Sp(n)$ son compactos.*

Demostración. Los grupos $SO(n)$, $SU(n)$ y $Sp(n)$ son subgrupos cerrados de $O(n)$, $U(n)$ y $U(2n)$, respectivamente. Basta mostrar, entonces, que $O(n)$ y $U(n)$ son compactos.

Sea d el producto escalar usual sobre \mathbb{R}^n . Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, cuyas columnas son $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$, es ortogonal si y solo si $A^t A = 1_n$; si y solo si $d(a_i, a_j) = \llbracket i = j \rrbracket$; si y solo si las columnas forman una *base ortonormal* de \mathbb{R}^n . Esto implica que $\|a_j\| = 1$ para cada j y $\|a_1\|^2 + \dots + \|a_n\|^2 = n$ (por el teorema de Pitágoras). Por lo tanto, el vector en \mathbb{R}^{n^2} cuyas coordenadas son las entradas matriciales de A tiene norma euclidiana \sqrt{n} . De esta manera, se ha identificado $O(n)$ con una parte cerrada de la esfera de radio \sqrt{n} en \mathbb{R}^{n^2} . El teorema de Heine y Borel muestra que el conjunto cerrado y acotado $O(n)$ es compacto.

El mismo argumento es aplicable a $U(n)$, al reemplazar el producto escalar real d por el producto escalar usual sobre \mathbb{C}^n , la forma *sesquilineal* $(w | z) := \bar{w}_1 z_1 + \dots + \bar{w}_n z_n$. Una matriz $C \in M_n(\mathbb{C})$ es unitaria si y solo si sus columnas forman una base ortonormal de \mathbb{C}^n . Luego, $U(n)$ se identifica con una parte cerrada de la esfera de radio \sqrt{n} en \mathbb{C}^{n^2} o bien en \mathbb{R}^{2n^2} . □

Definición 1.88. Sea G un grupo de Lie. Un subgrupo $H \leq G$ que es también una variedad diferencial se llama un **subgrupo de Lie** de G si la inclusión $i : H \hookrightarrow G$ es una inmersión inyectiva. Resulta que un subgrupo de Lie no necesariamente es cerrado en G .

Sin embargo, si H es un subgrupo de Lie *cerrado*, entonces cada **coclase a izquierda** $gH := \{ gh : h \in H \} = \lambda_g(H)$ es un cerrado de G y el conjunto de coclases

$$G/H := \{ gH : g \in G \}$$

puede ser dotado de una estructura diferencial de tal manera que la *aplicación cociente*

$$\eta : G \rightarrow G/H : g \mapsto gH$$

sea una sumersión sobreyectiva. En tal caso, dicese que G/H es la **variedad cociente** de G por el subgrupo cerrado H .

Fíjese que si subgrupo H no es normal en G , entonces G/H en general no es un grupo. En cambio, si $H \trianglelefteq G$ (subgrupo normal), entonces G/H es un grupo y η es un homomorfismo de grupos. Si H es un subgrupo normal cerrado de G , entonces G/H es un grupo de Lie.²⁷ ◇

²⁷No se demostrará todas las afirmaciones de esta definición. Para una discusión detallada, véase, por ejemplo, el la sección 10.16 del libro de Dieudonné en la bibliografía, o bien la sección 1.11 del libro: Johannes J. Duistermaat y Johan A. C. Kolk, *Lie Groups*, Springer, New York, 1996.

Ejemplo 1.89. Sea $G = \mathbb{T}^2$ el toro de dimensión 2, un grupo de Lie compacto y abeliano. Sea $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un número irracional; se define un homomorfismo $\rho_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$ por

$$\rho_a(t) := (e^{2\pi it}, e^{2\pi iat}).$$

Entonces ρ_a es una inmersión inyectiva (que no es un encaje), así que $H = \rho_a(\mathbb{R})$ es un subgrupo de Lie de \mathbb{T}^2 . Resulta que ρ_a no es sobreyectiva, pero H es denso en \mathbb{T}^2 ; en particular, H es un subgrupo de Lie no cerrado. (La trayectoria de la curva ρ_a es un hilo que enrolla el toro, pasando infinitas veces por cada vecindario de cualquier punto del toro.)

En cambio, si p/q es racional, con $p, q \in \mathbb{N}$, entonces $\rho_{p/q}(kq) = (e^{2\pi ikq}, e^{2\pi ikp}) = (1, 1)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. En este caso, el homomorfismo $\rho_{p/q}$ no es inyectivo, pero $H = \rho_{p/q}(\mathbb{R})$ es un subgrupo cerrado de \mathbb{T}^2 que es difeomorfo al círculo \mathbb{T} . \diamond

► La construcción de una variedad cociente G/H para un grupo de Lie G es un caso particular de un procedimiento más general, que es el de una *acción* de un grupo de Lie. Desde luego, en el contexto de variedades diferenciables las acciones de interés son las que están dadas por funciones suaves.

Definición 1.90. Sean G un grupo de Lie y M una variedad diferencial. Una **acción** (suave, a izquierda) de G sobre M es una aplicación suave $\Phi: G \times M \rightarrow M$ tal que:

- (i) $\Phi(g, \Phi(h, p)) = \Phi(gh, p)$ para todo $g, h \in G, p \in M$;
- (ii) $\Phi(1, p) = p$ para todo $p \in M$.

Escríbase $g \cdot p := \Phi(g, p)$; con esta notación, las dos propiedades de una acción son

$$g \cdot (h \cdot p) = (gh) \cdot p, \quad 1 \cdot p = p. \quad (1.44)$$

En particular, cada $\Phi_g: p \mapsto g \cdot p$ es un difeomorfismo de M , y la correspondencia $g \mapsto \Phi_g$ es un homomorfismo de G en el grupo $\text{Diff}(M)$ de todos los difeomorfismos de M en sí mismo.²⁸ \diamond

Ejemplo 1.91. Un grupo de Lie G actúa sobre sí mismo por *traslaciones a la izquierda*, porque el producto $\Phi(g, h) \equiv m(g, h) := gh$ es suave, por definición. La regla (1.44) sigue de la asociatividad del producto; y el difeomorfismo Φ_g coincide con la traslación λ_g en este caso.

El grupo G también actúa sobre sí mismo por *traslaciones a la derecha*; en cuyo caso, la acción está dada por $g \cdot h := hg^{-1}$, para cumplir con (1.44). Aquí $\Phi_g = \rho_{g^{-1}}$. \diamond

²⁸El grupo $\text{Diff}(M)$ generalmente no es un grupo de Lie, porque no tendría dimensión finita; pero posee algunos subgrupos que sí son grupos de Lie.

Ejemplo 1.92. Otra acción de un grupo de Lie G sobre sí mismo viene de la *conjugación* en G , al definir $g \cdot h := ghg^{-1}$. \diamond

Ejemplo 1.93. El círculo \mathbb{T} actúa sobre la esfera \mathbb{S}^2 por rotaciones alrededor de un eje fijo. Si este eje es el diámetro entre los polos norte y sur de la esfera, la acción está dada en coordenadas esféricas²⁹ por $e^{i\alpha} \cdot (\theta, \phi) := (\theta, \phi + \alpha)$. \diamond

Ejemplo 1.94. El grupo $SO(n)$ actúa sobre \mathbb{R}^n por rotaciones: se escribe $A \cdot x := Ax$, empleando el producto usual de matrices cuadradas por vectores columna.

La matriz diagonal $R = \text{diag}[1, \dots, 1, -1] \in O(n)$ es la *reflexión* de \mathbb{R}^n en el hiperplano $x^n = 0$. Es obvio que $O(n) \setminus SO(n) = \{AR : A \in SO(n)\}$; se dice que $O(n)$ actúa sobre \mathbb{R}^n por rotaciones y reflexiones.³⁰ \diamond

Definición 1.95. Sea G un grupo de Lie que actúa sobre una variedad M . A cada punto $p \in M$ se le asocia un **subgrupo de isotropía** $G_p \leq G$ y una **órbita** $G \cdot p \subseteq M$ por:

$$\begin{aligned} G_p &:= \{h \in G : h \cdot p = p\}, \\ G \cdot p &:= \{g \cdot p \in M : g \in G\}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Una acción es **transitiva** si consta de una sola órbita: $G \cdot p = M$ para todo $p \in M$.

Una variedad diferencial que tiene una acción transitiva de un grupo de Lie G se llama un **espacio homogéneo** de G .

En particular, si el subgrupo de isotropía G_p de una acción suave cualquiera es un subgrupo de Lie cerrado y si la órbita $G \cdot p$ es una subvariedad de M , esa órbita es un espacio homogéneo para G , el cual es difeomorfo a la variedad cociente G/G_p bajo la correspondencia $g \cdot p \mapsto gG_p$. Dicha correspondencia está bien definida, porque $g \cdot p = h \cdot p$ si y solo si $g^{-1}h \cdot p = g^{-1}(h \cdot p) = g^{-1}(g \cdot p) = p$; si y solo si $g^{-1}h \in G_p$; si y solo si $gG_p = hG_p$. \diamond

Ejemplo 1.96. El grupo $G = SO(n)$ actúa sobre $M = \mathbb{R}^n$ por rotaciones. El subgrupo de isotropía del vector $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ es isomorfo a $SO(n-1)$. Por otro lado, la órbita de e_n es la esfera unitaria \mathbb{S}^{n-1} , la cual es una subvariedad de \mathbb{R}^n . Luego \mathbb{S}^{n-1} es un espacio homogéneo, difeomorfo al cociente $SO(n)/SO(n-1)$. \diamond

²⁹Las coordenadas esféricas son coordenadas locales de una carta cuyo dominio es $U = \mathbb{S}^2 \setminus L$, donde L es un meridiano semicircular del polo norte al polo sur. La imagen de U es el rectángulo abierto $0 < \theta < \pi$, $-\pi < \phi < \pi$; este θ es el **ángulo polar** y ϕ es el **ángulo acimutal** de la cartografía. Se debe notar que el convenio opuesto, con $\theta \leftrightarrow \phi$, es común en los textos elementales de cálculo integral.

³⁰Nótese que $R^2 = 1_n$, así que $C_2 = \{1_n, R\}$ es un grupo de 2 elementos. Entonces $O(n) \simeq SO(n) \rtimes_{\alpha} C_2$ es un *producto semidirecto* de grupos, donde C_2 actúa sobre $SO(n)$ por $\alpha_R : A \mapsto RAR$.

Ejemplo 1.97. Sea d_{pq} la forma bilineal simétrica (1.40) sobre \mathbb{R}^n , de rango $n = p + q$ y signatura $p - q$. Cualquier forma bilineal simétrica sobre \mathbb{R}^n (degenerada o no) está dada por $d(x, y) = x^t R y$, donde $R \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica. Si F es la totalidad de las formas bilineales simétricas y V es el espacio \mathbb{R} -vectorial de las matrices simétricas $n \times n$, entonces el grupo de Lie $GL(n, \mathbb{R})$ actúa sobre F , o equivalentemente sobre V , por

$$A \cdot d(x, y) := d(A^{-1}x, A^{-1}y), \quad A \cdot R := A^{-t} R A^{-1}.$$

Referente a estas acciones, el grupo de Lie $O(p, q)$ aparece como el subgrupo de isotropía de la forma d_{pq} , o bien de la matriz diagonal $\text{diag}[1, \dots, 1, -1, \dots, -1]$. \diamond

Ejemplo 1.98. Si $k \in \{1, \dots, n\}$, un **k -marco** en \mathbb{R}^n es un juego ordenado (u_1, \dots, u_k) de k vectores unitarios en \mathbb{R}^n ortogonales entre sí. Si $A \in O(n)$, entonces (Au_1, \dots, Au_k) es otro k -marco. Denótese por $\text{St}(k, \mathbb{R}^n)$ la totalidad de k -marcos. Obsérvese que la receta $A \cdot (u_1, \dots, u_k) := (Au_1, \dots, Au_k)$ cumple (1.44) y define una acción. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ denota la base ortonormal estándar de \mathbb{R}^n , es obvio que $A \cdot (e_1, \dots, e_k) = (e_1, \dots, e_k)$ si y solo si

$$A = \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

donde C es una matriz ortogonal en $O(n - k)$. Luego hay una correspondencia biyectiva entre $\text{St}(k, \mathbb{R}^n)$ y la variedad cociente $O(n)/O(n - k)$. Se puede dotar $\text{St}(k, \mathbb{R}^n)$ de un atlas tal que esta biyección sea un difeomorfismo; así se define la **variedad de Stiefel** de k -marcos en \mathbb{R}^n . \diamond

Ejemplo 1.99. Denótese por $\text{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$ la totalidad de subespacios de \mathbb{R}^n con dimensión k . Si $V \leq \mathbb{R}^n$ con $\dim V = k$ y si $A \in O(n)$, entonces $A(V) = \{Ax : x \in V\}$ es otro subespacio k -dimensional. Se identifica \mathbb{R}^k con el subespacio $\text{lin}\langle e_1, \dots, e_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$. Obsérvese que $A(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k$ si y solo si

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

con $B \in O(k)$ y $C \in O(n - k)$. En efecto, la relación $A(V) = V$ implica $A^t(V^\perp) = V^\perp$, donde V^\perp es el complemento ortogonal de V en \mathbb{R}^n . Resulta, entonces, que hay una biyección

$$\text{Gr}(k, \mathbb{R}^n) \longleftrightarrow \frac{O(n)}{O(k) \times O(n - k)}.$$

Se puede dotar $\text{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$ de un atlas tal que esta biyección sea un difeomorfismo; así se define la **variedad de Grassmann** de subespacios k -dimensionales de \mathbb{R}^n .

En particular, $\text{Gr}(1, \mathbb{R}^n)$ es una variedad diferencial cuyos elementos son *rectas* que pasan por el origen de \mathbb{R}^n ; este es el **espacio proyectivo real** $\mathbb{R}P^{n-1}$. \diamond

1.8 Fibrados vectoriales

Definición 1.100. Sea F una variedad diferencial. Un **fibrado** o *haz fibrado*³¹ con fibra típica F es un triple (E, M, π) , usualmente escrito $E \xrightarrow{\pi} M$, compuesto de dos variedades diferenciales E y M junto con una sumersión sobreyectiva $\pi: E \rightarrow M$, que satisface estas dos condiciones:

- (a) Para cada $p \in M$, la **fibra** $E_p := \pi^{-1}(\{p\})$ es difeomorfa a F .
- (b) Existe un cubrimiento abierto $\{U_j : j \in J\}$ de M y un juego de difeomorfismos

$$\psi_j: \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F, \quad \text{para cada } j \in J, \quad (1.46)$$

tales que $\pi(\psi_j^{-1}(x, v)) = x$ para $x \in U_j, v \in F$.

La variedad E es el **espacio total** y M es la **base** del fibrado; la sumersión π se llama la **proyección** del fibrado. Los ψ_j son **trivializaciones locales**; por su existencia se dice que el fibrado es *localmente trivial*. \diamond

Nótese que cada fibra E_p es la preimagen bajo una sumersión de un punto de M y por tanto³² la Proposición 1.44 garantiza que E_p es una *subvariedad* de M , con dimensión $\dim E_p = \dim E - \dim M$. En un fibrado con fibra F , entonces, $\dim E = \dim M + \dim F$ necesariamente.

Ejemplo 1.101. Un ejemplo sencillo de un fibrado es una variedad producto $E = M \times F$, donde $\pi = \text{pr}_1$ es la proyección ordinaria sobre el primer factor, $\pi(p, v) := p$. Si U es un abierto de M , entonces $\pi^{-1}(U) = U \times F$ y una trivialización correspondiente sería $\psi := 1_{U \times F}$.

Más generalmente, si E es *difeomorfo* a esta variedad producto mediante un difeomorfismo $\beta: E \rightarrow M \times F$, tómesese $\pi := \text{pr}_1 \circ \beta: E \rightarrow M$. En este caso, se dice que $E \xrightarrow{\pi} M$ es un **fibrado trivial**. Si $\mathfrak{A} = \{(U_j, \phi_j) : j \in J\}$ es un atlas para M , entonces $\pi^{-1}(U_j) = \beta^{-1}(U_j \times F)$ y ψ_j sería la restricción de β a este abierto de E . Alternativamente, se deja el atlas de lado, tomando $U = M, \pi^{-1} = E$ y $\psi = \beta$ como una *trivialización global*. \diamond

³¹Los libros mexicanos lo llaman simplemente un *haz*. Sin embargo, el nombre *haz* (*faisceau*, en francés; *sheaf*, en inglés) se refiere correctamente a un concepto diferente, de gran importancia en la geometría algebraica. Un haz no tiene que ser localmente trivial.

³²Un punto, o bien un conjunto finito (con la topología discreta) es una variedad de dimensión 0. Se deja al lector la tarea fácil de comprobar la validez de la Proposición 1.44 en el caso $\dim S = 0$.

Ejemplo 1.102. Si G es un grupo de Lie y H es un subgrupo de Lie cerrado, entonces la aplicación cociente $\eta: G \rightarrow G/H$ es una sumersión sobreyectiva. La preimagen de cualquier elemento $\eta(g) \in G/H$ es la *coclase* $gH = \lambda_g(H)$, la cual es una subvariedad de G que es difeomorfo al subgrupo H mediante (la restricción a H de) la traslación λ_g . Resulta que esta proyección η es localmente trivial,³³ así que $G \xrightarrow{\eta} G/H$ es un fibrado con fibra típica H .

Este es un ejemplo de un **fibrado principal**: es un fibrado cuya fibra típica H es un grupo de Lie, el cual actúa a la derecha transitivamente sobre las fibras. De hecho, la fibra que contiene el punto $g \in G$ es la coclase $gH = \{gh : h \in H\}$; la traslación a derecha $\rho_k: gh \mapsto ghk$ permuta los elementos de esta coclase si (y solo si) $k \in H$. Más generalmente, un fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ cuya fibra típica es un grupo de Lie H se llama *principal* si hay una acción transitiva (a derecha) sobre las fibras individuales; no es obligatorio que el espacio total E sea un grupo. \diamond

Definición 1.103. Un **fibrado vectorial** es un fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ cuya fibra típica F y cada fibra individual E_p son espacios \mathbb{R} -vectoriales (de la misma dimensión, pues son difeomorfos), tales que las aplicaciones $F \rightarrow E_p : v \mapsto \psi_j^{-1}(p, v)$ sean isomorfismos lineales.

La dimensión $\dim F$ es el **rango** del fibrado vectorial. \diamond

No hay pérdida de generalidad en suponer que el cubrimiento $\{U_j\}$ de la Definición 1.100 venga de los dominios de cartas de un atlas $\{(U_j, \phi_j)\}$ para la base M . Si $\dim F = k$ y si $\theta: F \rightarrow \mathbb{R}^k$ es un isomorfismo lineal fijo, se obtiene un atlas para E cuyas cartas locales son los $(\pi^{-1}(U_j), (\phi_j \times \theta) \circ \psi_j)$.

Definición 1.104. Sea M una variedad diferencial de dimensión n con un atlas $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$. Defínase un fibrado vectorial $TM \xrightarrow{\tau} M$ con fibra típica \mathbb{R}^n por:

$$TM := \{(p, v) : v \in T_p M\}, \quad \tau(p, v) := p. \quad (1.47)$$

Sobre (U_α, ϕ_α) , con coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) , defínase $\psi_\alpha: \tau^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ por

$$\psi_\alpha(p, v) := (p; v^1, \dots, v^n) \quad \text{donde} \quad v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p. \quad (1.48)$$

Con la estructura diferencial dada por el atlas $\{(\tau^{-1}(U_\alpha), (\phi_\alpha \times 1_n) \circ \psi_\alpha) : \alpha \in A\}$, TM es una variedad de dimensión $2n$, $\tau: TM \rightarrow M$ es una sumersión sobreyectiva, y las propiedades (a) y (b) de la Definición 1.100 son automáticas. Fíjese que la fibra $\tau^{-1}(\{p\})$ es el espacio tangente $T_p M$. Este fibrado vectorial es el **fibrado tangente** de la variedad M . \diamond

³³La trivialidad local de η no es obvio, porque exige un examen cuidadoso de la topología del cociente G/H . Para los detalles, véase, por ejemplo, el Teorema 3.58 del libro de Warner.

Si $\{X_\kappa : \kappa \in K\}$ es una familia de conjuntos no necesariamente disjuntos, se forma su **unión disjunta** así: primero, se le asigna a cada elemento de X_κ el índice κ como etiqueta, es decir, se reemplaza X_κ por una copia biyectiva $\{\kappa\} \times X_\kappa$; luego se forma la unión ordinaria de estas copias, las cuales por definición son disjuntos. Brevemente,

$$\bigsqcup_{\kappa \in K} X_\kappa := \bigcup_{\kappa \in K} \{\kappa\} \times X_\kappa = \{(\kappa, x) : x \in X_\kappa\}.$$

Con este convenio, el espacio total TM del fibrado tangente, definido en (1.47), es la *unión disjunta de los espacios tangentes* en todos los puntos de M :

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M.$$

Si (x^1, \dots, x^n) son las coordenadas locales para la carta (U_α, ϕ_α) de M , la relación (1.48) dice que $(x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n)$ son coordenadas locales para la carta correspondiente de TM .

Definición 1.105. Si M es una variedad diferencial y si $p \in M$, denótese por T_p^*M el espacio \mathbb{R} -vectorial dual de $T_p M$. Sus elementos se llaman **covectores** en p y T_p^*M es el **espacio cotangente** en el punto p .

En una carta local (U, ϕ) de M tal que $p \in U$, cada vector tangente $v \in T_p M$ es una combinación lineal de vectores tangentes básicos, $v = a^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$. Para cada $k = 1, \dots, n$, la forma lineal $v \mapsto a^k$ es un covector en p que puede denotarse por $dx^k|_p$. Es evidente de su definición que ellos son linealmente independientes. De la Proposición 1.34, $\{\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p\}$ es una base de $T_p M$; luego, $\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$ es la base dual de T_p^*M .

Defínase un fibrado vectorial $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ con fibra típica \mathbb{R}^n por:

$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M = \{(p, \xi) : \xi \in T_p^*M\}, \quad \pi(p, \xi) := p. \quad (1.49)$$

En seguida, defínase $\chi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ por

$$\chi_\alpha(p, \xi) := (p; \xi_1, \dots, \xi_n) \quad \text{donde} \quad \xi = \xi_k dx^k \Big|_p. \quad (1.50)$$

Con la estructura diferencial dada por el atlas $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), (\phi_\alpha \times 1_n) \circ \chi_\alpha) : \alpha \in A\}$, T^*M es una variedad de dimensión $2n$, $\pi : T^*M \rightarrow M$ es una sumersión sobreyectiva, y las propiedades (a) y (b) de la Definición 1.100 son automáticas. Este fibrado vectorial es el **fibrado cotangente** de la variedad M .

De (1.50), se ve que $(x^1, \dots, x^n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ son coordenadas locales para T^*M . \diamond

Definición 1.106. Una **sección** (suave) de un fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ es una aplicación suave $s: M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = 1_M$, es decir, $s(p) \in E_p$ para todo $p \in M$.

Denótese por $\Gamma(M, E)$ la totalidad de secciones suaves del fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$. Si E es un fibrado vectorial, este conjunto es también un espacio \mathbb{R} -vectorial, al definir

$$\underline{s + t}(p) := s(p) + t(p) \in E_p, \quad \underline{\lambda s}(p) := \lambda s(p) \in E_p,$$

para $s, t \in \Gamma(M, E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in M$.

Una sección del fibrado tangente $TM \xrightarrow{\tau} M$ es una elección $p \mapsto X_p \in T_p M$ de un vector tangente en p para cada punto $p \in M$, cuya expresión en coordenadas locales dependa suavemente de p . En otras palabras, al escribir $X_p = \sum_{j=1}^n a^j(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ en una carta local (U, ϕ) , las funciones $a^j: U \rightarrow \mathbb{R}$ son suaves. En vista de la relación (1.21), una sección suave del fibrado tangente $TM \xrightarrow{\tau} M$ es un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. \diamond

Una sección suave de un fibrado vectorial trivial $M \times F \xrightarrow{\text{pr}_1} M$ está dada por una fórmula $s(x) = (x, f(x))$ donde $f: M \rightarrow F$ es una función suave. En particular, las funciones suaves en $C^\infty(M)$ están en correspondencia biunívoca con las secciones suaves del fibrado vectorial trivial $M \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{pr}_1} M$.

► Los fibrados vectoriales ofrecen, en primer lugar, unos ejemplos interesantes de variedades diferenciales. Más aún, proporcionan un nuevo punto de vista. Una sección de un fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ asigna “un vector en cada punto de la base M ” de forma suave, permitiendo pasar de un contexto puntual (el de las fibras individuales E_p , tales como los $T_p M$) al contexto global (el espacio total E , por ejemplo la variedad TM). Este enfoque contrasta con el punto de vista algebraico según el cual un campo vectorial es un operador lineal que cumple una regla de Leibniz. Hay un diálogo entre el tratamiento algebraico y el enfoque de fibrados que ilumina los aspectos computacionales de la teoría de las variedades diferenciales.

2 Formas diferenciales

En su bella monografía sobre las formas diferenciales, Flanders las define así:

Estas son las cosas que ocurren bajo signos de integración.

Sus ejemplos son “cosas” como

$$\omega = A dx + B dy + C dz, \quad \alpha = P dy dz + Q dz dx + R dx dy, \quad \lambda = H dx dy dz,$$

que aparecen en integrales de línea, de superficie y triples en \mathbb{R}^3 :

$$\int A dx + B dy + C dz, \quad \iint P dy dz + Q dz dx + R dx dy, \quad \iiint H dx dy dz.$$

Los términos A, B, \dots, H son funciones de (x, y, z) .

La temática de este capítulo es una formulación precisa del concepto de una forma diferencial, con o sin el empleo de coordenadas locales, dejando para el capítulo siguiente su colocación bajo signos de integración. Tales formas diferenciales se manejan con un aparato algebraico que tiene su interés propio, el cual se suele llamar el **cálculo de Cartan**.

2.1 Formas diferenciales de primer grado

Sea M una variedad diferencial. Cabe recordar que $C^\infty(M)$, la totalidad de funciones suaves $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, es un \mathbb{R} -álgebra conmutativa. Generalmente, $C^\infty(M)$ no es un cuerpo porque contiene divisores de cero: si $p, q \in M$ con $p \neq q$, hay vecindarios abiertos U de p y V de q tales que $U \cap V = \emptyset$; al tomar dos funciones $f, g \in C^\infty(M)$ con $f(p) = 1$, $g(q) = 1$ y $\text{sop } f \subset U$, $\text{sop } g \subset V$, entonces $fg = 0$ en $C^\infty(M)$. No obstante, la totalidad $\mathfrak{X}(M)$ de campos vectoriales suaves sobre M es un *módulo* a izquierda sobre $C^\infty(M)$, por la Definición 1.54.

En general, si X, Y son módulos a izquierda¹ sobre un \mathbb{R} -álgebra R , dicese que una función $h: X \rightarrow Y$ es una **aplicación R -lineal** si h es \mathbb{R} -lineal (es decir, es aditiva y respeta la multiplicación por escalares en \mathbb{R}) y además conmuta con la acción a izquierda de R :

$$\left\{ \begin{array}{l} h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2), \\ h(ax) = ah(x), \end{array} \right\} \quad \text{para todo } x, x_1, x_2 \in X; a \in R.$$

¹Si R es conmutativa, se podría definir $xa := ax$, de manera que X es también un R -módulo a derecha y X puede llamarse una “ R -módulo” sin mencionar lateralidades. Sin embargo, el ejemplo de $\mathfrak{X}(M)$, en donde ‘ Xf ’ ya tiene un significado diferente de ‘ fX ’, señala que conviene escribir la acción de R sobre X siempre al mismo lado.

Definición 2.1. Una **1-forma diferencial** sobre una variedad diferencial M es una aplicación $C^\infty(M)$ -lineal $\alpha: \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$, es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(X + Y) = \alpha(X) + \alpha(Y), \\ \alpha(fX) = f \alpha(X), \end{array} \right\} \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M); f \in C^\infty(M). \quad (2.1a)$$

Denótese por $\mathcal{A}^1(M)$ la totalidad de 1-formas diferenciales sobre M . Con las operaciones puntuales

$$(\alpha + \beta)(X) := \alpha(X) + \beta(X); \quad (f\alpha)(X) := f \alpha(X); \quad (2.1b)$$

el conjunto $\mathcal{A}^1(M)$ es también un *módulo* a izquierda sobre $C^\infty(M)$. \diamond

Proposición 2.2. Si $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$, el valor de la función $\alpha(X)$ en un punto $p \in M$ depende solamente del vector tangente $X_p \in T_p(M)$. La definición $\alpha_p: X_p \mapsto \alpha(X)(p)$ define una sección suave $p \mapsto \alpha_p$ del fibrado cotangente $T^*M \xrightarrow{\pi} M$.

Demostración. Tómese $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_p = 0$; se debe mostrar que $\alpha(X)(p) = 0$. Sea (U, ϕ) una carta local de M con $p \in U$ y $\phi(p) = 0$. Sea V un vecindario abierto de p tal que $\bar{V} \subset U$, con \bar{V} compacto. Por el Lema 1.28, hay una función $g \in C^\infty(M)$ de soporte compacto con $g(q) = 1$ para $q \in \bar{V}$; $0 \leq g(q) < 1$ para $q \in U \setminus \bar{V}$; y $\text{sop } g \subset U$.

Esto significa que

$$\alpha(gX)(q) = \underline{g\alpha(X)}(q) = g(q)\alpha(X)(q) = \alpha(X)(q) \quad \text{para } q \in V,$$

y además $\alpha(gX)(q') = 0$ si $q' \notin U$. El campo vectorial $gX \in \mathfrak{X}(M)$ está determinado por su restricción a U ; en efecto, por el Lema 1.53, hay funciones suaves a^1, \dots, a^n en $C^\infty(U)$ tales que $X|_U = a^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ y por ende $X|_V = (ga^j)|_V \frac{\partial}{\partial x^j}$. Defínase $Y \in \mathfrak{X}(M)$ por $Y|_U := ga^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Y|_{M \setminus U} := 0$. Está claro que $X|_V = Y|_V$ y además $\alpha(X)(p) = \alpha(Y)(p)$.

Nótese que $\alpha(Y) = a^j \alpha\left(g \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ por $C^\infty(M)$ -linealidad. La hipótesis $X_p = 0$ implica que $a^j(p) = 0$ para $j = 1, \dots, n$. Por lo tanto, vale $\alpha(X)(p) = \alpha(Y)(p) = 0$.

Ahora, si $X, Z \in \mathfrak{X}(M)$ son dos campos vectoriales tales que $X_p = Z_p$, entonces vale $(X - Z)_p = X_p - Z_p = 0$, así que $\alpha(X - Z)(p) = 0$ y por ende $\alpha(X)(p) = \alpha(Z)(p)$. Luego la correspondencia $X_p \mapsto \alpha(X)(p)$ está bien definido y es obviamente \mathbb{R} -lineal sobre T_pM ; en otras palabras, esta correspondencia α_p es un *covector* en T_p^*M .

Si $q \in V$, entonces $\alpha_q = f_k(q) dx^k|_q$ con respecto a la base vectorial de T_q^*M introducida en la Definición 1.105. Por lo tanto,

$$\alpha(X)(q) = \alpha_q(X_q) = f_k(q) a^k(q) \quad \text{para } q \in V. \quad (2.2)$$

Si se reemplaza X en esta igualdad por el campo vectorial $g \frac{\partial}{\partial x^j}$ en $\mathfrak{X}(M)$, se obtiene $f_j(q) = \alpha\left(g \frac{\partial}{\partial x^j}\right)(q)$ para $q \in V$. El lado derecho de esta ecuación es una función suave

sobre V , así que $f_j|_V$ es suave. En resumen, la expresión local de la aplicación $q \mapsto \alpha_q$ tiene funciones coeficientes suaves en un vecindario abierto de p . Como $p \in M$ es arbitrario, se obtiene de esta manera una *sección suave* $p \mapsto \alpha_p$ del fibrado $T^*M \xrightarrow{\pi} M$. \square

En cambio, si $p \mapsto \beta_p \in T_p^*M$ es una sección suave del fibrado cotangente de M , y si $X \in \mathfrak{X}(M)$, la aplicación $X_p \mapsto \beta_p(X_p) : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal para cada p . La suavidad de X y de esta sección, tomando en cuenta las evaluaciones locales de tipo (2.2), implica que $p \mapsto \beta_p(X_p)$ es también una función suave sobre M . Llámese $\beta(X)$ a este elemento de $C^\infty(M)$. Entonces $X \mapsto \beta(X)$ es una 1-forma diferencial sobre M tal que

$$\beta(X)(p) = \beta_p(X_p) \quad \text{para todo } p \in M.$$

En lo sucesivo, se identificará la 1-forma β con la sección $p \mapsto \beta_p$. En resumen, se puede escribir

$$\mathcal{A}^1(M) = \Gamma(M, T^*M). \tag{2.3}$$

Nótese que las secciones suaves $\Gamma(M, E)$ de un fibrado vectorial cualquiera $E \xrightarrow{\pi} M$ constituyen un $C^\infty(M)$ -módulo a izquierda. La identificación (2.3) de 1-formas con secciones cotangentes es efectivamente un isomorfismo de $C^\infty(M)$ -módulos.

► Si (U, ϕ) es una carta local de la variedad M , se puede definir un juego de 1-formas locales $dx^1, \dots, dx^n \in \mathcal{A}^1(U)$ por:

$$\left\langle dx^k, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \equiv dx^k \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) := \llbracket k = j \rrbracket. \tag{2.4}$$

Estas 1-formas sobre U definen *secciones locales* del fibrado cotangente, $q \mapsto (dx^k)_q$ en $\Gamma(U, T^*M)$. Los covectores $(dx^k)_q \in T_q^*M$ forman la base dual a la base de vectores tangentes $\frac{\partial}{\partial x^j}|_q \in T_qM$. Esto dice que $(dx^k)_q = dx^k|_q$ en la notación de la Definición 1.105. La demostración de la Proposición 2.2 muestra que la restricción a U de una 1-forma $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$ es una combinación lineal de estas 1-formas locales:

$$\alpha|_U = f_k dx^k, \quad \text{con coeficientes } f_1, \dots, f_n \in C^\infty(U). \tag{2.5}$$

Estas restricciones forman el espacio vectorial $\mathcal{A}^1(U) = \Gamma(U, T^*M)$, el cual es un módulo finitamente generado² sobre la \mathbb{R} -álgebra conmutativa $C^\infty(U)$.

²Si $R = C^\infty(U)$, el conjunto $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ es una **base** para el R -módulo $\mathcal{A}^1(U)$, porque es un conjunto generante que también es *R-linealmente independiente*, pues $\alpha|_U = 0$ si y solo si $\alpha_q = 0$ en T_q^*M para todo $q \in U$, si y sólo si $f_k(q) = 0$ para cada k y q . Para un anillo conmutativo R cualquiera, un R -módulo que posee una base se llama un R -módulo **libre**. Si M es una variedad que requiere más de una carta local, el $C^\infty(M)$ -módulo $\mathcal{A}^1(M)$ generalmente no es libre.

2.2 Álgebra tensorial y álgebra exterior

Antes de abordar las formas diferenciales de grado superior, es conveniente recordar ciertos conceptos de álgebra multilineal.

Sean E y F dos espacios vectoriales reales.³ Denótese por $B(E, F)$ la totalidad de aplicaciones bilineales $h: E \times F \rightarrow \mathbb{R}$. Si $x \in E$, $y \in F$, la evaluación $h \mapsto h(x, y)$ es lineal; este elemento del espacio \mathbb{R} -vectorial dual $B(E, F)^*$ será denotado por $x \otimes y$. Si $x = x^j e_j$, $y = y^k f_k$ expresan estos vectores en términos de bases $\{e_j\}$ de E y $\{f_k\}$ de F , entonces $h(x, y) = x^j y^k h(e_j, f_k)$ por la bilinealidad de h . Esto muestra que $x \otimes y = x^j y^k (e_j \otimes f_k)$: los elementos $e_j \otimes f_k$ constituyen una base de $B(E, F)^*$.

Definición 2.3. Si E y F dos espacios vectoriales sobre \mathbb{R} , su **producto tensorial** es el espacio \mathbb{R} -vectorial $E \otimes F := B(E, F)^*$. Sus elementos son sumas finitas de *tensores simples* $x \otimes y$, con $x \in E$, $y \in F$, los cuales cumplen las siguientes propiedades de combinación:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2) \otimes y &= x_1 \otimes y + x_2 \otimes y, \\ x \otimes (y_1 + y_2) &= x \otimes y_1 + x \otimes y_2, \\ t(x \otimes y) &= tx \otimes y = x \otimes ty \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Si E y F son finitodimensionales, entonces $\dim(E \otimes F) = (\dim E)(\dim F)$. ◇

Si E es un espacio \mathbb{R} -vectorial, está claro que $\dim(\mathbb{R} \otimes E) = \dim E = \dim(E \otimes \mathbb{R})$, así que hay isomorfismos lineales $\mathbb{R} \otimes E \simeq E \simeq E \otimes \mathbb{R}$, dadas por $1 \otimes x \leftrightarrow x \leftrightarrow x \otimes 1$ para $x \in E$. Nada se pierde al identificar estos tres espacios vectoriales mediante estas correspondencias.

Si E , F y G son tres espacios \mathbb{R} -vectoriales, la evaluación $k \mapsto k(x, y, z)$ de una forma trilineal k en tres vectores se puede denotar por

$$\underline{x \otimes y \otimes z} := (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

De esta manera el espacio \mathbb{R} -vectorial dual del espacio $T(E, F, G)$ de las aplicaciones trilineales $k: E \times F \times G \rightarrow \mathbb{R}$ se puede denotar por

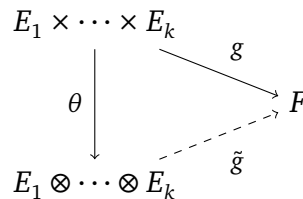
$$\underline{E \otimes F \otimes G} \simeq (E \otimes F) \otimes G \simeq E \otimes (F \otimes G).$$

Más generalmente, se puede escribir el producto tensorial de tres o más espacios \mathbb{R} -vectoriales sin emplear paréntesis, como sigue.

³La noción de producto tensorial es puramente algebraica: se puede emplear cualquier cuerpo \mathbb{F} de escalares en lugar de \mathbb{R} . En particular, de vez en cuando conviene reemplazar \mathbb{R} por escalares complejas, tomando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Definición 2.4. Sean E_1, \dots, E_k y F unos espacios vectoriales sobre \mathbb{R} . Dícese que una función $g: E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F$ es una **aplicación k -lineal** si para cada $j = 1, \dots, k$, la aplicación parcial $E_j \rightarrow F: x_j \mapsto g(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k)$ es lineal.

El **producto tensorial** $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$ es un espacio \mathbb{R} -vectorial determinado hasta isomorfismo por la siguiente propiedad universal: existe una aplicación k -lineal canónica $\theta: E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow E_1 \otimes \dots \otimes E_k$ tal que a cada aplicación k -lineal $g: E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F$ le corresponde una única aplicación lineal $\tilde{g}: E_1 \otimes \dots \otimes E_k \rightarrow F$ que satisface $\tilde{g} \circ \theta = g$:



Concretamente, dados k vectores $x_1 \in E_1, \dots, x_k \in E_k$, se denota la evaluación $h \mapsto h(x_1, x_2, \dots, x_k)$ de formas k -lineales por el símbolo $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_k$. Defínase $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$ como el espacio \mathbb{R} -vectorial generado por estas evaluaciones y colóquese $\theta(x_1, \dots, x_k) := x_1 \otimes \dots \otimes x_k$; es evidente que θ es k -lineal. Basta definir $\tilde{g}(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) := g(x_1, \dots, x_k)$ y extender esta receta por linealidad.

El elemento típico del producto tensorial $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$ es una *suma finita* de tensores simples, $\sum_r x_{1,r} \otimes x_{2,r} \otimes \dots \otimes x_{k,r}$, con $x_{j,r} \in E_j$ para $j = 1, \dots, k$. Si $\{e_{j1}, \dots, e_{jm_j}\}$ es una base vectorial para cada E_j , los $e_{1r_1} \otimes e_{2r_2} \otimes \dots \otimes e_{kr_k}$, con cada $r_j \in \{1, \dots, m_j\}$, forman una base para $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$. Por lo tanto, vale $\dim(E_1 \otimes \dots \otimes E_k) = m_1 \cdots m_k = \prod_{j=1}^k \dim E_j$. \diamond

Definición 2.5. Si $f: E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: E_{k+1} \times \dots \times E_{k+r} \rightarrow \mathbb{R}$ son dos formas multilineales, su **producto tensorial** es la forma $(k+r)$ -lineal $f \otimes g: E_1 \times \dots \times E_{k+r} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por⁴

$$\underline{f \otimes g}(x_1, \dots, x_{k+r}) := f(x_1, \dots, x_k) g(x_{k+1}, \dots, x_{k+r}). \quad \diamond$$

Definición 2.6. Si E es un espacio \mathbb{R} -vectorial, $E^k := E \times \dots \times E$ (k veces) denota el producto cartesiano de k copias de E . Una aplicación k -lineal $g: E^k \rightarrow F$ es **alternante** (o *antisimétrica*) si cualquier permutación $\sigma \in S_k$ de sus argumentos multiplica sus valores por el signo $(-1)^\sigma = \pm 1$ de la permutación:

$$g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = (-1)^\sigma g(x_1, \dots, x_k) \quad \text{para } x_1, \dots, x_k \in E; \sigma \in S_k. \quad \diamond$$

⁴Si $k = r = 1$, $E = E_1$ y $F = E_2$, entonces $f \in E^*$ y $g \in F^*$ son formas lineales sobre E y F respectivamente: la notación $f \otimes g$ ya está definida como elemento del espacio vectorial $E^* \otimes F^* = B(E^*, F^*)^*$. Si E y F son finitodimensionales, no es difícil comprobar que este elemento coincide con la evaluación $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$, así que las dos definiciones de $f \otimes g$ son compatibles.

Definición 2.7. Cada aplicación k -lineal $h: E^k \rightarrow F$ da lugar a una aplicación k -lineal alternante $\mathbb{A}h: E^k \rightarrow F$ por **antisimetrización**:

$$(\mathbb{A}h)(x_1, \dots, x_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma h(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}). \quad (2.6)$$

Nótese que una aplicación k -lineal g es alternante si y solo si $\mathbb{A}g = g$.

Si $f: E^k \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: E^r \rightarrow \mathbb{R}$, su **producto exterior** es la forma $(k+r)$ -lineal alternante $f \wedge g: E^{k+r} \rightarrow \mathbb{R}$ que resulta de antisimetrizar su producto tensorial, con un ajuste de normalización:

$$f \wedge g := \frac{(k+r)!}{k!r!} \mathbb{A}(f \otimes g).$$

En particular, cuando $k = r = 1$, la última fórmula se reduce a $f \wedge g = f \otimes g - g \otimes f$. \diamond

Lema 2.8. (a) *El producto exterior de formas multilineales alternantes es asociativa y anticonmutativa: dadas tres formas $f: E^k \rightarrow \mathbb{R}$, $g: E^r \rightarrow \mathbb{R}$, $h: E^s \rightarrow \mathbb{R}$, valen*

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h), \quad (2.7a)$$

$$g \wedge f = (-1)^{kr} f \wedge g. \quad (2.7b)$$

(b) *Si $f^1: E^{k_1} \rightarrow \mathbb{R}$, ..., $f^s: E^{k_s} \rightarrow \mathbb{R}$ son formas alternantes, su producto exterior obedece*

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^r = \frac{(k_1 + \dots + k_s)!}{k_1! \dots k_s!} \mathbb{A}(f^1 \otimes \dots \otimes f^s). \quad (2.8)$$

Demostración. El grupo S_k actúa sobre las formas k -lineales $a: E^k \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\sigma \cdot a(x_1, \dots, x_k) := a(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(k)}).$$

Con estas notación, la fórmula (2.6) de antisimetrización se simplifica, al poner $\tau := \sigma^{-1}$, en $\mathbb{A}h := (1/k!) \sum_{\tau} (-1)^\tau (\tau \cdot nh)$.

De la Definición 2.5 está claro que el producto tensorial de formas es asociativo; por lo tanto, vale

$$\begin{aligned} (f \wedge g) \wedge h &= \frac{(k+r+s)!}{(k+r)!s!} \mathbb{A}((f \wedge g) \otimes h) = \frac{(k+r+s)!}{(k+r)!s!} \frac{(k+r)!}{k!r!} \mathbb{A}(\mathbb{A}(f \otimes g) \otimes h) \\ &= \frac{(k+r+s)!}{k!r!s!} \frac{1}{(k+r+s)!} \frac{1}{(k+r)!} \sum_{\sigma \in S_{k+r+s}} \sum_{\tau \in S_{k+r}} (-1)^\sigma (-1)^\tau \sigma \cdot (\tau \cdot (f \otimes g) \otimes h) \\ &= \frac{1}{k!r!s!(k+r)!} \sum_{\sigma \in S_{k+r+s}} \sum_{\tau \in S_{k+r}} (-1)^{\sigma\tau} (\sigma\tau) \cdot (f \otimes g \otimes h) \\ &= \frac{1}{k!r!s!} \sum_{\rho \in S_{k+r+s}} (-1)^\rho \rho \cdot (f \otimes g \otimes h), \end{aligned}$$

luego de identificar $\tau \in S_{k+r}$ con la permutación correspondiente en S_{k+r+s} que deja fijos los últimos s objetos. De igual manera, se obtiene

$$f \wedge (g \wedge h) = \frac{1}{k! r! s!} \sum_{\rho \in S_{k+r+s}} (-1)^\rho \rho \cdot (f \otimes g \otimes h),$$

lo cual establece la asociatividad (2.7a). De camino, se ha verificado el caso $s = 3$ de la relación (2.8); el caso general sigue por inducción sobre s .

En el caso $k = r = 1$, la forma bilinear $f \wedge g$ está dada por (2.6):

$$f \wedge g(x, y) = 2 \mathbb{A}(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y) - f(y)g(x). \quad (2.9)$$

De ahí, su anticonmutatividad es evidente: $g \wedge f = -f \wedge g$.

En el caso general, sea $\kappa \in S_{k+r}$ la permutación que intercambia los bloques $\{1, \dots, k\}$ con $\{k+1, \dots, k+r\}$; es decir,

$$\kappa(i) := \begin{cases} i+r & \text{si } i \leq k, \\ i-k & \text{si } i > k. \end{cases}$$

Esta permutación κ es el producto de kr transposiciones de elementos consecutivos, pues se requiere r transposiciones para llevar cada uno de los k elementos iniciales a su posición final. Luego, $(-1)^\kappa = (-1)^{kr}$. Si $f = f^1 \wedge \dots \wedge f^k$ y $g = g^1 \wedge \dots \wedge g^r$ con $f^i, g^j \in E^*$, la anticonmutatividad de las formas lineales establece (2.7b) por inducción sobre k y r .

Solo falta observar que el espacio vectorial de formas k -lineales alternantes sobre E está generado linealmente por formas de tipo $f^1 \wedge \dots \wedge f^k$, donde f^1, \dots, f^k son elementos de una base vectorial de E^* . \square

Lema 2.9. Si $g^1, \dots, g^k \in E^*$ y $x_1, \dots, x_k \in E$, entonces

$$g^1 \wedge \dots \wedge g^k(x_1, \dots, x_k) = \det[g^i(x_j)]. \quad (2.10)$$

Demostración. La igualdad (2.9) es el caso $k = 2$ de esta fórmula. En el caso general, se obtiene de (2.8) y (2.6):

$$\begin{aligned} (g^1 \wedge \dots \wedge g^k)(x_1, \dots, x_k) &= k! \mathbb{A}(g^1 \otimes \dots \otimes g^k)(x_1, \dots, x_k) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma (g^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes g^{\sigma(k)})(x_1, \dots, x_k) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma g^{\sigma(1)}(x_1) \dots g^{\sigma(k)}(x_k) = \det[g^i(x_j)]. \quad \square \end{aligned}$$

Definición 2.10. Sea E un espacio \mathbb{R} -vectorial de dimensión n (finita). Denótese por $\Lambda^k E^*$ el espacio \mathbb{R} -vectorial de las formas k -lineales alternantes $f: E^k \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ es una base de E^* , la base correspondiente de $\Lambda^k E^*$ está dado por las formas

$$\theta^I \equiv \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k}, \quad \text{con } I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}.$$

Debido a la anticonmutatividad $\theta^i \wedge \theta^j = -\theta^j \wedge \theta^i$, se debe escribir las 1-formas θ^i en el orden estrictamente creciente, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, para describir la k -forma básica θ^I . La cardinalidad de esta base es

$$\#\{I \subseteq \{1, \dots, n\} : |I| = k\} = \binom{n}{k}.$$

En particular, $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^0 E^* = 1$ porque $\Lambda^0 E^* := \mathbb{R}$ (una “forma 0-lineal” es una constante); $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^n E^* = 1$ también; $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^1 E^* = n$ porque $\Lambda^1 E^* = E^*$; y $\Lambda^k E^* = \{0\}$ si $k > n$.

La suma directa de estos espacios vectoriales de k -formas,

$$\Lambda^\bullet E^* := \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k E^* = \mathbb{R} \oplus E^* \oplus \Lambda^2 E^* \oplus \cdots \oplus \Lambda^n E^* \quad (2.11)$$

es una \mathbb{R} -álgebra graduada bajo el producto exterior de formas: si $f \in \Lambda^k E^*$ y $g \in \Lambda^r E^*$, entonces $f \wedge g \in \Lambda^{k+r} E^*$. Esta $\Lambda^\bullet E^*$ es el **álgebra exterior** asociado con el espacio vectorial E^* . Nótese que $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^\bullet E^* = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. \diamond

Vale la pena considerar el concepto de *álgebra graduada* en un contexto más general.

Definición 2.11. Sea A un álgebra sobre un cuerpo \mathbb{F} (esto es, un espacio \mathbb{F} -vectorial dotado de un producto asociativo \mathbb{F} -bilineal). Dícese que A es un **álgebra graduada** (o más precisamente, \mathbb{Z} -graduada) si A es la suma directa de unos subespacios \mathbb{F} -vectoriales A_k , para $k \in \mathbb{Z}$, de tal manera que el producto respeta la graduación:

$$x \in A_k, y \in A_l \implies xy \in A_{k+l},$$

o más brevemente: $A_k A_l \subseteq A_{k+l}$. Algunos de estos subespacios A_k pueden ser nulos: este es el caso del álgebra $\Lambda^\bullet E^*$ de (2.11), para la cual $\Lambda^k E^* = \{0\}$ si $k < 0$ o si $k > \dim_{\mathbb{R}} E^*$.

Conviene escribir $\#x = r \in \mathbb{Z}$ cuando $x \in A_r$.

Si $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ es una \mathbb{F} -álgebra graduada, un operador \mathbb{F} -lineal $T: A \rightarrow A$ tiene **grado** $r \in \mathbb{Z}$ si $T(A_k) \subseteq A_{k+r}$ para todo k .

En particular, cada $z \in A_r$ define dos operadores de grado r : la *premultiplicación* $x \mapsto zx$ y la *postmultiplicación* $x \mapsto xz$.

Una **derivación par** de A es un operador \mathbb{F} -lineal $D: A \rightarrow A$ que cumple una regla de Leibniz: $D(ab) = (Da)b + a(Db)$ para todo $a, b \in A$. Una **derivación impar** de A es otro operador \mathbb{F} -lineal $E: A \rightarrow A$ tal que

$$E(ab) = (Ea)b + (-1)^k a(Eb) \quad \text{para todo } a \in A_k, b \in A.$$

[[Esta fórmula también puede escribirse como $E(ab) = (Ea)b + (-1)^{\#a} a(Eb)$.]]

El *conmutador* $[D, E] := DE - ED$ resulta ser una derivación impar: el cálculo que demostró la Proposición 1.55 se adapta al caso. De igual manera, si F es otra derivación impar, el *anticonmutador* $[E, F]_+ := EF + FE$ es una derivación par. \diamond

2.3 Formas diferenciales de grado superior

Definición 2.12. Si $p \in \mathbb{N}$, un **p -tensor covariante** [o un *tensor de bigrado* $(p, 0)$] sobre una variedad diferencial M es una aplicación p -lineal $R: \mathfrak{X}(M)^p \rightarrow C^\infty(M)$ tal que cada aplicación parcial $X_j \mapsto R(X_1, \dots, X_j, \dots, X_p)$ sea $C^\infty(M)$ -lineal. Dicho de otro modo, R cumple las dos propiedades algebraicas:

$$\begin{aligned} R(X_1, \dots, X_j + X'_j, \dots, X_p) &= R(X_1, \dots, X_j, \dots, X_p) + R(X_1, \dots, X'_j, \dots, X_p), \\ R(X_1, \dots, fX_j, \dots, X_p) &= f R(X_1, \dots, X_j, \dots, X_p), \end{aligned}$$

para $X_1, \dots, X_j, X'_j, \dots, X_p \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$.

Un **q -tensor contravariante** [o *tensor de bigrado* $(0, q)$] sobre M es una aplicación q -lineal $S: \mathcal{A}^1(M)^q \rightarrow C^\infty(M)$ tal que cada $\alpha^k \mapsto S(\alpha^1, \dots, \alpha^k, \dots, \alpha^q)$ sea $C^\infty(M)$ -lineal.

Un 0-tensor sobre M (covariante o contravariante) es un elemento de $C^\infty(M)$.

Una aplicación $(p + q)$ -lineal $T: \mathfrak{X}(M)^p \times \mathcal{A}^1(M)^q \rightarrow C^\infty(M)$, cuyas aplicaciones parciales $X_j \mapsto T(X_1, \dots, X_p, \alpha^1, \dots, \alpha^q)$ y $\alpha^k \mapsto T(X_1, \dots, X_p, \alpha^1, \dots, \alpha^q)$ son $C^\infty(M)$ -lineales, es un **(p, q) -tensor mixto** [o un *tensor de bigrado* (p, q)] sobre M . \diamond

Un 1-tensor covariante es simplemente *una 1-forma diferencial*.

Un 1-tensor contravariante es una aplicación $C^\infty(M)$ -lineal de las 1-formas diferenciales en \mathbb{R} . Dado un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, la *evaluación* de 1-formas en X es una aplicación \mathbb{R} -lineal $\alpha \mapsto \alpha(X)$ de $\mathcal{A}^1(M)$ en \mathbb{R} , que además es $C^\infty(M)$ -lineal:

$$\underline{f\alpha}(X) = f \alpha(X) \quad \text{para todo } f \in C^\infty(M), \alpha \in \mathcal{A}^1(M).$$

Sea $S: \mathcal{A}^1(M) \rightarrow C^\infty(M)$ un 1-tensor contravariante. Al adaptar la demostración de la Proposición 2.2, *mutatis mutandis*, al presente caso, es posible mostrar que:

\diamond el valor de $S(\alpha)$ en un punto $p \in M$ depende solamente del covector $\alpha_p \in T_p^*M$;

- ◊ la función $X_p: \alpha_p \mapsto S(\alpha)(p)$ es \mathbb{R} -lineal, así que $X_p \in (T_p^*M)^* \simeq T_pM$;
- ◊ la correspondencia $p \mapsto X_p$ es una sección suave del fibrado tangente $TM \xrightarrow{\tau} M$;
- ◊ dicha sección es un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, para el cual $S(\alpha) = \alpha(X)$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$.

En resumen: cualquier 1-tensor contravariante S es una evaluación de 1-formas en un campo vectorial X . Al identificar la evaluación $\alpha \mapsto \alpha(X)$ con el campo X mismo, se observa que los 1-tensores covariantes son simplemente los campos vectoriales sobre M .

Definición 2.13. Una **k -forma diferencial** [o una *forma diferencial de grado k*] sobre una variedad diferencial M es una aplicación k -lineal alternante $\omega: \mathfrak{X}(M)^k \rightarrow C^\infty(M)$ tal que cada aplicación parcial $X_j \mapsto \omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_k)$ es $C^\infty(M)$ -lineal. En otras palabras, ω cumple estas tres propiedades algebraicas:

$$\begin{aligned} \omega(X_1, \dots, X_j + X'_j, \dots, X_k) &= \omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_k) + \omega(X_1, \dots, X'_j, \dots, X_k), \\ \omega(X_1, \dots, fX_j, \dots, X_k) &= f \omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_k) \quad \text{para todo } f \in C^\infty(M), \\ \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) &= (-1)^\sigma \omega(X_1, \dots, X_k) \quad \text{para cada } \sigma \in S_k. \end{aligned}$$

La totalidad de k -formas diferenciales sobre M será denotado $\underline{\mathcal{A}^k(M)}$. Este es un módulo sobre el álgebra $C^\infty(M)$. ◊

Definición 2.14. Cada k -tensor covariante R sobre una variedad M determina la k -forma

$$\underline{\mathbb{A}R}(X_1, \dots, X_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma R(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}).$$

Si $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, $\eta \in \mathcal{A}^r(M)$, su **producto tensorial** es el $(k+r)$ -tensor covariante:

$$\underline{\omega \otimes \eta}(X_1, \dots, X_{k+r}) := \omega(X_1, \dots, X_k) \eta(X_{k+1}, \dots, X_{k+r});$$

y su **producto exterior** $\underline{\omega \wedge \eta} \in \mathcal{A}^{k+r}(M)$ se define por:

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k+r)!}{k!r!} \mathbb{A}(\omega \otimes \eta). \quad (2.12)$$

Con este producto exterior, la suma directa

$$\mathcal{A}^\bullet(M) := \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{A}^k(M) = C^\infty(M) \oplus \mathcal{A}^1(M) \oplus \dots \oplus \mathcal{A}^n(M) \quad (2.13)$$

es una \mathbb{R} -álgebra graduada, que es a la vez un $C^\infty(M)$ -módulo. Conviene usar la notación $\mathcal{A}^0(M) \equiv C^\infty(M)$; una **0-forma** es simplemente una función suave sobre M . Una **forma diferencial**, sin mención explícita de grado, es un elemento de este álgebra $\mathcal{A}^\bullet(M)$. ◊

Definición 2.15. Sea M una variedad diferencial de dimensión n . Si $k \in \{1, \dots, n\}$, se puede definir un fibrado vectorial $\Lambda^k T^*M \xrightarrow{\pi} M$ cuya fibra $\pi^{-1}(\{p\})$ sobre un punto $p \in M$ cualquiera es la “potencia exterior” $\Lambda^k T_p^*M$. En efecto, sea

$$\Lambda^k T^*M := \{(p, \zeta) : p \in M, \zeta \in \Lambda^k T_p^*M\} = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k T_p^*M$$

y colóquese $\pi(p, \zeta) := p$. Dado un atlas $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ para M , defínase unas funciones $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ por

$$\psi_\alpha(p, \zeta) := (p; \zeta_{1\dots k}, \dots, \zeta_{(n-k+1)\dots n}) \quad \text{si} \quad \zeta = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \zeta_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \Big|_p \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \Big|_p.$$

Las cartas locales $(\pi^{-1}(U_\alpha), (\phi_\alpha \times 1_{\binom{n}{k}}) \circ \psi_\alpha)$, para $\alpha \in A$, forman un atlas que determina una estructura diferencial sobre $\Lambda^k T^*M$, con la cual $\Lambda^k T^*M$ es una variedad de dimensión $n + \binom{n}{k}$ y la proyección $\pi : \Lambda^k T^*M \rightarrow M$ es automáticamente una función suave. Por su construcción, $\Lambda^k T^*M \xrightarrow{\pi} M$ es un fibrado vectorial de rango $\binom{n}{k}$. \diamond

Resulta, entonces, con una adaptación de la Proposición 2.2 al caso presente, que el valor de la función $\omega(X_1, \dots, X_k)$ en cualquier $p \in M$ depende solamente de los vectores tangentes $(X_1)_p, \dots, (X_k)_p \in T_p M$. Además, está claro que la aplicación $(T_p M)^k \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $((X_1)_p, \dots, (X_k)_p) \mapsto \omega(X_1, \dots, X_k)(p)$ es un forma k -lineal y alternante. Por lo tanto, hay un elemento $\omega_p \in \Lambda^k T_p^*M$ tal que

$$\omega_p((X_1)_p, \dots, (X_k)_p) = \omega(X_1, \dots, X_k)(p) \quad \text{para todo} \quad p \in M. \quad (2.14)$$

La aplicación $p \mapsto \omega_p$ entonces define una sección del fibrado vectorial $\Lambda^k T^*M \xrightarrow{\pi} M$. Tal como ya se ha hecho anteriormente, la fórmula (2.14) constituye una *identificación* de la k -forma ω con esta sección; de manera que $\mathcal{A}^k(M) = \Gamma(M, \Lambda^k T^*M)$.

► Si (U, ϕ) es una carta local para M , la **restricción** $\omega|_U \in \mathcal{A}^k(U)$ se define por una generalización en la prescripción (2.5) para 1-formas locales. Esta carta determina un juego básico de 1-formas locales $dx^1, \dots, dx^n \in \mathcal{A}^1(U)$. Las reglas algebraicas de la Definición 2.14 conducen a productos tensoriales y productos exteriores de ellas. En primer lugar,

$$dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \right) := \prod_{r=1}^k dx^{i_r} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \right) = \prod_{r=1}^k \llbracket i_r = j_r \rrbracket = \llbracket I = J \rrbracket,$$

si I, J son k -tuplas ordenadas de elementos distintos de $\{1, 2, \dots, n\}$. En seguida, se define por antisimetrización:

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} := k! \mathbb{A}(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}).$$

La expresión local de ω sobre el dominio de carta U entonces tiene el aspecto siguiente:

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \equiv \sum_{|I|=k} f_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (2.15)$$

En la segunda sumatoria, se sobreentiende que $I := \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ tiene sus elementos desplegados *en orden creciente*.

Notación. De ahora en adelante, se adopta el siguiente convenio para *omitir un elemento de una lista*. Para omitir la entrada X_j de la lista ordenada (X_1, \dots, X_k) , se escribe

$$(X_1, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k) := (X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_k).$$

En general, el *techo* $\widehat{}$ denota la ausencia de la entrada techada.

Proposición 2.16. *El producto exterior de formas diferenciales es asociativa y anticonmutativa: si $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, $\eta \in \mathcal{A}^r(M)$, $\zeta \in \mathcal{A}^s(M)$, entonces*

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta), \quad (2.16a)$$

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{kr} \omega \wedge \eta. \quad (2.16b)$$

Si α^i es una k_i -forma lineal, para $i = 1, \dots, t$, entonces

$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^t = \frac{(k_1 + \dots + k_t)!}{k_1! \dots k_t!} \mathbb{A}(\alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^t). \quad (2.17)$$

Demostración. Basta observar que los valores de estas formas en cada punto $p \in M$ satisfacen el Lema 2.8, con $E = T_p M$. \square

► La totalidad de formas diferenciales $\mathcal{A}^\bullet(M)$ es un ejemplo de un *álgebra graduada*.

Si $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$ es una 1-forma fija, la premultiplicación $\varepsilon_\alpha: \omega \mapsto \alpha \wedge \omega$ es un operador \mathbb{R} -lineal sobre $\mathcal{A}^\bullet(M)$ de grado $+1$: si $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, entonces $\alpha \wedge \omega \in \mathcal{A}^{k+1}(M)$.

Definición 2.17. La **contracción** de una k -forma diferencial $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ por un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ es la forma $i_X \omega \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$ definida por

$$i_X \omega(X_1, \dots, X_{k-1}) := \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1}). \quad (2.18)$$

Si $f \in \mathcal{A}^0(M) = C^\infty(M)$, se define $i_X f := 0$. Si $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$, la fórmula (2.18) se simplifica en $i_X \alpha := \alpha(X)$ en $C^\infty(M)$. \diamond

Algunos autores dicen que la contracción $i_X \omega$ es un *producto interior* de X y ω . Se escribe $X \lrcorner \omega$ como sinónimo de $i_X \omega$, para marcar el contraste con el producto exterior $\alpha \wedge \omega = \varepsilon_\alpha \omega$.

Proposición 2.18. Si $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in \mathcal{A}^1(M)$ son 1-formas y si $X, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ son campos vectoriales sobre una variedad M ; y si $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ y $\eta \in \mathcal{A}^r(M)$, entonces las siguientes fórmulas son válidas:

$$(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(X_1, \dots, X_k) = \det[\alpha^i(X_j)], \quad (2.19a)$$

$$i_X(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \alpha^j(X) (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha^j} \wedge \cdots \wedge \alpha^k), \quad (2.19b)$$

$$i_X(\omega \wedge \eta) = i_X \omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i_X \eta. \quad (2.19c)$$

La última fórmula dice que la contracción i_X es una derivación impar de $\mathcal{A}^\bullet(M)$.

Demostración. Ad (a): La fórmula (2.19a) sigue el patrón del Lema 2.9:

$$\begin{aligned} (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(X_1, \dots, X_k) &= k! \mathbb{A}(\alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^k)(X_1, \dots, X_k) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma (\alpha^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha^{\sigma(k)})(X_1, \dots, X_k) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma \alpha^{\sigma(1)}(X_1) \cdots \alpha^{\sigma(k)}(X_k) = \det[\alpha^i(X_j)]. \end{aligned}$$

Ad (b): Al desarrollar este determinante con respecto a su primera columna, sigue:

$$\begin{aligned} i_{X_1}(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(X_2, \dots, X_k) &= (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(X_1, \dots, X_k) = \det[\alpha^i(X_j)] \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \alpha^j(X_1) \det[\alpha^r(X_s)] \quad (\text{con } r \neq j, s \geq 2) \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \alpha^j(X_1) (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha^j} \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(X_2, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Ad (c): Cada elemento de $\mathcal{A}^\bullet(M)$ es una suma finita de productos exteriores de 1-formas; para comprobar la relación (2.19c), cuyos dos lados dependen bilinealmente de ω y η , basta tomar $\omega = \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k$ y $\eta = \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^r$ donde las α^i y β^j son 1-formas. El resultado sigue del cálculo

$$\begin{aligned} &i_X(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k \wedge \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^r) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \alpha^i(X) \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \cdots \wedge \alpha^k \wedge \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^r \\ &\quad + \sum_{j=1}^r (-1)^{k+j-1} \beta^j(X) \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k \wedge \beta^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\beta^j} \wedge \cdots \wedge \beta^r \\ &= i_X(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k) \wedge (\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^r) + (-1)^k (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k) \wedge i_X(\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^r). \quad \square \end{aligned}$$

Definición 2.19. Sea $\tau : M \rightarrow N$ una aplicación suave entre dos variedades diferenciales y sea $\beta \in \mathcal{A}^1(N)$. La **imagen inversa** (o la *preimagen*, o bien el *pullback*) $\tau^*\beta \in \mathcal{A}^1(M)$ se define por

$$(\tau^*\beta)_p(X_p) := \beta_{\tau(p)}(T_p\tau(X_p)). \quad (2.20)$$

Fíjese que la aplicación lineal $T_{\tau(p)}^*N \rightarrow T_p^*M : \beta_{\tau(p)} \mapsto (\tau^*\beta)_p$ es, por esta misma definición, la *transpuesta* de la aplicación tangente $T_p\tau : T_pM \rightarrow T_{\tau(p)}N$.

Si τ es un difeomorfismo, esta imagen inversa posee una relación sencilla con las imágenes directas de campos vectoriales bajo τ ; en efecto, de (1.25) se obtiene

$$\tau^*\beta(X) = \beta(\tau_*X) \circ \tau, \quad (2.21)$$

porque se recupera (2.20) al evaluar los dos lados de (2.21) en el punto $p \in M$.

Más generalmente, si $\omega \in \mathcal{A}^k(N)$, se define su imagen inversa bajo τ por:

$$(\tau^*\omega)_p((X_1)_p, \dots, (X_k)_p) := \omega_{\tau(p)}(T_p\tau(X_1)_p, \dots, T_p\tau(X_k)_p),$$

y en el caso de que τ sea un difeomorfismo, la forma $\tau^*\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ cumple

$$\tau^*\omega(X_1, \dots, X_k) = \omega(\tau_*X_1, \dots, \tau_*X_k) \circ \tau.$$

Para $g \in \mathcal{A}^0(N) = C^\infty(N)$, se define simplemente $\tau^*g := g \circ \tau$. ◇

Proposición 2.20. *El producto exterior es equivariante bajo imágenes inversas; es decir, si $\tau : M \rightarrow N$ es una aplicación suave, $\omega \in \mathcal{A}^k(N)$ y $\eta \in \mathcal{A}^r(N)$, entonces en $\mathcal{A}^{k+r}(M)$ vale*

$$\tau^*(\omega \wedge \eta) = \tau^*\omega \wedge \tau^*\eta. \quad (2.22)$$

Demostración. Si $X_1, \dots, X_{k+r} \in \mathfrak{X}(M)$ y $p \in M$, entonces

$$\begin{aligned} (\tau^*(\omega \wedge \eta))_p((X_1)_p, \dots, (X_{k+r})_p) &= (\omega \wedge \eta)_{\tau(p)}(T_p\tau(X_1)_p, \dots, T_p\tau(X_{k+r})_p) \\ &= \binom{k+r}{k} \mathbb{A}(\omega_{\tau(p)} \otimes \eta_{\tau(p)})(T_p\tau(X_1)_p, \dots, T_p\tau(X_{k+r})_p) \\ &= \binom{k+r}{k} \mathbb{A}((\tau^*\omega)_p \otimes (\tau^*\eta)_p)((X_1)_p, \dots, (X_{k+r})_p) \\ &= (\tau^*\omega \wedge \tau^*\eta)_p((X_1)_p, \dots, (X_{k+r})_p). \end{aligned}$$

Si τ es un difeomorfismo, hay un argumento “no puntual” equivalente:

$$\begin{aligned} \tau^*(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+r}) &= \binom{k+r}{k} \mathbb{A}(\omega \otimes \eta)(\tau_*X_1, \dots, \tau_*X_{k+r}) \circ \tau \\ &= \frac{1}{k!r!} \sum_{\sigma \in S_{k+r}} (\omega(\tau_*X_{\sigma(1)}, \dots, \tau_*X_{\sigma(k)}) \eta(\tau_*X_{\sigma(k+1)}, \dots, \tau_*X_{\sigma(k+r)})) \circ \tau. \end{aligned}$$

Al aplicar la fórmula (2.21), se obtiene

$$\begin{aligned}\tau^*(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+r}) &= \frac{1}{k! r!} \sum_{\sigma \in S_{k+r}} \tau^*\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \tau^*\eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+r)}) \\ &= \tau^*\omega \wedge \tau^*\eta(X_1, \dots, X_{k+r}).\end{aligned}$$

Como X_1, \dots, X_{k+r} son arbitrarios, la relación (2.22) queda demostrada. \square

2.4 La derivada exterior

Definición 2.21. Si $f \in C^\infty(M)$, la evaluación $X \mapsto Xf$ es una aplicación $C^\infty(M)$ -lineal de $\mathfrak{X}(M)$ en $C^\infty(M)$, pues $(X + Y)f = Xf + Yf$ y $(gX)f = g(Xf)$ por la definición de gX . Por lo tanto, dicha evaluación define una 1-forma diferencial que se denota por $df \in \mathcal{A}^1(M)$:

$$df(X) := Xf. \quad (2.23)$$

En coordenadas locales, se ve que $df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \partial f / \partial x^j$; por lo tanto, la expresión local de df es la suma finita

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j. \quad \diamond$$

Definición 2.22. Sea (U, ϕ) una carta local para M y sea $\omega \in \mathcal{A}^k(U)$ una k -forma local dada por (2.15): $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ para algunas $f_I \in C^\infty(U)$. Defínase la forma local $d\omega \in \mathcal{A}^{k+1}(U)$ por

$$\begin{aligned}d\omega &:= \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.\end{aligned} \quad (2.24)$$

Las 1-formas $df^r \in \mathcal{A}^1(U)$ anticonmutan: $df^r \wedge df^s = -df^s \wedge df^r$, así que los sumandos con $j \in I$ al lado derecho de (2.24) se anulan. Se puede exigir $j \notin I$ al lado derecho sin cambiar el resultado; aunque $\{j, i_1, \dots, i_k\}$ no estará en orden creciente si $j > i_1$. \diamond

Es evidente que $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ si $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{A}^k(U)$, así que $\omega \mapsto d\omega$ es \mathbb{R} -lineal. Si $g \in C^\infty(U)$, nótese la regla de Leibniz

$$\begin{aligned}d(g\omega) &= \sum_{I,j} \frac{\partial}{\partial x^j} (gf_I) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{I,j} \left(\frac{\partial g}{\partial x^j} f_I + g \frac{\partial f_I}{\partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= dg \wedge \omega + g d\omega.\end{aligned}$$

Más generalmente, si $\eta = \sum_{|J|=r} g_J dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} \in \mathcal{A}^r(U)$, entonces

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{I,J} d(f_I g_J) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} \\
&= \sum_{I,J} (df_I g_J + f_I dg_J) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} \\
&= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \sum_{I,J} f_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dg_J \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} \\
&= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Para la tercera igualdad, se usó la anticonmutación (2.16b) para pasar la 1-forma dg_J a la derecha de la k -forma $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$.

Se concluye que $\omega \mapsto d\omega$ es una derivación impar del álgebra graduada $\mathcal{A}^\bullet(U)$.

Lema 2.23. Sea M una variedad diferencial y sea $D: \mathcal{A}^\bullet(M) \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(M)$ una derivación (par o impar). Si U es un abierto de M y si $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$ se anula sobre U , es decir, $\omega|_U = 0$, entonces $(D\omega)|_U = 0$ también.

Demostración. Si $p \in U$, el Lema 1.28 y la Definición 1.52 muestran que es posible hallar un vecindario V de p con $\bar{V} \subset U$ y una función suave $h \in C^\infty(M)$ tal que $\text{soph} \subset U$ mientras $h(q) = 1$ para $q \in V$.

La forma diferencial ω es una suma $\omega = \sum_{k=0}^{\dim M} \omega_k$ donde cada $\omega_k \in \mathcal{A}^k(M)$, en vista de (2.13). La condición $\omega|_U = 0$ dice que $\omega_q = 0$ en $\Lambda^\bullet T_q^*M = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} \Lambda^k T_q^*M$ para cada $q \in U$, así que $\omega_k|_U = 0$ en $\mathcal{A}^k(U)$ para cada k . Entonces, sin perder generalidad, se puede suponer que $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ para algún k fijo.

La forma diferencial $h\omega$ se anula en U porque $\omega|_U = 0$ y también en $M \setminus (\text{soph})$; luego $h\omega = 0$ en $\mathcal{A}^k(M)$. La \mathbb{R} -linealidad de D y la propiedad de derivación entonces implican

$$0 = D(0) = D(h\omega) = Dh \wedge \omega \pm h D\omega,$$

donde el signo \pm vale $+1$ o bien $(-1)^k$, según D sea par o impar. Al evaluar esta igualdad en cualquier $q \in V$, se obtiene $0 = (Dh)_q \wedge \omega_q \pm h(q) (D\omega)_q$ en $\Lambda^\bullet T_q^*M$. La hipótesis $\omega_q = 0$ y la condición $h(q) = 1$ dan como resultado $(D\omega)_q = 0$; se concluye que $(D\omega)|_V = 0$. En particular, se ve que $(D\omega)_p = 0$ para $p \in U$ arbitrario, así que $(D\omega)|_U = 0$. \square

Teorema 2.24. Sea M una variedad diferencial de dimensión n . Existe una única derivación impar \underline{d} de grado $+1$ sobre el álgebra graduada $\mathcal{A}^\bullet(M)$, tal que:

- (a) $d(f) = df$ si $f \in \mathcal{A}^0(M)$;
- (b) $d(d\omega) = 0$, para todo $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$.

Demostración. Sea (U, ϕ) una carta local de M . Si $\omega, \eta \in \mathcal{A}^\bullet(M)$ son formas diferenciales tales que $\omega|_U = \eta|_U$, así que $(\omega - \eta)|_U = 0$, el Lema 2.23 muestra que $D\omega|_U = D\eta|_U$ para cualquier derivación D de $\mathcal{A}^\bullet(M)$. Basta, entonces, determinar la correspondencia $\omega|_U \mapsto d\omega|_U$ para cada carta local de M .

Tómese $\omega \in \mathcal{A}^k(U)$ para algún $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ y sea $\{x^1, \dots, x^n\}$ el sistema de coordenadas locales para la carta (U, ϕ) .

Entonces $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, según (2.15), para determinadas funciones $f_I \in C^\infty(U)$. Se calcula que

$$\begin{aligned} d\omega &= d\left(\sum_{|I|=k} f_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) \\ &= \sum_{|I|=k} \left(d(f_I) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} f_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge d(dx^{i_r}) \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) \\ &= \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

al usar sucesivamente la \mathbb{R} -linealidad de d ; la propiedad de derivación impar; y las hipótesis (a) y (b). Luego la expresión local para $d\omega \in \mathcal{A}^{k+1}(U)$ es necesariamente aquélla de la fórmula (2.24).

Es oportuno verificar la consistencia de las propiedades del enunciado, al comprobar que $d(df) = 0$ para $f \in C^\infty(U)$. En vista de (2.24), se obtiene

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j\right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} (dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^i \otimes dx^j = 0, \end{aligned}$$

por la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden de una función suave.

Si (V, ψ) es otra carta local tal que $U \cap V \neq \emptyset$, con coordenadas locales $\{y^1, \dots, y^n\}$, entonces

$$\omega|_{U \cap V} = \sum_{|I|=k} f_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{|J|=k} g_J dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}$$

para algunas funciones $g_J \in C^\infty(V)$ – relacionados con las f_I mediante fórmulas de cambio de variables. Es una consecuencia inmediata de (2.26) que

$$\sum_{|I|=k} df_I \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{|J|=k} dg_J \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}$$

en $\mathcal{A}^{k+1}(U \cap V)$; también es posible comprobar esta igualdad directamente por fórmulas de cambio de variables. Al evaluar esta forma en cualquier punto $p \in U \cap V$, se obtiene un elemento $(d\omega)|_p \in \Lambda^{k+1}T_p^*M$ que no depende de las cartas locales. Se ha construido una única sección suave $p \mapsto (d\omega)|_p$ de $\Gamma(M, \Lambda^{k+1}T^*M)$, es decir, una forma diferencial $d\omega \in \mathcal{A}^{k+1}(M)$. Por su construcción, $\omega \mapsto d\omega$ es una derivación impar que cumple las propiedades (a) y (b) del enunciado. \square

Definición 2.25. La aplicación \mathbb{R} -lineal $d: \mathcal{A}^\bullet(M) \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(M)$ de grado +1 dada por el Teorema 2.24 se llama la **derivación exterior** sobre el álgebra graduado $\mathcal{A}^\bullet(M)$. Este operador es una *derivación impar*:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\#\omega} \omega \wedge d\eta. \quad (2.27)$$

La forma diferencial $d\omega$ es la **derivada exterior** de ω . \diamond

► Hay otra manera de mostrar la existencia de la derivación exterior sin apelar a cálculos locales: se puede exhibir las fórmulas algebraicas que expresan la evaluación de $d\omega$ sobre un juego de campos vectoriales. Si $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, dicha fórmula debe ser una expresión \mathbb{R} -lineal en ω que es a la vez una función $(k+1)$ -lineal alternante de elementos de $\mathfrak{X}(M)$.

Proposición 2.26. Si $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$, su derivada exterior cumple la fórmula:

$$d\alpha(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]). \quad (2.28)$$

Demostración. Está claro que el lado derecho de (2.28) es \mathbb{R} -bilineal y alternante como función de (X, Y) . Falta comprobar que sea bilineal sobre $C^\infty(M)$.

Al sustituir $X \mapsto fX$ en el lado derecho, se obtiene $fX\alpha(Y) - Y\alpha(fX) - \alpha([fX, Y])$. El campo vectorial $[fX, Y]$ obedece

$$\begin{aligned} [fX, Y](g) &= (fX)(Yg) - Y(fXg) \\ &= fX(Yg) - (Yf)(Xg) - fY(Xg) \\ &= f[X, Y](g) - (Yf)(Xg), \end{aligned}$$

y al eliminar g , resulta una fórmula útil:

$$[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X \quad \text{en } \mathfrak{X}(M).$$

Ahora se calcula:

$$\begin{aligned} &fX\alpha(Y) - Y\alpha(fX) - \alpha([fX, Y]) \\ &= fX\alpha(Y) - Y(f\alpha(X)) - \alpha(f[X, Y] - (Yf)X) \\ &= fX\alpha(Y) - (Yf)\alpha(X) - fY\alpha(X) - f\alpha([X, Y]) + (Yf)\alpha(X) \\ &= f(X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y])). \end{aligned}$$

De igual modo, se obtiene

$$X \alpha(gY) - gY \alpha(X) - \alpha([X, gY]) = g(X \alpha(Y) - Y \alpha(X) - \alpha([X, Y])).$$

Se ha verificado que el lado derecho de (2.28) es una 2-forma evaluada en (X, Y) .

Para comprobar que esta 2-forma es igual a $d\alpha$ (es decir, que ellas determinan el mismo elemento de $\Lambda^2 T_p^*M$ para cada $p \in M$), basta chequear que estas 2-formas coinciden en el dominio de cada carta local. Para tal efecto, se puede suponer que M posee una sola carta local en donde $\alpha = \sum_{j=1}^n f_j dx^j$. En particular,

$$d\alpha = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j. \quad (2.29)$$

Por la $C^\infty(M)$ -bilinealidad, se puede suponer también que X, Y son campos básicos, es decir, $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$. Fíjese que los campos básicos *conmutan*, porque

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right](f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = 0. \quad (2.30)$$

La evaluación de $d\alpha$ en campos básicos sale directamente de (2.29):

$$d\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial f_j}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right).$$

Luego los dos lados de (2.28) coinciden en este caso especial, que era lo que faltaba demostrar. \square

Hay fórmulas análogas para las derivadas exteriores de formas de grado superior, las cuales se pueden comprobar al seguir el patrón de la última demostración. Por ejemplo, si $\beta \in \mathcal{A}^2(M)$, entonces

$$\begin{aligned} d\beta(X, Y, Z) &= X \beta(Y, Z) + Y \beta(Z, X) + Z \beta(X, Y) \\ &\quad - \beta([X, Y], Z) - \beta([Y, Z], X) - \beta([Z, X], Y). \end{aligned} \quad (2.31)$$

La receta general “libre de coordenadas” para la derivada exterior de una k -forma es la siguiente:

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Proposición 2.27. *La derivación exterior es equivariante bajo preimágenes: si $\tau : M \rightarrow N$ es una aplicación suave y si $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(N)$, entonces*

$$d(\tau^*\omega) = \tau^*(d\omega). \quad (2.33)$$

Demostración. Considérese primero el caso $k = 0$, $\omega = g \in C^\infty(N)$. Si $p \in M$ y $X_p \in T_pM$, entonces por (2.20), (2.23) y la Definición 1.37:

$$\begin{aligned} \tau^*(dg)_p(X_p) &= (dg)_{\tau(p)}(T_p\tau(X_p)) = T_p\tau(X_p)(g) \\ &= X_p(g \circ \tau) = X_p(\tau^*g) = d(\tau^*g)_p(X_p), \end{aligned}$$

así que $\tau^*(dg)(X) = d(\tau^*g)(X)$ para $X \in \mathfrak{X}(M)$; es decir, $\tau^*(dg) = d(\tau^*g)$ en $\mathcal{A}^1(M)$.

Si ahora $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ con $k \geq 1$, se debe mostrar que $d(\tau^*\omega)_p = \tau^*(d\omega)_p$ para cada $p \in M$. Habida cuenta del Lema 2.23, basta comprobar la relación (2.33) para k -formas en un dominio de una carta local. Si $p \in M$, sea (V, ψ) una carta local de N con $\tau(p) \in V$, cuyas coordenadas locales son $\{y^1, \dots, y^m\}$. Supóngase que $\omega = \sum_{|J|=k} g_J dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}$ donde cada $g_J \in C^\infty(V)$. Entonces, por la Proposición 2.20,

$$\tau^*\omega = \sum_{|J|=k} (\tau^*g_J) \tau^*(dy^{j_1}) \wedge \dots \wedge \tau^*(dy^{j_k}) = \sum_{|J|=k} (g_J \circ \tau) dh^{j_1} \wedge \dots \wedge dh^{j_k}$$

donde $h^{j_r} := y^{j_r} \circ \tau = \tau^*(y^{j_r})$ para $r = 1, \dots, k$. Entonces

$$\begin{aligned} d(\tau^*\omega) &= \sum_{|J|=k} d(g_J \circ \tau) \wedge dh^{j_1} \wedge \dots \wedge dh^{j_k} \\ &= \sum_{|J|=k} d(\tau^*g_J) \wedge dh^{j_1} \wedge \dots \wedge dh^{j_k} \\ &= \sum_{|J|=k} \tau^*(dg_J) \wedge \tau^*(dy^{j_1}) \wedge \dots \wedge \tau^*(dy^{j_k}) \\ &= \tau^*\left(\sum_{|J|=k} dg_J \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}\right) = \tau^*(d\omega), \end{aligned}$$

en donde la tercera igualdad aprovecha el caso $k = 0$, ya comprobada. \square

Ejemplo 2.28. Sea $\tau : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función

$$(x, y) \equiv \tau(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

que efectúa el cambio de coordenadas polares a cartesianas en \mathbb{R}^2 . (Fíjese que esta τ no es sobreyectiva, porque su imagen omite el semieje x negativo del plano.) Es inmediato

que

$$\begin{aligned}\tau^*(dx) &= d(x \circ \tau) = d(r \cos \theta) = \cos \theta dr - r \operatorname{sen} \theta d\theta, \\ \tau^*(dy) &= d(y \circ \tau) = d(r \operatorname{sen} \theta) = \operatorname{sen} \theta dr + r \cos \theta d\theta,\end{aligned}$$

pues d es una derivación impar.⁵ La 2-forma de área $\beta = dx \wedge dy$ tiene la siguiente expresión (archiconocida) en coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\tau^*(dx \wedge dy) &= \tau^*(dx) \wedge \tau^*(dy) \\ &= (\cos \theta dr - r \operatorname{sen} \theta d\theta) \wedge (\operatorname{sen} \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= r \cos^2 \theta dr \wedge d\theta - r \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \wedge dr \\ &= r dr \wedge d\theta,\end{aligned}$$

porque $dr \wedge dr = 0$ y $d\theta \wedge d\theta = 0$ por antisimetría. \diamond

Ejemplo 2.29. Sea $i: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la inclusión de la esfera en \mathbb{R}^3 como subvariedad. La imagen inversa de la forma de volumen $dx \wedge dy \wedge dz$ en \mathbb{R}^3 es una 3-forma sobre \mathbb{S}^2 y por lo tanto es nula, porque $3 > \dim \mathbb{S}^2$. Se debe buscar, entonces, una 2-forma – en coordenadas cartesianas (x, y, z) – sobre \mathbb{R}^3 cuya preimagen es la 2-forma conocida de área $\beta := \operatorname{sen} \theta d\theta \wedge d\phi \in \mathcal{A}^2(\mathbb{S}^2)$ expresada en las coordenadas esféricas usuales:

$$x = \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad y = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad z = \cos \theta.$$

Para ser más preciso, se debería escribir $i^*(x) := \operatorname{sen} \theta \cos \phi$, etc.

Nótese que

$$\begin{aligned}i^*(dx \wedge dy) &= (\cos \theta \cos \phi d\theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi d\phi) \wedge (\cos \theta \operatorname{sen} \phi d\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \phi d\phi) \\ &= \cos \theta \operatorname{sen} \theta d\theta \wedge d\phi.\end{aligned}$$

Por cálculos similares, se deduce que

$$\begin{aligned}i^*(x dy \wedge dz) &= (\operatorname{sen} \theta \cos \phi)(\cos \theta \operatorname{sen} \phi d\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \phi d\phi) \wedge (-\operatorname{sen} \theta d\theta) \\ &= \operatorname{sen}^3 \theta \cos^2 \phi d\theta \wedge d\phi, \\ i^*(y dz \wedge dx) &= (\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi)(-\operatorname{sen} \theta d\theta) \wedge (\cos \theta \cos \phi d\theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi d\phi) \\ &= \operatorname{sen}^3 \theta \operatorname{sen}^2 \phi d\theta \wedge d\phi, \\ i^*(z dx \wedge dy) &= \cos \theta i^*(dx \wedge dy) = \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta \wedge d\phi.\end{aligned}$$

Al sumar estas tres expresiones, se obtiene la 2-forma cartesiana de área esférica:

$$\sigma := x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy \implies i^*\sigma = \operatorname{sen} \theta d\theta \wedge d\phi. \quad \diamond$$

⁵Es costumbre escribir estas fórmulas y el resultado final sin mención explícita de la función τ , así: $dx = \cos \theta dr - r \operatorname{sen} \theta d\theta$, $dy = \operatorname{sen} \theta dr + r \cos \theta d\theta$; y luego $dx \wedge dy = r dr \wedge d\theta$.

2.5 La derivada de Lie

Definición 2.30. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial completo sobre una variedad diferencial M ; el flujo de X determina un grupo uniparamétrico $\{\alpha_t : t \in \mathbb{R}\}$ de difeomorfismos de M . Si $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ es una k -forma diferencial sobre M , su **derivada de Lie** con respecto a X es la k -forma $\mathcal{L}_X \omega$ dada por:

$$\mathcal{L}_X \omega := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_t^* \omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_t^* \omega - \omega}{t}. \quad (2.34a)$$

Si $p \in M$, entonces

$$(\mathcal{L}_X \omega)_p((X_1)_p, \dots, (X_k)_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega_{\alpha_t(p)}(T_p \alpha_t(X_1)_p, \dots, T_p \alpha_t(X_k)_p). \quad (2.34b)$$

La última fórmula tiene sentido aun cuando $\mathcal{D}_X \neq \mathbb{R} \times M$, pues en todo caso α_t es un difeomorfismo local en un vecindario de p , para $-\varepsilon(p) < t < \varepsilon(p)$; luego la derivada de Lie \mathcal{L}_X está definido para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$, no necesariamente completo.⁶ \diamond

Lema 2.31. Si $f \in \mathcal{A}^0(M) = C^\infty(M)$, entonces $\mathcal{L}_X f = Xf$.

Demostración. Nótese que $\alpha_t^* f = f \circ \alpha_t$ para $f \in C^\infty(M)$; luego, para cada $p \in M$, la Proposición 1.66 muestra que

$$\mathcal{L}_X f(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\alpha_t(p)) = Xf(p). \quad \square$$

Proposición 2.32. La derivada de Lie de formas diferenciales con respecto a un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ cumple las siguientes identidades, para todo $\omega, \eta \in \mathcal{A}^\bullet(M)$, $f \in C^\infty(M)$:

- (a) $\mathcal{L}_X(\omega + \eta) = \mathcal{L}_X \omega + \mathcal{L}_X \eta$;
- (b) $\mathcal{L}_X(f\omega) = (Xf)\omega + f\mathcal{L}_X \omega$;
- (c) $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X \omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X \eta$;
- (d) $\mathcal{L}_X(d\omega) = d(\mathcal{L}_X \omega)$.

Demostración. La aditividad (a) es obvia por las fórmulas (2.34), porque $\alpha_t^*(\omega + \eta) = \alpha_t^* \omega + \alpha_t^* \eta$ para cada t . La *regla de Leibniz* (b) es un caso particular de la identidad (c);

⁶Para simplificar la exposición, en estos apuntes se considera \mathcal{L}_X solo para campos vectoriales completos; por la Proposición 1.61, no hay pérdida de generalidad si M es compacta.

nótese que las propiedades (a) y (c) dicen que \mathcal{L}_X es una *derivación par* del álgebra graduada $\mathcal{A}^\bullet(M)$.

La propiedad (c) es una versión derivada de la equivariancia bajo imágenes inversas, véase la Proposición 2.20:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha_t^*(\omega \wedge \eta) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\alpha_t^*\omega \wedge \alpha_t^*\eta) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\alpha_t^*\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\alpha_t^*\eta) = \mathcal{L}_X\omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X\eta.\end{aligned}$$

La propiedad (d) es una versión derivada de la Proposición 2.27:

$$\mathcal{L}_X(d\omega) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha_t^*(d\omega) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d(\alpha_t^*\omega) = d(\mathcal{L}_X\omega). \quad \square$$

Ejemplo 2.33. Si $M = \mathbb{R}^2$, considérese la 2-forma $\omega = (x^2 + y^2)dx \wedge dy$ y el campo vectorial $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$. Las reglas de la Proposición 2.32 permiten calcular:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\omega &= X(x^2 + y^2)dx \wedge dy + (x^2 + y^2)(\mathcal{L}_X(dx) \wedge dy + dx \wedge \mathcal{L}_X(dy)) \\ &= (-2yx + 2xy)dx \wedge dy + (x^2 + y^2)(d(Xx) \wedge dy + dx \wedge d(Xy)) \\ &= 0 + (x^2 + y^2)(d(-y) \wedge dy + dx \wedge dx) = 0.\end{aligned}$$

Ahora la condición $\mathcal{L}_X\omega = 0$ es una *ecuación diferencial*, la cual, por la fórmula (2.34), es equivalente a la condición: $\alpha_t^*\omega = \omega$ para $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $\mathcal{L}_X\omega = 0$ expresa la *invariancia* de la forma ω bajo el flujo de X . En el caso aquí ejemplificado, este flujo es el *grupo de rotaciones* alrededor del origen de \mathbb{R}^2 ; es evidente por inspección que ω es invariante bajo rotaciones de las coordenadas cartesianas. \diamond

Hay una relación muy notable entre las tres derivaciones del álgebra graduada $\mathcal{A}^\bullet(M)$ consideradas hasta ahora: la derivada exterior d , de grado (+1); la contracción i_X con un campo vectorial X , de grado (-1); y ahora la derivada de Lie \mathcal{L}_X , de grado 0. (Obsérvese que las fórmulas (2.34) conservan el grado de formas diferenciales.)

Proposición 2.34. Las derivadas de Lie \mathcal{L}_X cumplen la *identidad de Cartan*:

$$\mathcal{L}_X\omega = i_X(d\omega) + d(i_X\omega) \quad (2.35)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$.

Demostración. Se trata de comprobar (2.35) por inducción sobre el grado de ω .

Si $\omega = f \in \mathcal{A}^0(M)$, entonces $\mathcal{L}_X f = Xf$ por el Lema 2.31. Por otro lado, vale $i_X(df) = df(X) = Xf$, mientras $i_X f = 0$ por la Definición 2.17.

Si $\omega = \beta \in \mathcal{A}^1(M)$, tómesese $Y \in \mathfrak{X}(M)$; entonces por (2.21):

$$\mathcal{L}_X \beta(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_t^* \beta(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \beta(\alpha_{t*} Y) \circ \alpha_t. \quad (2.36)$$

Ahora, si $h \in C^\infty(M)$, se puede adaptar el Lema 1.18 de Hadamard para escribir

$$h \circ \alpha_t =: h + t g_t \quad \text{para } t \in \mathbb{R}; \quad \text{con } g_0 = Xh,$$

donde la función $t \mapsto g_t(p) : \mathbb{R} \rightarrow M$ es suave, para cada $p \in M$. En efecto, defínase

$$g_t(p) := \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} h(\alpha_{st}(p)) ds;$$

el teorema fundamental del cálculo muestra que $h(\alpha_t(p)) - h(p) = t g_t(p)$. Además, la curva $t \mapsto \alpha_t(p)$ es la curva integral del campo vectorial X que pasa por p , así que $g_0(p) = \lim_{t \rightarrow 0} g_t(p) = Xh(p)$.

La Definición 1.56 de la imagen directa $\alpha_{t*} Y$ y el Lema 2.31 implican que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_{t*} Y(h) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y(h \circ \alpha_t) \circ \alpha_{-t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Yh \circ \alpha_{-t} + t Y g_t \circ \alpha_{-t}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Yh \circ \alpha_{-t}) + \lim_{t \rightarrow 0} (Y g_t \circ \alpha_{-t}) = \mathcal{L}_{-X}(Yh) + Y(Xh) \\ &= -X(Yh) + Y(Xh) = -[X, Y](h). \end{aligned}$$

Enchufando este resultado $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\alpha_{t*} Y) = -[X, Y]$ en (2.36), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \beta(Y) &= -\beta([X, Y]) + \mathcal{L}_X(\beta(Y)) = -\beta([X, Y]) + X \beta(Y) \\ &= d\beta(X, Y) + Y \beta(X) = d\beta(X, Y) + Y(i_X \beta) \\ &= i_X(d\beta)(Y) + d(i_X \beta)(Y), \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde se ha empleado la fórmula (2.28) para la 2-forma $d\beta$. Se ha comprobado el enunciado para $\omega = \beta \in \mathcal{A}^1(M)$.

Supóngase, entonces, que la proposición es válida para $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ con $k \geq 1$. Para cada $\beta \in \mathcal{A}^1(M)$, habida cuenta de que \mathcal{L}_X es una derivación par mientras i_X y d son

derivaciones impares, se calcula que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\beta \wedge \omega) &= \mathcal{L}_X\beta \wedge \omega + \beta \wedge \mathcal{L}_X\omega \\
&= (i_X(d\beta) + d(i_X\beta)) \wedge \omega + \beta \wedge (i_X(d\omega) + d(i_X\omega)) \\
&= i_X(d\beta \wedge \omega) - d\beta \wedge i_X\omega + \beta \wedge d(i_X\omega) \\
&\quad + d(i_X\beta \wedge \omega) - i_X\beta \wedge d\omega + \beta \wedge i_X(d\omega) \\
&= i_X(d\beta \wedge \omega) - d(\beta \wedge i_X\omega) + d(i_X\beta \wedge \omega) - i_X(\beta \wedge d\omega) \\
&= i_X(d(\beta \wedge \omega)) + d(i_X(\beta \wedge \omega)).
\end{aligned}$$

Para chequear los signos en el manejo de las derivaciones impares, fíjese que las formas $i_X\beta$, β y $d\beta$ tienen grados respectivos 0, 1 y 2. Cada elemento de $\mathcal{A}^{k+1}(M)$ es una suma finita de formas de tipo $\beta \wedge \omega$, con $\beta \in \mathcal{A}^1(M)$ y $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$. Entonces la fórmula (2.35) es válida para elementos de $\mathcal{A}^{k+1}(M)$; la proposición sigue por inducción sobre k . \square

► La derivada de Lie \mathcal{L}_X define un operador, no solamente sobre formas, sino sobre tensores de cualquier especie, como la derivada en $t = 0$ de una preimagen del tensor de marras bajo el flujo de X . Dicha derivada será nula si (y solo si) el tensor queda invariante bajo el flujo de X . Siempre que el campo vectorial X sea completo, se define \mathcal{L}_X como sigue.

En tensores covariantes cualesquiera se define la imagen inversa α_t^* al igual que en la Definición 2.19; en tensores contravariantes se reemplaza α_t^* por la imagen directa $(\alpha_{-t})_*$ bajo el flujo en reverso $t \mapsto \alpha_{-t}$ generado por $-X$. El cambio de signo es necesario pues la acción de α_t^* es contragrediente a la de α_{t*} – véase la fórmula (2.21).

Definición 2.35. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo completo, con flujo $\{\alpha_t \in \text{Diff}(M) : t \in \mathbb{R}\}$. Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es otro campo vectorial, su **derivada de Lie** $\mathcal{L}_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ se define como

$$\mathcal{L}_X Y := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\alpha_{-t})_* Y. \quad \diamond$$

Lema 2.36. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Demostración. Para cada $f \in C^\infty(M)$, las Definiciones 1.56 y 2.30 muestran que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X Y(f) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y(f \circ \alpha_{-t}) \circ \alpha_t = Y(\mathcal{L}_{-X} f) + \mathcal{L}_X(Yf) \\
&= Y(-Xf) + X(Yf) = [X, Y]f. \quad \square
\end{aligned}$$

En el desarrollo del cálculo (2.37), se obtuvo otra fórmula útil:

$$\mathcal{L}_X \beta(Y) = X \beta(Y) - \beta([X, Y]), \quad (2.38)$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\beta \in \mathcal{A}^1(M)$.

Proposición 2.37. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\beta \in \mathcal{A}^1(M)$, se verifica:

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y \beta) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X \beta) = \mathcal{L}_{[X, Y]} \beta. \quad (2.39)$$

Demostración. Empleando la identidad de Cartan (2.35), la identidad de Jacobi (1.22b) y la fórmula (2.38) varias veces, se calcula, para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[X, Y]} \beta(Z) &= i_{[X, Y]}(d\beta)(Z) + d(i_{[X, Y]} \beta)(Z) = d\beta([X, Y], Z) + Z(i_{[X, Y]} \beta) \\ &= [X, Y](\beta(Z)) - Z \beta([X, Y]) - \beta([X, Y], Z) + Z \beta([X, Y]) \\ &= X(Y \beta(Z)) - Y(X \beta(Z)) + \beta([Y, Z], X) + \beta([Z, X], Y) \\ &= X(\mathcal{L}_Y \beta(Z) + \beta([Y, Z])) - Y(\mathcal{L}_X \beta(Z) + \beta([X, Z])) \\ &\quad - \beta([X, [Y, Z]]) + \beta([Y, [X, Z]]) \\ &= X(\mathcal{L}_Y \beta(Z)) + \mathcal{L}_X \beta([Y, Z]) - Y(\mathcal{L}_X \beta(Z)) - \mathcal{L}_Y \beta([X, Z]) \\ &= \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y \beta)(Z) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X \beta)(Z). \end{aligned} \quad \square$$

Corolario 2.38. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \mathcal{A}^*(M)$, se verifica:

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y \omega) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X \omega) = \mathcal{L}_{[X, Y]} \omega.$$

Demostración. Fíjese que otra consecuencia de la identidad de Cartan (2.35) es la \mathbb{R} -linealidad de la correspondencia $X \mapsto \mathcal{L}_X \beta$, así que se puede suponer, sin perder generalidad, que $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ para algún k . El caso $k = 1$ es la proposición anterior. El caso $k = 0$ es un resultado inmediato del Lema 2.31:

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y f) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X f) = X(Yf) - Y(Xf) = [X, Y]f = \mathcal{L}_{[X, Y]} f, \quad \text{para } f \in C^\infty(M).$$

Escríbase $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] := \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$. Si $\beta \in \mathcal{A}^1(M)$ y $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, se obtiene

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](\beta \wedge \omega) &= \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y \beta \wedge \omega + \beta \wedge \mathcal{L}_Y \omega) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X \beta \wedge \omega + \beta \wedge \mathcal{L}_X \omega) \\ &= \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \beta \wedge \omega + \beta \wedge \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y \omega - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \beta \wedge \omega + \beta \wedge \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X \omega \\ &= \mathcal{L}_{[X, Y]} \beta \wedge \omega + \beta \wedge [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] \omega. \end{aligned}$$

El resultado sigue por inducción sobre k . □

Este corolario dice que la correspondencia \mathbb{R} -lineal $X \mapsto \mathcal{L}_X$, que lleva $\mathfrak{X}(M)$ en el espacio $\text{Der}^+(\mathcal{A}^\bullet(M))$ de derivaciones pares sobre formas diferenciales, es un *homomorfismo de álgebras de Lie*. En efecto, el conmutador de dos derivaciones pares es otra derivación par (véase la demostración de la Proposición 1.55), así que $\text{Der}^+(\mathcal{A}^\bullet(M))$, con el conmutador como corchete, ya es un álgebra de Lie. Por lo tanto, se puede abreviar la conclusión del Corolario 2.38 como sigue:

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X, Y]} \quad \text{en } \text{Der}^+(\mathcal{A}^\bullet(M)), \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Nótese que hay una fórmula análoga en $\text{Der}^+(\mathfrak{X}(M))$:

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y Z) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X Z) = \mathcal{L}_{[X, Y]} Z, \quad \text{para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

En vista del Lema 2.36, esto no es otra cosa que una reformulación de la *identidad de Jacobi*, ya notada en la fórmula (1.23).

2.6 Formas cerradas y exactas

Definición 2.39. Sea M una variedad diferencial con $\dim M = n$. Una forma $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$ es **cerrada** si $d\omega = 0$. (En particular, cualquier n -forma es cerrada.)

Dícese que $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$ es **exacta** si hay otra forma $\eta \in \mathcal{A}^\bullet(M)$ tal que $\omega = d\eta$.

Una forma exacta es también cerrada, ya que $d(d\eta) = 0$ por el Teorema 2.24. \diamond

Ejemplo 2.40. En algunas variedades, hay formas cerradas que no son exactas. Considérese la variedad bidimensional $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, con la 1-forma

$$\alpha := -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Obsérvese que los coeficientes de α son funciones singulares en el origen; no es posible extender α a una forma diferencial sobre \mathbb{R}^2 . Un cálculo directo muestra que α es cerrada:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Si existiera una 0-forma $f \in C^\infty(M)$ tal que $\alpha = df = (\partial f / \partial x) dx + (\partial f / \partial y) dy$, sería $\partial f / \partial y = x / (x^2 + y^2)$, así que $f(x, y) \equiv \arctg(y/x) + h(x)$, al menos en el semiplano $x > 0$, para alguna función suave h de la variable x . Al derivar esta relación con respecto a x , se obtiene $\partial f / \partial x = -y / (x^2 + y^2) + h'(x)$, por lo cual $h' \equiv 0$ y por ende h es una constante.

La función $f(x, y) = \arctg(y/x) + h$, definida inicialmente en el semiplano $x > 0$, puede extenderse al plano cortado $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$, en el cual la igualdad $\alpha = df$ sigue válida. Pero no es posible extender f continuamente a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; por ejemplo, $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(-1, \varepsilon) = h + \pi$ pero $\lim_{\varepsilon \uparrow 0} f(-1, \varepsilon) = h - \pi$. Luego no hay $f \in C^\infty(M)$ alguna tal que $\alpha = df$; la forma cerrada α no es exacta. \diamond

La obstrucción a la exactitud de α en el Ejemplo 2.40 es topológica: la variedad M tiene un “agujero” en el origen de \mathbb{R}^2 , y la función de arcotangente toma valores distintos en los extremos de un circuito circular que encierra el agujero. Para poder afirmar que en una determinada variedad cada forma cerrada es exacta, se debe imponer una condición topológica que prohíbe los agujeros.

Definición 2.41. Una parte $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexa** si para cada par de puntos $x, y \in A$, el conjunto A incluye el segmento $[x, y] := \{(1 - t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\}$.

Dícese que otra parte $B \subseteq \mathbb{R}^n$ es **estelar** desde $z \in B$ si para cada $y \in B \setminus \{z\}$, el conjunto B incluye el segmento $[z, y]$. Por ejemplo, el plano cortado del Ejemplo 2.40 es estelar desde $z = (1, 0)$; por otra parte, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ no es estelar, ya que cada segmento $[x, -x]$ atraviesa el agujero en el origen. Fíjese que A es convexo si y solo si es estelar desde cualquiera de sus puntos. \diamond

Definición 2.42. Una variedad M es **contractible** si hay $z \in M$ y una función suave $F : [0, 1] \times M \rightarrow M$ tal que

$$F(0, p) = z \quad \text{y} \quad F(1, p) = p \quad \text{para todo} \quad p \in M.$$

Al escribir $f_t(p) := F(t, p)$, se obtiene una familia suave de funciones suaves $f_t : M \rightarrow M$, para $0 \leq t \leq 1$, tales que $f_1 = 1_M$ mientras $f_0 = c_z$ es la función constante cuya imagen es el punto z .⁷ Dícese que F es una **homotopía** (suave) entre las funciones c_z e 1_M .

Si un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es estelar desde $z \in U$, entonces U es contractible, porque $F(t, x) := (1 - t)z + tx$ define una homotopía suave entre c_z e 1_U . \diamond

Proposición 2.43 (Lema de Poincaré). *Cada forma cerrada sobre \mathbb{R}^n es exacta. En particular, si $\omega \in \mathcal{A}^k(\mathbb{R}^n)$ cumple $d\omega = 0$, entonces existe $\eta \in \mathcal{A}^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\omega = d\eta$.*

Demostración. Las coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^n son coordenadas locales para la sola carta de \mathbb{R}^n , así que cualquier $\omega \in \mathcal{A}^k(\mathbb{R}^n)$, no necesariamente cerrada, se escribe como

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

⁷Las funciones intermedias f_t constituyen una deformación de la variedad M en el singulete $\{z\}$.

para algunas funciones suaves $f_I \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para cada $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ con $|I| = k$, defínase una forma $\sigma_I \in \mathcal{A}^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\sigma_I := \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} x^{i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

La derivada exterior de cada sumando es $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, así que

$$d\sigma_I = k dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Si $k \in \{1, \dots, n\}$, defínase un operador \mathbb{R} -lineal $E_{k-1}: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por

$$\underline{E_{k-1}f}(x) := \int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt. \quad (2.40)$$

Este es un promedio ponderado de la función f a lo largo del segmento $[0, x]$. Obsérvese que

$$\frac{\partial}{\partial x^j} E_{k-1}f(x) = \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx) dt = E_k\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)(x).$$

Ahora se puede definir una forma diferencial $h\omega \in \mathcal{A}^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ por la receta:

$$h\omega := \sum_{|I|=k} (E_{k-1}f_I) \sigma_I. \quad (2.41)$$

Su derivada exterior es

$$\begin{aligned} d(h\omega) &= \sum_{|I|=k} d(E_{k-1}f_I) \wedge \sigma_I + (E_{k-1}f_I) d\sigma_I \\ &= \sum_{|I|=k} \left(\sum_{j=1}^n E_k\left(\frac{\partial f_I}{\partial x^j}\right) dx^j \wedge \sigma_I + k(E_{k-1}f_I) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right), \end{aligned}$$

mientras

$$\begin{aligned} h(d\omega) &= h\left(\sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right) \\ &= \sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^n E_k\left(\frac{\partial f_I}{\partial x^j}\right) (x^j dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} - dx^j \wedge \sigma_I), \end{aligned}$$

Al sumar estas dos expresiones, se obtiene

$$d(h\omega) + h(d\omega) = \sum_{|I|=k} \left(k(E_{k-1}f_I) + \sum_{j=1}^n x^j E_k\left(\frac{\partial f_I}{\partial x^j}\right) \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}. \quad (2.42)$$

Para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $k \in \{1, \dots, n\}$, se calcula que

$$\begin{aligned} k(E_{k-1}f)(x) + \sum_{j=1}^n x^j E_k\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)(x) &= \int_0^1 \left(kt^{k-1}f(tx) + \sum_{j=1}^n t^k x^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^k f(tx)) dt = t^k f(tx) \Big|_{t=0}^{t=1} = f(x). \end{aligned}$$

Al enchufar esta evaluación en (2.42), se obtiene la relación fundamental:

$$d(h\omega) + h(d\omega) = \omega. \quad (2.43)$$

La igualdad (2.43) no demanda que ω sea cerrada, Ahora bien, si $d\omega = 0$, esta ecuación se reduce a $d(h\omega) = \omega$, así que basta tomar $\eta := h\omega$. \square

Corolario 2.44. Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto estelar, cada forma cerrada en $\mathcal{A}^\bullet(U)$ es exacta.

Demostración. El resultado es una consecuencia inmediata de (2.43), una vez que se construye un operador lineal $h: \mathcal{A}^\bullet(U) \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(U)$, necesariamente de grado (-1) , que cumple dicha ecuación.

Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es estelar desde 0, los integrandos en (2.40) para $f \in C^\infty(U)$ están bien definidos, las integrales $E_{k-1}f$ existen, y por ende la receta (2.41) define $h\omega \in \mathcal{A}^{k-1}(U)$. La demostración anterior muestra que $d(h\omega) + h(d\omega) = \omega$ para toda $\omega \in \mathcal{A}^k(U)$.

Más generalmente, si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es estelar desde z , sea $\tau(x) := x - z$ la traslación de \mathbb{R}^n que lleva z al origen. Si $V := U - z \equiv \{x - z : x \in U\}$, cada $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(U)$ cumple $\omega = \tau^*\theta$ con $\theta \in \mathcal{A}^\bullet(V)$, al tomar $\theta := (\tau^{-1})^*\omega$; fíjese que V es estelar desde 0. Ahora $0 = d\omega = \tau^*(d\theta)$ si y solo si $d\theta = 0$ si y solo si $\theta = d\zeta$ para algún $\zeta \in \mathcal{A}^{k-1}(V)$ si y solo si $\omega = d(\tau^*\zeta)$. \square

La esencia de la demostración del Lema de Poincaré es la construcción de la aplicación h de (2.41) que da lugar (2.43). (Mejor dicho, h es un juego finito de aplicaciones de $\mathcal{A}^k(M)$ en $\mathcal{A}^{k-1}(M)$, una para cada $k = 1, 2, \dots, n$.) Dada una homotopía suave $F: [0, 1] \times M \rightarrow M$, se puede modificar la demostración para obtener una receta para h tal que

$$d(h\omega) + h(d\omega) = f_1^*\omega - f_0^*\omega. \quad (2.44)$$

Si f_0 es una función constante, vale $f_0^*\omega = 0$; y si $f_1 = 1_M$, entonces $f_1^*\omega = \omega$. Por lo tanto, *el Lema de Poincaré es válido para toda variedad contractible.*

► Hay otra manera de enfocar la demostración del Lema de Poincaré para $M = \mathbb{R}^n$. Considérese el **campo vectorial de Euler**

$$Z := x^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n). \quad (2.45)$$

El flujo de Z es un grupo uniparamétrico $\{\rho_t : t \in \mathbb{R}\}$ de difeomorfismos de \mathbb{R}^n , que satisface la **ecuación de Euler**:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \rho_t) = Z(f \circ \rho_t); \quad \rho_0 = 1_{\mathbb{R}^n}.$$

La solución única de esta ecuación diferencial es

$$\rho_t(x) \equiv e^t x. \quad (2.46)$$

Fíjese que $\rho_{\log t} : x \mapsto tx$, así que $f(tx) \equiv \rho_{\log t}^* f(x)$. Ahora,

$$\begin{aligned} i_Z \left(\int_0^1 \rho_{\log t}^* \omega dt \right) &= \sum_{|I|=k} \int_0^1 f_I(tx) i_Z(\rho_{\log t}^*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})) dt \\ &= \sum_{|I|=k} \int_0^1 \left(f_I(tx) \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} x^{i_r} d(tx)^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{d(tx)^{i_r}} \wedge \cdots \wedge d(tx)^{i_k} \right) dt \\ &= \sum_{|I|=k} \left(\int_0^1 t^{k-1} f_I(tx) dt \right) \sigma_I = h\omega. \end{aligned}$$

Obsérvese, de paso, que las formas σ_I introducidas en la demostración de la Proposición 2.43 obedecen $\sigma_I := i_Z(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})$.

El resultado del cálculo anterior puede abreviarse como $h = i_Z \circ \int_0^1 \rho_{\log t}^* dt$. Al colocar $\Omega := \int_0^1 \rho_{\log t}^* \omega dt$, la identidad de Cartan muestra que

$$d(h\omega) + h(d\omega) = d(i_Z\Omega) + i_Z(d\Omega) = \mathcal{L}_Z\Omega.$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Z\Omega &= \int_0^1 \mathcal{L}_Z(\rho_{\log t}^* \omega) dt = \int_0^1 \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\rho_s^* \rho_{\log t}^* \omega) dt \\ &= \int_0^1 r \frac{d}{dr} \Big|_{r=1} (\rho_{\log r}^* \rho_{\log t}^* \omega) dt = \int_0^1 r \frac{d}{dr} \Big|_{r=1} (\rho_{\log rt}^* \omega) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{du} (\rho_{\log u}^* \omega) du = \rho_{\log u}^* \omega \Big|_{u=0}^{u=1} = \omega. \end{aligned}$$

[[Fíjese que $\lim_{u \downarrow 0} \rho_{\log u}(x) = 0$ por (2.46).]] Se concluye que $d(h\omega) + h(d\omega) = \omega$.

Este cálculo muestra que $\int_0^1 \rho_{\log t}^* dt$ es una *transformación inversa* para la derivada de Lie \mathcal{L}_Z . Como Z genera las *dilataciones* (2.46), este inverso es un operador integral que toma un promedio de las dilataciones por factores de escala entre 0 y 1; por ende, requiere que la variedad sea un conjunto estelar donde tales dilataciones pueden actuar.

3 Integración en variedades

La materia conocida como “cálculo diferencial e integral” comprende el manejo de funciones diferenciables en abiertos de \mathbb{R}^n , con su aparato de derivadas parciales, jacobianos, etc.; como también la evaluación de integrales múltiples sobre dominios abiertos en \mathbb{R}^n . Además, el llamado “análisis vectorial” exige la evaluación de integrales de línea y de superficie, cuyos dominios generalmente son (uniones de) subvariedades de \mathbb{R}^n de menor dimensión. Un aspecto importante de tales cálculos es la presencia de los teoremas de Green, Gauss y Stokes, que relacionan integrales de diversas especies: dichos teoremas son generalizaciones del teorema fundamental del cálculo. En todo caso, los *integrandos* son formas diferenciales de diversos grados; para complementarlos, es necesario precisar la naturaleza de sus *dominios de integración*.

3.1 Variedades orientables

Para calcular el volumen de un abierto en \mathbb{R}^n , se puede repartir el abierto en una colección de cubos pequeños (los “elementos de volumen”) que no traslapan, y luego sumar los volúmenes individuales de los cubos. En primer lugar, se debe asignar un volumen a un cubo o paralelepípedo rectangular (un producto cartesiano de intervalos). Ese volumen debe ser proporcional al producto de las longitudes de los lados.

Un aspecto importante del cálculo es el *signo* que debe adjudicarse al volumen de un determinado cubo. En una dimensión, por ejemplo, la fórmula elemental

$$\int_a^b dt = b - a$$

puede interpretarse como la asignación de la *longitud* $(b - a)$ al intervalo $[a, b]$ si $a < b$, y de longitud cero al intervalo degenerado $[a, a] := \{a\}$. En el caso $a > b$, si se quiere medir longitudes con esta fórmula, hay que adoptar el *convenio* de que la notación $[a, b]$ designa un *intervalo de longitud negativa* si $a > b$. Este convenio resulta ser bastante útil; si se admite que las magnitudes de longitud, área o volumen puedan tomar valores negativos, se obtiene una manera uniforme de expresar tales cantidades mediante fórmulas integrales sin tener que hacer una enumeración de casos.

La notación $[a, b]$, con $a > b$, denota el conjunto $\{t \in \mathbb{R} : a \geq t \geq b\}$, el cual coincide con el conjunto $[b, a] = \{t \in \mathbb{R} : b \leq t \leq a\}$; pero las dos notaciones difieren en *el orden de enumeración de los extremos*. Esta consideración da lugar al concepto de “conjunto orientado” en la recta \mathbb{R} . Para generalizar esa idea a dimensiones mayores, se podría tratar de distinguir ciertos polígonos y poliedros por el orden de enumeración de sus

vértices. Alternativamente, se asignará – cuando sea factible – a una variedad diferencial una *orientación* específica.

Definición 3.1. Una variedad diferencial M de dimensión n es **orientable** si existe una forma diferencial de grado máximo $\nu \in \mathcal{A}^n(M)$ tal que $\nu_p \neq 0$ en $\Lambda^n T_p^*M$ para todo $p \in M$. Se dice que la n -forma ν *no se anula*.¹

Una tal n -forma ν , si existe, determina una **orientación** de M . El par (M, ν) se llama una **variedad orientada**; la n -forma ν es su **forma de volumen**. \diamond

Para entender mejor el concepto de orientación, resulta conveniente reexpresar la definición anterior en el lenguaje de fibrados. Nótese que $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^n T_p^*M = 1$ si $n = \dim M$, así que el fibrado vectorial $\Lambda^n T^*M \xrightarrow{\pi} M$ tiene rango 1, es decir, cada fibra es una recta real. Denótese por O su **sección cero** $p \mapsto 0 \in \Lambda^n T_p^*M$. Al restringir la proyección π a la variedad $\Lambda^n T^*M \setminus O$, se obtiene un fibrado $(\Lambda^n T^*M \setminus O) \xrightarrow{\pi} M$, cuyas fibras son las “rectas perforadas” $\Lambda^n T_p^*M \setminus \{0\}$, pues la *fibra típica* es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Fíjese bien que esta fibra típica tiene dos componentes conexos, los intervalos abiertos $(0, \infty)$ y $(-\infty, 0)$.

Una n -forma $\nu \in \mathcal{A}^n(M)$ que no se anula es precisamente una *sección* (global, suave) del fibrado $(\Lambda^n T^*M \setminus O) \xrightarrow{\pi} M$.

Proposición 3.2. Una variedad orientable M posee un atlas $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ donde toda función de transición $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ tiene jacobiano positivo.

Demostración. El jacobiano de una función de transición:

$$J(\psi \circ \phi^{-1}) := \det \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right]$$

entre dos cartas locales (U, ϕ) y (V, ψ) de M tales que $U \cap V \neq \emptyset$, es una función suave que no se anula en $\phi(U \cap V)$. (Véase la discusión antes del Ejemplo 1.30.) En cada componente conexo de $\phi(U \cap V)$, el jacobiano toma valores positivos exclusivamente, o bien toma valores negativos solamente.

Por ser M orientable, existe $\nu \in \mathcal{A}^n(M)$ tal que $\nu_p \neq 0$ para cada $p \in M$. Sea (U, ϕ) una carta local de M tal que U es conexo, con coordenadas $\phi \equiv (x^1, \dots, x^n)$. Entonces

$$\nu|_U = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

donde la función $f \in C^\infty(U)$ no se anula. Como U es conexo, vale $f(q) > 0$ para todo $q \in U$, o bien $f(q) < 0$ para todo $q \in U$. Sea (U, θ) la carta local de M con el mismo

¹La n -forma $\nu \in \mathcal{A}^n(M) = \Gamma(M, \Lambda^n T^*M)$ es una sección del fibrado de rango uno $\Lambda^n T^*M \xrightarrow{\pi} M$. Decir que ν no se anula es afirmar que ν coincide con la sección cero $p \mapsto 0$ en ningún punto de M .

dominio U pero con $\theta \equiv (z^1, \dots, z^n)$ dado por

$$(z^1, z^2, \dots, z^n) := \begin{cases} (x^1, x^2, \dots, x^n), & \text{si } f > 0 \text{ en } U, \\ (-x^1, x^2, \dots, x^n), & \text{si } f < 0 \text{ en } U. \end{cases}$$

Nótese que $dz^k = dx^k$ para $k = 2, \dots, n$; $dz^1 = \pm dx^1$ con signo negativo si y solo si $f < 0$; luego

$$\nu|_U = g dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n, \quad \text{con } g = |f| > 0 \text{ en } U.$$

Ahora $\theta = \phi$ o bien $\theta = \rho \circ \phi$, donde ρ es una reflexión (lineal e invertible) de \mathbb{R}^n . Dado un atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de M con cada U_α conexo (sin perder generalidad),² las cartas correspondientes $(U_\alpha, \theta_\alpha)$ forman un nuevo atlas, compatible con el original.

Si (V, ψ) , con $\psi \equiv (y^1, \dots, y^n)$ es otra carta local del atlas modificado con $U \cap V \neq \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n &= \frac{\partial y^1}{\partial z^{j_1}} dz^{j_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial y^n}{\partial z^{j_n}} dz^{j_n} \\ &= \sum_{|J|=n} \varepsilon_J \frac{\partial y^1}{\partial z^{j_1}} \dots \frac{\partial y^n}{\partial z^{j_n}} dz^{j_1} \wedge \dots \wedge dz^{j_n} \\ &= \det \left[\frac{\partial y^i}{\partial z^j} \right] dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n = J(\psi \circ \theta^{-1}) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde $\varepsilon_J = 0$ si la lista (j_1, \dots, j_n) tiene repeticiones – por cancelación de $dz^j \wedge dz^j = 0$; y si no, ε_J es el signo de la permutación $(1, \dots, n) \mapsto (j_1, \dots, j_n)$. En $U \cap V$, vale

$$\nu|_{U \cap V} = h dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = g dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n,$$

así que $J(\psi \circ \theta^{-1}) = h/g > 0$ en $U \cap V$. □

En la demostración anterior, el cambio de atlas se rige por las alternativas $\theta_\alpha = \phi_\alpha$ o $\theta_\alpha = \rho \circ \phi_\alpha$; en cada carta se elige uno u otro según el signo del coeficiente $f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ de la 1-forma local $\nu|_{U_\alpha}$. Sin embargo, en la ausencia de una tal n -forma, no siempre es posible elegir estas opciones de manera consistente.

Ejemplo 3.3. Considérese el *plano proyectivo* $\mathbb{R}P^2$ con el atlas del Ejemplo 1.14. Hay tres cartas (U_j, ϕ_j) y el jacobiano de la función de transición fue calculado en el Ejemplo 1.30:

$$J(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) = -(y^1)^{-3} \neq 0 \quad \text{para } y^1 \neq 0.$$

²Si U no es conexo, sea $U = \bigcup_j V_j$ su expresión como unión de componentes conexos (los cuales son abiertos de M porque $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un espacio topológico localmente conexo). Luego, se puede reemplazar la carta local (U, ϕ) por el juego de cartas locales $(V_j, \phi|_{V_j})$; de esta manera se obtiene otro atlas, compatible con el original, en el cual cada dominio de carta es conexo.

En este caso, los dominios de cartas U_j son conexos pero las intersecciones $U_j \cap U_k$ son desconexos: aquí $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ es la unión de dos semiplanos abiertos, $\{y^1 > 0\}$ y $\{y^1 < 0\}$; para otro par de cartas, el cambio podría dar jacobiano $-(y^2)^{-3}$ en semiplanos $\{y^2 > 0\}$ y $\{y^2 < 0\}$. En todo caso, con o sin la reflexión $\rho: (y^1, y^2) \mapsto (-y^1, y^2)$, el jacobiano siempre tomará valores positivos en un semiplano y negativos en el otro.

Se concluye que no es posible modificar el atlas dado por reflexiones para lograr un jacobiano positivo de las funciones de transición. En vista de la demostración anterior, no puede existir una 2-forma sobre $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ que no se anula: se concluye que *la variedad diferencial $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ no es orientable.* \diamond

La Proposición 3.2 tiene una inversa: un atlas de M para el cual todos los jacobianos son positivos establece la orientabilidad de M . La construcción de la n -forma ν depende del siguiente concepto topológico.

Definición 3.4. Sea X un espacio topológico metrizable y separable. Una **partición de la unidad** es un juego de funciones continuas $f_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$, tales que:

- (a) si $V_\alpha := \{x \in X : f_\alpha(x) > 0\}$, los abiertos V_α forman un **cubrimiento local finito** de X ; es decir, cada $x \in X$ posee un vecindario abierto W tal que $W \cap V_\alpha \neq \emptyset$ solo para un número finito de índices α ;
- (b) $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Una partición de la unidad de una variedad diferencial M es *suave* si cada función f_α es suave. \diamond

Nótese que la finitud local (a) implica que la suma en (b) es una suma finita en cada $x \in X$: se puede escribir $\sum_\alpha f_\alpha \equiv 1$ sin problemas de convergencia.

Un espacio metrizable y separable siempre posee una partición de la unidad continua, con conjunto índice numerable. Primero, se puede hallar un cubrimiento abierto localmente finito de X , por ser X metrizable;³ y tiene un refinamiento $\{V_\alpha\}$ (localmente finito también) numerable, por ser X separable. Con el lema de Urysohn, se construye $g_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $\{x \in X : g_\alpha(x) > 0\} = V_\alpha$; luego, como en la demostración del Lema 1.28, se define $f_\alpha := g_\alpha / \sum_\beta g_\beta$.

Si M es una variedad diferencial, los V_α pueden elegirse como los dominios de cartas de un atlas de M ; y se puede tomar cada $g_\alpha \in C^\infty(M)$, por la discusión después del Ejemplo 1.27. En resumen: *cada variedad diferencial M posee una partición de la unidad suave, subordinada a un atlas de M .*

³Este es un teorema de Arthur Stone: *cualquier espacio métrico es paracompacto*. Consúltese cualquier libro de topología general.

Proposición 3.5. *Si una variedad orientable M posee un atlas para el cual toda función de transición tiene jacobiano positivo, entonces M es orientable.*

Demostración. Sea $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ es un atlas con $J(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}) > 0$ en $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ toda vez que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Sea $\{h_\alpha : \alpha \in A\} \subset C^\infty(M)$ una partición de la unidad suave con $\text{sop}(h_\alpha) \subset U_\alpha$ para todo α . Defínase una n -formas $\nu_{(\alpha)} \in \mathcal{A}^n(M)$, una para cada índice α , por

$$\nu_{(\alpha)}|_{U_\alpha} := h_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n; \quad \nu_{(\alpha)}|_{M \setminus U_\alpha} := 0.$$

Nótese que $\nu_{(\alpha)}$ están bien definida porque $h_\alpha = 0$ en un vecindario abierto de $M \setminus U_\alpha$. La siguiente suma:

$$\nu := \sum_{\alpha \in A} \nu_{(\alpha)}$$

es localmente finito (es decir, la restricción del lado derecho a algún vecindario V de cada $p \in M$ es una suma finita) y por ende define una sección suave $p \mapsto \nu_p$ del fibrado vectorial $\Lambda^n(T^*M) \xrightarrow{\pi} M$. Luego $\nu \in \mathcal{A}^n(M)$.

La expresión local de ν en U_α es:

$$\nu|_{U_\alpha} = f_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n := \left(h_\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} h_\beta J(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}) \right) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n,$$

usando (3.1) para efectuar los cambios de coordenadas. Esta sumatoria es localmente finita, y por lo tanto converge a una función suave $f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$. Como $0 \leq h_\alpha \leq 1$ y cada $0 \leq h_\beta \leq 1$, y por hipótesis

$$J(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}) > 0 \quad \text{en} \quad \{q \in U_\alpha : h_\beta(q) > 0\} \subseteq U_\alpha \cap U_\beta,$$

se concluye que $f_\alpha \geq 0$ en U_α .

Además, si $q \in U_\alpha$, entonces

$$f_\alpha(q) = 0 \implies h_\alpha(q) = 0 \quad \text{y} \quad h_\beta(q) = 0 \quad \text{para cada } \beta,$$

lo cual es imposible pues $h_\alpha(q) + \sum_{\beta \neq \alpha} h_\beta(q) = 1$. Se concluye que $f_\alpha > 0$ en U_α , para cualquier $\alpha \in A$. En consecuencia, la n -forma ν no se anula en U_α . Como los dominios U_α recubren M , se ve que ν no se anula en M .

En resumen: la hipótesis de jacobianos positivos permite construir una orientación para M , así que M es orientable. □

Corolario 3.6. *Sea M una variedad orientable y sean $\mu, \nu \in \mathcal{A}^n(M)$ dos n -formas sobre M que no se anulan. Entonces hay una función $h \in C^\infty(M)$ tal que $\mu = h\nu$, con $h(p) \neq 0$ para todo $p \in M$. El signo de la función h es constante en cada componente conexo de M .*

Demostración. Para carta local (U, ϕ) de M , hay dos funciones $f_U, g_U \in C^\infty(U)$ tales que

$$\nu|_U = f_U dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad \mu|_U = g_U dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

con $f \neq 0, g \neq 0$ en U . Colóquese $h_U := g_U/f_U \in C^\infty(U)$.

Si (V, ψ) es otra carta local, entonces $f_V = f_U J(\psi \circ \phi^{-1})$ y $g_V = g_U J(\psi \circ \phi^{-1})$ en $U \cap V$, así que $h_U = g_V/f_V = h_V$ en $U \cap V$. Por lo tanto, hay una función suave $h \in C^\infty(M)$ tal que $h|_U = h_U$ para cada carta (U, ϕ) . Como ningún h_U se anula en U , la función global h no toma el valor 0 en punto alguno de M .

Sin perder generalidad, se puede suponer que cada dominio de carta U es conexo. Luego f_U, g_U y por ende h_U no cambian de signo en U . Como los U recubren M , cada punto $p \in M$ posee un vecindario V para el cual $\text{signo}(h)|_V$ es constante. En otras palabras, $\text{signo}(h): M \mapsto \{-1, +1\}$ es una función continua *localmente constante*.

En particular, $\{p \in M : h(p) > 0\} = (\text{signo}(h))^{-1}(+1)$ es una unión de componentes conexos de M . □

Corolario 3.7. *Sea M una variedad orientable y conexo. Si $\mu, \nu \in \mathcal{A}^n(M)$ son n -formas que no se anulan, entonces $\mu = h\nu$, con $h > 0$ en M o bien $h < 0$ en M .*

Definición 3.8. Si M es una variedad orientable, dos n -formas $\mu, \nu \in \mathcal{A}^n(M)$ que no se anulan se declaran *equivalentes*, $\mu \sim \nu$, si $\mu = h\nu$ para algún $h \in C^\infty(M)$ con $h > 0$ sobre M . Si M es también conexo, solo hay dos clases de equivalencia: $\mu \sim \nu$ o bien $\mu \sim -\nu$, por el Corolario 3.7. Si M es desconexo, con N componentes conexos, entonces hay 2^N clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia $[\nu]$ es una **orientación** sobre M .

Sobre una variedad orientada $(M, [\nu])$, se suele tomar un representante fijo $\underline{\nu}$ de la clase $[\nu]$; este es una **forma de volumen** de la variedad orientada. ◇

Ejemplo 3.9. \mathbb{R}^n es orientable, con forma de volumen $\nu := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

Bajo una permutación $\sigma \in S_n$ de la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ las coordenadas cartesianas también se permutan. En vista de la relación

$$dx^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(n)} = (-1)^\sigma dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

la acción de σ *preserva o cambia* la orientación de \mathbb{R}^n según σ sea *par o impar*. ◇

Ejemplo 3.10. Si $(M, [\nu])$ es una variedad orientada y si $U \subset M$ es una parte abierta, entonces $(U, [\nu|_U])$ es también una variedad orientada. ◇

Lema 3.11. *Sea $(M, [\nu])$ una variedad orientada n -dimensional y sea R una subvariedad de M de codimensión 1, es decir, $\dim R = n - 1$. Sea V un abierto de M con $R \subset V$; denótese por $j: R \rightarrow V$ la inclusión. Si hay un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(V)$ tal que $X_p \notin T_p j(T_p R)$ para todo $p \in R$, entonces R es orientable y $j^*(i_X \nu)$ es una forma de volumen sobre R .*

Demostración. Nótese que $i_X \nu \in \mathcal{A}^{n-1}(V)$; en consecuencia, $j^*(i_X \nu) \in \mathcal{A}^{n-1}(R)$ es una forma de grado máximo sobre R . Si $p \in R$, sea $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ una base de $T_p R$ y escríbase $w_k := T_p j(v_k)$ para cada k . Los vectores $w_1, \dots, w_{n-1} \in T_p j(T_p R)$ son linealmente independientes porque $T_p j$ es inyectivo – la inclusión de la subvariedad $j: R \rightarrow V$ es una inmersión. Luego $\{X_p, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ es una base de $T_p V$. Ahora

$$(j^*(i_X \nu))_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = (i_X \nu)_p(w_1, \dots, w_{n-1}) = \nu_p(X_p, w_1, \dots, w_{n-1}) \neq 0,$$

pues $\nu_p \neq 0$ en $\Lambda^n T_p^* V$. Se concluye que $(j^*(i_X \nu))_p \neq 0$ en $\Lambda^{n-1} T_p^* R$ para todo $p \in R$, es decir, la forma $j^*(i_X \nu)$ no se anula sobre R . \square

Para una superficie bidimensional $R \subset V \subset \mathbb{R}^3$, el espacio vectorial $T_p j(T_p R)$ puede visualizarse como el *plano tangente* a R en el punto p ; el vector X_p corresponde con una dirección en \mathbb{R}^3 que sale de ese plano. Si esta dirección es perpendicular al plano tangente en cada $p \in R$, se describe $\{X_p : p \in R\}$ como un “campo de vectores normales no ceros” sobre R . Hay superficies no orientables, como la franja de Möbius, para los cuales esto es imposible: cualquier campo de vectores normales debe anularse en algún punto de la superficie.

Ejemplo 3.12. La esfera \mathbb{S}^{n-1} es una subvariedad de \mathbb{R}^n , de codimensión 1; el *campo de Euler* $Z := x^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ definido en (2.45) no se anula en $V := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Obsérvese que

$$i_Z \nu = i_Z(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^k dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (3.2)$$

Para la función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por $f(x) := (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2$, al notar que $\mathbb{S}^{n-1} = f^{-1}(\{1\})$, está claro que $X_p f = X_p(1) = 0$ para $X_p \in T_p j(T_p \mathbb{S}^{n-1})$. Pero $Zf = 2f$ – nótese que f es un polinomio homogéneo de grado 2 – así que $Z_p f = 2$ para $p \in \mathbb{S}^{n-1}$. La forma diferencial

$$\sigma := j^*(i_Z \nu) \in \mathcal{A}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

es una forma de volumen sobre \mathbb{S}^{n-1} . En particular, la esfera \mathbb{S}^{n-1} es orientable.

El lado derecho de (3.2) expresa σ en coordenadas cartesianas del espacio ambiente \mathbb{R}^n . La imagen inversa de $i_Z \nu$ bajo j^* cambia la interpretación de (x^1, \dots, x^n) en un juego de coordenadas locales, con la salvedad de que en cada carta local de \mathbb{S}^n hay una coordenada que sobra: la coordenada extra debe expresarse como función de las demás mediante la ecuación $f(x) = 1$. \diamond

3.2 Integrales de n -formas

Definición 3.13. Sea $\omega_0 = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ una n -forma sobre un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Su **integral** sobre V es el número real

$$\int_V \omega_0 \equiv \int \cdots \int_V f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad (3.3)$$

obtenido por el proceso iterativo usual. Concretamente, sea $V_1 := \text{pr}_1(V)$, la proyección de V sobre el eje x^1 ; y sea

$$V^{(1)} := \{ (x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x^1, x^2, \dots, x^n) \in V \text{ para algún } x^1 \in V_1 \}$$

su proyección sobre el complemento ortogonal de $\mathbb{R}e_1$. Defínase $f_1: V^{(1)} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_1(x^2, \dots, x^n) := \int_{V_1} f(x^1, \dots, x^n) dx^1,$$

donde el lado derecho es una integral de Lebesgue.⁴ Si $V_{12} := \text{pr}_2(V^{(1)})$, defínase de modo similar:

$$f_{12}(x^3, \dots, x^n) := \int_{V_{12}} f_1(x^2, \dots, x^n) dx^2,$$

y así sucesivamente. En breve, se calcula la integral de $f(x^1, \dots, x^n)$ respecto de las variables x^1, \dots, x^n en sucesión; en cada paso, al integrar respecto de x^j , se deja fijas las variables subsiguientes. Resulta que la integral (3.3) resultante está bien definida si las integraciones intermedias todas convergen, y su valor no depende del orden de las variables de integración. \diamond

Definición 3.14. Sea M una variedad diferencial con $\dim M = n$ y sea $\omega \in \mathcal{A}^n(M)$. Si (U, ϕ) es una carta local de M , sea $\omega|_U = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ la expresión local de ω en esta carta, entonces $\omega|_U = \phi^* \omega_0$, donde ω_0 es la n -forma en $\phi(U)$ que posee *la misma expresión local* – conviene recordar que (x^1, \dots, x^n) son las coordenadas cartesianas en el abierto $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Defínase **la integral de ω sobre U** por la fórmula

$$\int_U \omega = \int_U \phi^* \omega_0 := \int_{\phi(U)} \omega_0, \quad (3.4)$$

cuyo lado derecho está dado por (3.3). \diamond

⁴Como f es suave, la integral de Lebesgue coincide con la integral de Riemann, quizás impropia, sobre el abierto $V_1 \subset \mathbb{R}$, si la integral del valor absoluto del integrando es finita.

No es obvio si $\int_U \omega$ está bien definida, porque el lado derecho de (3.3) depende de la carta (U, ϕ) . Considérese entonces otra carta (V, ψ) para M , con $U \cap V \neq \emptyset$, donde

$$\omega|_{U \cap V} = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = g(y^1, \dots, y^n) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$$

son las dos expresiones locales para ω en $U \cap V$. Para que $\int_{U \cap V} \omega$ sea independiente de las cartas, hace falta comprobar que:

$$\int_{\phi(U \cap V)} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{\psi(U \cap V)} g(y^1, \dots, y^n) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n. \quad (3.5)$$

El jacobiano de la función de transición $J(\psi \circ \phi^{-1})$ no se anula en $\phi(U \cap V)$, así que $g(y) = g(\psi \circ \phi^{-1}(x))$ allí; en vista de (3.1), se obtiene

$$g(y) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = g(\psi \circ \phi^{-1}(x)) J(\psi \circ \phi^{-1})(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Esto implica que

$$f(x) = g(\psi \circ \phi^{-1}(x)) J(\psi \circ \phi^{-1})(x) \quad \text{para todo } x \in \phi(U \cap V).$$

Basta entonces comprobar, para g suave pero arbitraria, que:

$$\int_{\psi(U \cap V)} g(y) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = \int_{\phi(U \cap V)} g(\psi \circ \phi^{-1}(x)) J(\psi \circ \phi^{-1})(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (3.6)$$

Esta fórmula coincide con la regla usual de cambio de variable en integrales múltiples *salvo el detalle de que el jacobiano debe aparecer a la derecha en valor absoluto*. Para obtener concordancia con las teorías usuales de integración – la de Lebesgue, para funciones integrables, o la de Riemann para funciones continuas en abiertos de \mathbb{R}^n – resulta necesario *exigir que todos los jacobianos sean positivos*.

Ahora bien, si M es una variedad orientable, la Proposición 3.2 garantiza la existencia de un atlas cuyos jacobianos de transición son todos positivos; y viceversa, por la Proposición 3.5. En la presencia de una determinada forma de volumen ν , se puede suponer, sin perder generalidad, que $J(\psi \circ \phi^{-1})(x) > 0$ en (3.6). En síntesis: el contexto apropiado para definir integrales de n -formas es el de una *variedad orientada* $(M, [\nu])$.

Definición 3.15. Sea $(M, [\nu])$ una variedad orientada. Sea $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ un atlas de M cuyas funciones de transición tienen jacobianos positivos, y que además cumple $\nu|_{U_\alpha} = f_\alpha dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ con $f_\alpha > 0$ en $C^\infty(U_\alpha)$ para cada carta local. Sea $\{h_\alpha : \alpha \in A\} \subset C^\infty(M)$ una partición de la unidad localmente finita con $\text{sop}(h_\alpha) \subset U_\alpha$ para cada $\alpha \in A$. Si $\omega \in \mathcal{A}^n(M)$, entonces $\omega = \sum_\alpha h_\alpha \omega$. Es fácil comprobar que la suma

$\sum_{\alpha} \int_{U_{\alpha}} (h_{\alpha} \omega)$ no depende de la partición de la unidad empleada. Entonces se define la **integral** de la n -forma ω sobre M – relativa a la orientación $[\nu]$ dada – por:

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha} \int_{U_{\alpha}} (h_{\alpha} \omega). \quad \diamond$$

Proposición 3.16 (Cambio de variables). Sean $(M, [\nu])$ y $(N, [\rho])$ dos variedades orientadas de dimensión n y sea $\tau: M \rightarrow N$ un difeomorfismo que preserva la orientación: es decir, $\tau^* \rho \sim \nu$ en el sentido de la Definición 3.8. La integral sobre M de la imagen inversa de una n -forma coincide con su integral original sobre N :

$$\int_M \tau^* \eta = \int_N \eta \quad \text{para todo } \eta \in \mathcal{A}^n(N). \quad (3.7)$$

Demostración. Si (V, ψ) es una carta local para N , sea (U, ϕ) una carta local para M tal que $\tau(U) = V$; escríbase $\theta := \psi \circ \tau \circ \phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow \psi(V)$. La igualdad $\tau^* \rho \sim \nu$ implica que es posible elegir estas cartas – de atlas apropiados para M y N – para que el jacobiano $J(\theta)$ sea positivo.

Sea $\eta|_V = g(y) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$ la expresión local de η en V . Entonces la expresión local de $\tau^* \eta$ en U es $g(\theta(x))(J\theta)(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, donde $x = \theta^{-1}(y)$. Ahora

$$\int_V \eta = \int_{\psi(V)} g(y) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = \int_{\phi(U)} g(\theta(x)) J(\theta)(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_U \tau^* \eta,$$

por la regla de cambio de variable en integrales múltiples, análoga a (3.6). El resultado sigue de la Definición 3.15, al emplear una partición de la unidad $\{h_{\alpha} : \alpha \in A\}$ sobre N y su imagen inversa $\{h_{\alpha} \circ \tau : \alpha \in A\}$, la cual es otra partición de la unidad sobre M . \square

Fíjese bien que la “fórmula de cambio de variables” (3.7) es concordante con la fórmula (3.4) que define la integral en una carta local. Efectivamente, si $\nu_0 = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ es la orientación usual de \mathbb{R}^n , entonces $\phi: U \rightarrow \phi(U)$ es un difeomorfismo y $\nu|_U \sim \phi^{-1}(\nu_0|_{\phi(U)})$ en la situación de la Definición 3.14. En otras palabras, (3.4) es un caso particular de la fórmula general (3.7).

3.3 Símplices y cadenas

La integración de n -formas de la sección anterior generaliza el concepto de integral múltiple del “análisis vectorial”, cuyas regiones de integración son abiertos de algún \mathbb{R}^n , o más generalmente, de una variedad orientada n -dimensional. Su cálculo consiste en descomponer la región de integración en dominios de cartas locales, parametrizando tales dominios por n coordenadas locales, y luego efectuar una integración iterada de las integrales

paramétricas resultantes. La fórmula principal de la sección anterior es la ecuación (3.6), que muestra que la integral es independiente de la parametrización elegida y depende únicamente de la orientación de la variedad.

Otra clase importante de integrales en \mathbb{R}^n o en variedades son las *integrales de línea* e *integrales de superficie*, cuyos integrandos son k -formas con $k < n$. Para ellas, la “región de integración” debe ser también k -dimensional, pero no necesariamente una subvariedad de la variedad dada. En esta sección se pretende aclarar la naturaleza de tales regiones de integración de dimensiones inferiores a n .

► Conviene empezar con regiones poligonales en \mathbb{R}^n , para luego generalizarlas mediante cambios de parametrización.

Definición 3.17. Un conjunto finito $\{p_0, p_1, \dots, p_k\}$ de puntos en \mathbb{R}^n es **afinmente independiente** si los vectores $p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_k - p_0$ son *linealmente* independientes. Esto dice que en una suma

$$\sum_{i=0}^k t_i p_i = t_0 p_0 + t_1 p_1 + \dots + t_k p_k \quad \text{con } t_0, \dots, t_k \in \mathbb{R},$$

ningún término es redundante salvo si $t_i = 0$. Una suma de la forma

$$\sum_{i=0}^k t_i p_i = t_0 p_0 + t_1 p_1 + \dots + t_k p_k \quad \text{con } t_0 + t_1 + \dots + t_k = 1$$

es una **combinación afín** de los p_i . Una combinación afín con coeficientes no negativos:

$$\sum_{i=0}^k t_i p_i = t_0 p_0 + t_1 p_1 + \dots + t_k p_k, \quad \text{con } \sum_{i=0}^k t_i = 1, \quad \text{y cada } t_i \geq 0, \quad (3.8)$$

es una **combinación convexa** de los puntos p_i .

Una parte $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexa** si incluye el *segmento*

$$[x, y] \equiv \{(1-t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\}$$

que un cualquier par de sus puntos: $x, y \in C \implies [x, y] \subseteq C$.

Las combinaciones convexas (3.8) de un juego finito de puntos $\{p_0, p_1, \dots, p_k\}$ constituyen un conjunto convexo: esta es la **envoltura convexa** de los p_i . \diamond

Definición 3.18. Los juegos ordenados de $(k+1)$ puntos afinmente independientes en \mathbb{R}^n admiten la siguiente relación de equivalencia:

$$(p_0, p_1, \dots, p_k) \sim (p_{\pi(0)}, p_{\pi(1)}, \dots, p_{\pi(k)}) \quad \text{si } \pi \in S_{k+1} \text{ con } (-1)^\pi = +1,$$

es decir, uno de los juegos es una *permutación par* del otro.

Si los puntos $\{p_0, \dots, p_k\}$ son afínmente independiente, el **k -símplice** $\Delta(p_0, \dots, p_k)$ es la envoltura convexa de estos puntos, *dotado con un signo* ± 1 que se determina de la siguiente manera. La matriz en $M_k(\mathbb{R})$ con columnas $p_1 - p_0, \dots, p_k - p_0$ es invertible y su determinante es positivo o negativo; el signo de $\Delta(p_0, \dots, p_k)$ es el signo de ese determinante.⁵ Este signo depende solamente de la clase de equivalencia del conjunto ordenado de **vértices** p_i y satisface

$$\Delta(p_{\pi(0)}, p_{\pi(1)}, \dots, p_{\pi(k)}) = (-1)^\pi \Delta(p_0, \dots, p_k). \quad (3.9)$$

Si e_1, \dots, e_k son los primeros k vectores, tomados en el orden usual, de la base estándar de \mathbb{R}^n , se puede abreviar $\underline{\Delta}^k := \Delta(0, e_1, \dots, e_k)$. Esta es el *k -símplice estándar* en \mathbb{R}^n . \diamond

La notación Δ^k es levemente ambigua, porque depende de la dimensión del espacio \mathbb{R}^n ambiente. Pero se suele identificar \mathbb{R}^n con el subespacio $\text{lin}\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ de \mathbb{R}^{n+1} ; bajo esas identificaciones, todas las versiones de Δ^k coinciden.

La relación (3.9) refleja un patrón geométrico: dado un poliedro con $k + 1$ vértices en \mathbb{R}^n , se puede cambiar el orden de enumeración de los vértices mediante un número finito de *reflexiones* (transformaciones afines biyectivas de \mathbb{R}^n que dejan fijo un hiperplano) que intercambian dos vértices mientras dejan fijos los demás. Este producto de reflexiones corresponde con una expresión de la permutación π de los vértices como un producto de transposiciones. El efecto de estas reflexiones modifica la forma de volumen ν de \mathbb{R}^n en $(-1)^\pi \nu$. En otras palabras: el signo en (3.9) es $+1$ si y solo si la reenumeración de los vértices preserva la orientación dada de \mathbb{R}^n .

Definición 3.19. Una **k -cadena simplicial** en \mathbb{R}^n es una suma formal de k -símplices con coeficientes enteros: $C = a_1 S_1 + \dots + a_r S_r$ donde S_1, \dots, S_r son k -símplices y $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}$. La totalidad de k -cadenas simpliciales en \mathbb{R}^n será denotado por $\tilde{C}_k(\mathbb{R}^n)$. Habida cuenta de la relación (3.9), $\tilde{C}_k(\mathbb{R}^n)$ es el \mathbb{Z} -módulo (o *grupo abeliano libre*) generado por todos los k -símplices en \mathbb{R}^n .

El **borde** de un k -símplice $S = \Delta(p_0, \dots, p_k)$ es la $(k - 1)$ -cadena simplicial siguiente:

$$\partial S := \sum_{j=0}^k (-1)^j \Delta(p_0, \dots, \widehat{p}_j, \dots, p_k). \quad (3.10)$$

Por \mathbb{Z} -linealidad: $\partial(a_1 S_1 + \dots + a_r S_r) := a_1 \partial S_1 + \dots + a_r \partial S_r$, se extiende ∂ a las k -cadenas. De esta manera, $\partial: \tilde{C}_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \tilde{C}_{k-1}(\mathbb{R}^n)$ es un homomorfismo de grupos abelianos. En el caso $k = 0$, se define $\partial \Delta(p_0) := 0$, el cero del grupo trivial $\tilde{C}_{-1}(\mathbb{R}^n) := \{0\}$. \diamond

⁵Formalmente, un k -símplice es un par (P, ε) donde $P \subset \mathbb{R}^n$ es un poliedro y $\varepsilon \in \{1, -1\}$.

Ejemplo 3.20. Un 0-símplice $\Delta(p_0)$ es un *punto* dotado con un signo.

Un 1-símplice $\Delta(p_0, p_1)$ es el *segmento* $[p_0, p_1]$ dotado con un orden de sus vértices: $\Delta(p_1, p_0) = -\Delta(p_0, p_1)$.

El borde de un segmento, $\partial \Delta(p_0, p_1) = \Delta(p_1) - \Delta(p_0)$ es el vértice final menos el vértice inicial. \diamond

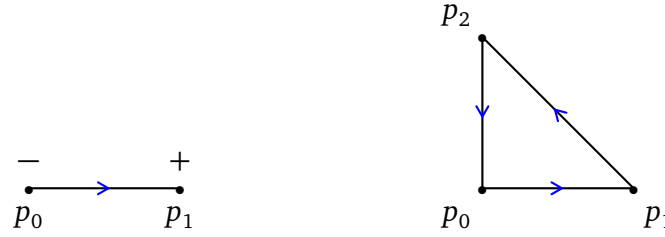


Figura 3.1: Un 1-símplice y un 2-símplice con sus bordes

Ejemplo 3.21. En el caso $k = 2$, vale

$$\partial \Delta(p_0, p_1, p_2) = \Delta(p_1, p_2) - \Delta(p_0, p_2) + \Delta(p_0, p_1) = \Delta(p_1, p_2) + \Delta(p_2, p_0) + \Delta(p_0, p_1).$$

El borde de un triángulo es entonces la suma formal de sus tres lados, recorridos en el sentido determinado por la orientación inicial de sus vértices. \diamond

Ejemplo 3.22. El borde del k -símplice estándar Δ^k es

$$\partial \Delta^k = \Delta(e_1, \dots, e_k) + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \Delta(0, e_1, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_k) + (-1)^k \Delta^{k-1}. \quad (3.11)$$

En particular, $\partial \Delta^1 = \Delta(e_1) - \Delta^0$; y además $\partial \Delta^2 = \Delta(e_1, e_2) - \Delta(0, e_2) + \Delta^1$. \diamond

Lema 3.23. Si $C \in \widetilde{C}_k(\mathbb{R}^n)$ es una k -cadena simplicial, entonces $\partial(\partial C) = 0$ en $\widetilde{C}_{k-2}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Basta comprobar que $\partial(\partial S) = 0$ para un k -símplice $S = \Delta(p_0, \dots, p_k)$:

$$\begin{aligned} \partial(\partial S) &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \partial \Delta(p_0, \dots, \widehat{p}_j, \dots, p_k) \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \Delta(p_0, \dots, \widehat{p}_i, \dots, \widehat{p}_j, \dots, p_k) + \sum_{i > j} (-1)^{i-1+j} \Delta(p_0, \dots, \widehat{p}_j, \dots, \widehat{p}_i, \dots, p_k) = 0 \end{aligned}$$

por cancelación: en la primera sumatoria a la derecha, hay i vértices antes de p_i , mientras que en la segunda hay $(i - 1)$ vértices antes de p_i . Entre las dos sumatorias se repiten los términos con signos opuestos. \square

Es evidente que todos los k -símplices son congruentes mediante transformaciones afines de \mathbb{R}^k . [Una *transformación afín* de \mathbb{R}^k es una biyección que lleva rectas en rectas; como tal, es la composición de una aplicación lineal invertible y una traslación, $x \mapsto Ax + v$ con $A \in \text{GL}(k, \mathbb{R})$ y $v \in \mathbb{R}^k$.] En efecto, si p_0, \dots, p_k son afínmente independientes, hay una única transformación s de \mathbb{R}^k tal que $s(e_j) = p_j$ para $j = 0, \dots, k$. En consecuencia,

$$s(\Delta^k) = \Delta(p_0, \dots, p_k).$$

En más detalle, el conjunto $\Delta(p_0, \dots, p_k)$ es la imagen del conjunto Δ^k bajo la aplicación afín s ; y si $s(x) \equiv Ax + v$, el signo de $\Delta(p_0, \dots, p_k)$ es el signo de $(\det A)$.

La fórmula (3.11) para el borde del k -símplice estándar se puede escribir como

$$\partial \Delta^k = \sum_{j=0}^k (-1)^j s_j^k(\Delta^{k-1}),$$

donde las **aplicaciones faciales** $s_j^k: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, para $j = 0, \dots, k$, son las aplicaciones afines determinadas por

$$s_j^k(0) := \begin{cases} 0 & \text{si } j > 0, \\ e_1 & \text{si } j = 0, \end{cases} \quad s_j^k(e_i) := \begin{cases} e_i & \text{si } i < j, \\ e_{i+1} & \text{si } i \geq j. \end{cases} \quad (3.12)$$

Nótese que $s_k^k = 1_n$.

► Hay dominios de integración de k -formas sobre una variedad que no son símplices ni cadenas simpliciales, pero comparten la estructura combinatoria de tales cadenas. Una generalización de las cadenas simpliciales, adecuada para los propósitos actuales, consiste en reemplazar las imágenes afines de los Δ^k por imágenes bajo funciones suaves.⁶

Definición 3.24. Sea M una variedad diferencial n -dimensional. Si $k \in \mathbb{N}$, un **k -símplice singular** (suave) es una *función suave* $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$. Por función suave con dominio Δ^k se entiende la restricción a Δ^k de una función suave $\sigma: V \rightarrow M$ cuyo dominio es un abierto V con $\Delta^k \subset V \subseteq \mathbb{R}^k$.

Una **k -cadena singular** (suave) en M , con coeficientes reales, es una suma finita formal $c = \sum_{i=1}^r a_i \sigma_i$, con $a_i \in \mathbb{R}$, donde los σ_i son k -símplices singulares (suaves) en M . La totalidad de k -cadenas singulares en M se denotará por $C_k(M, \mathbb{R})$; este es el espacio \mathbb{R} -vectorial generado por los k -símplices singulares. \diamond

⁶Para los efectos topológicos, convendría usar imágenes *continuas* de los Δ^k en vez de imágenes suaves solamente. Eso permitiría considerar dominios de integración menos regulares, si fuera necesario.

Definición 3.25. El **borde** de un k -símplice singular $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$ es la $(k-1)$ -cadena singular definido por

$$\partial \sigma := \sum_{j=0}^k (-1)^j \sigma \circ s_j^k, \quad (3.13)$$

donde las aplicaciones faciales (3.12) son consideradas como funciones $s_j^k : \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta^k$.

El borde de una k -cadena singular $c = \sum_{i=1}^r a_i \sigma_i$ es la $(k-1)$ -cadena singular

$$\partial c := \sum_{i=1}^r a_i \partial \sigma_i.$$

En otras palabras, la fórmula (3.13) se extiende por linealidad a una aplicación \mathbb{R} -lineal $\sigma : C_k(M, \mathbb{R}) \rightarrow C_{k-1}(M, \mathbb{R})$.

Un 0 -símplice singular es un *punto* de M : si $p \in M$, se identifica p con la única función $\sigma : \Delta^0 \rightarrow M$ tal que $\sigma(\Delta^0) = p$. Como $\partial \Delta^0 = 0$ por regla, se declara que $C_{-1}(M, \mathbb{R}) := \{0\}$ y que $\partial c := 0$ para $c \in C_0(M, \mathbb{R})$. \diamond

Lema 3.26. Si $c \in C_k(M, \mathbb{R})$ es una k -cadena singular, entonces $\partial(\partial c) = 0$ en $C_{k-2}(M, \mathbb{R})$.

Demostración. A partir de las fórmulas (3.13) y (3.12), la demostración del Lema 3.23 se traduce directamente en un cálculo que da $\partial(\partial \sigma) = 0$ por cancelación. Por linealidad, se obtiene $\partial(\partial c) = 0$ para una k -cadena c cualquiera. \square

Definición 3.27. Un **k -ciclo singular** (suave) es una k -cadena singular suave c tal que $\partial c = 0$. La totalidad de k -ciclos es un subespacio \mathbb{R} -vectorial de $C_k(M, \mathbb{R})$, denotado por

$$Z_k(M, \mathbb{R}) := \{c \in C_k(M, \mathbb{R}) : \partial c = 0\}.$$

En particular, $Z_0(M, \mathbb{R}) = C_0(M, \mathbb{R})$.

Un **k -borde singular** es el borde de una $(k+1)$ -cadena singular; el subespacio de los k -bordes es

$$B_k(M, \mathbb{R}) := \{\partial b : b \in C_{k+1}(M, \mathbb{R})\}.$$

La relación $\partial(\partial c) = 0$ implica que $B_k(M, \mathbb{R}) \leq Z_k(M, \mathbb{R})$ para $k \in \mathbb{N}$.

El espacio vectorial cociente

$$H_k(M, \mathbb{R}) := \frac{Z_k(M, \mathbb{R})}{B_k(M, \mathbb{R})}$$

es el k -ésimo **grupo de homología singular real** de la variedad M . \diamond

Los $C_k(M, \mathbb{R})$ forman un **complejo**, es decir, una sucesión espacios \mathbb{R} -vectoriales ligados por aplicaciones lineales ∂ de composición nula:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_{k+1}(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} C_k(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_1(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} C_0(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} 0. \tag{3.14}$$

El Lema 3.26 dice que $\partial \circ \partial = 0$ en cada caso. Más generalmente, para un anillo conmutativo R cualquiera, se puede definir un complejo $C_\bullet = \{C_k : k \in \mathbb{Z}\}$ con R -homomorfismos $\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}$ tales que $\partial \circ \partial = 0 : C_k \rightarrow C_{k-2}$ en cada caso. Entonces se escribe $Z_k := \ker(\partial : C_k \rightarrow C_{k-1})$ y $B_k := \text{im}(\partial : C_{k+1} \rightarrow C_k)$, de modo que $B_k \subseteq Z_k$. Los R -módulos $H_k := Z_k/B_k$ forman la **homología** del complejo C_\bullet .

En particular, se puede replantear las cadenas singulares con coeficientes en cualquier grupo abeliano, por ejemplo \mathbb{Z} o \mathbb{Z}_2 en vez de \mathbb{R} ; en cuyo caso esta cadena forma un complejo de grupos abelianos (es decir, \mathbb{Z} -módulos). Los grupos abelianos $H_k(M, \mathbb{Z})$, para $k \in \mathbb{N}$, forman la *homología singular* de M (sin adjetivo calificativo); tales grupos pueden tener subgrupos de torsión, que iluminan la topología de M .

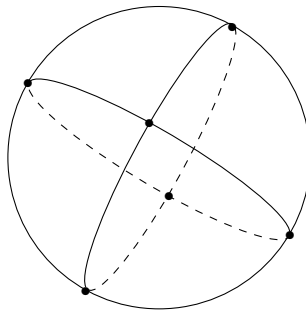


Figura 3.2: Una triangulación de la esfera S^2

Ejemplo 3.28. Considérese la 2-cadena singular $c = \sum_{i=1}^8 \sigma_i$ en S^2 , donde los σ_i son los triángulos esféricos formados por las intersecciones de S^2 con los octantes $x^j \geq 0$ de \mathbb{R}^3 , con sus vértices recorridos contra reloj desde el punto de vista de un observador ubicado en el punto diagonal $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ del octante correspondiente (véase la Figura 3.2). El borde ∂c es una suma de arcos orientados, de un cuarto de gran círculo cada uno, sobre los gran círculos $x^1 = 0$, $x^2 = 0$ y $x^3 = 0$. Es fácil verificar que estos arcos orientados se cancelan en pares. Luego $c \in Z_2(S^2, \mathbb{R})$. Nótese que la unión de los triángulos es todo S^2 . Se puede mostrar que $B_2(S^2, \mathbb{R}) = \{0\}$, así que $[c] \neq 0$ en $H_2(S^2, \mathbb{R})$.

Resulta que $H_2(S^2, \mathbb{R}) = H_0(S^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ y que $H_k(S^2, \mathbb{R}) = 0$ para $k = 1$ o $k \geq 3$.

La igualdad $H_0(S^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ dice simplemente que S^2 es conexo por arcos. Si $p, q \in S^2$, la diferencia $p - q$ es el borde de un arco que va desde q a p y por ende pertenece a

$B_0(\mathbb{S}^2, \mathbb{R})$; pero el solo punto p no es el borde de un arco. Entonces p representa un elemento no cero $H_0(\mathbb{S}^2, \mathbb{R})$, mientras $p - q$ representa el cero de este espacio cociente; en resumen, $H_0(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}[p] \simeq \mathbb{R}$.

Más generalmente, si M es una variedad diferencial con m componentes conexos, entonces $H_0(M, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^m$. \diamond

► Con estos prolegómenos, ya se puede plantear la integral de una k -forma sobre la “región de integración” dada por una k -cadena singular.

Definición 3.29. Sea $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$ un k -símplice singular en una variedad diferencial M y sea ω una k -forma sobre M . Se puede extender σ a una aplicación suave $\sigma: V \rightarrow M$ definido en un abierto V de \mathbb{R}^k con $\Delta^k \subset V$. Entonces $\sigma^*\omega \in \mathcal{A}^k(V)$ posee una integral dada por la Definición 3.13. La **integral de ω sobre σ** se define por

$$\int_{\sigma} \omega := \int_{\Delta^k} \sigma^* \omega. \quad (3.15a)$$

Si $\sigma^*\omega = g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$ en $\mathcal{A}^k(V)$, el lado derecho es una integral iterada:

$$\int_{\Delta^k} \sigma^* \omega := \int_0^1 \int_0^{1-x^k} \dots \int_0^{1-x^2-\dots-x^k} g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^k. \quad (3.15b)$$

Cabe notar que el lado derecho de (3.15a) no depende de la extensión de σ al abierto V que incluye Δ^k . En efecto, si $\tau: V \rightarrow V'$ es un difeomorfismo de V en otro abierto de esa clase, tal que $\tau(x) = x$ para todo $x \in \Delta^k$, entonces

$$\int_{\Delta^k} (\sigma \circ \tau)^* \omega = \int_{\Delta^k} \tau^*(\sigma^* \omega) = \int_{\Delta^k} \sigma^* \omega$$

por la Proposición 3.16, habida cuenta de que la identidad $1: \Delta^k \rightarrow \Delta^k$ es la restricción a Δ^k del difeomorfismo $\tau: V \rightarrow V'$.

Si $c = \sum_{i=1}^r a_i \sigma_i$ es una k -cadena singular en M , se define $\int_c \omega$ de tal manera que $c \mapsto \int_c \omega$ sea una forma lineal sobre $C_k(M, \mathbb{R})$:

$$\int_c \omega := \sum_{i=1}^r a_i \int_{\sigma_i} \omega. \quad \diamond$$

Observación. Una **triangulación** de la variedad orientable M es un n -ciclo $c = \sum_i \pm \sigma_i$ sobre M tal que $M = \bigcup_i \sigma_i(\Delta^n)$ y las expresiones locales $\phi_\alpha \circ \sigma_i$ con respecto a un atlas

compatible con la orientación tengan jacobianos positivos. Resulta que cada variedad *compacta* orientable admite una triangulación.⁷

Una triangulación se puede refinar en otra cuyos símlices son menos extensos, por un proceso llamada *subdivisión baricéntrica*. Si $S = \Delta(p_0, \dots, p_n)$ es un n -símlice en \mathbb{R}^n , su *baricentro* (o centroide) es el punto $\bar{p} := (p_0 + \dots + p_n)/(n + 1)$. Los vértices de S , los baricentros de todas sus facetas, y el propio \bar{p} , son vértices de unos $n!$ símlices cuya suma es una cadena $K \in \tilde{C}_n(\mathbb{R}^n)$ tal que $\partial K = \partial S$. El diámetro de cada símlice en K es $n/(n + 1)$ veces el diámetro de S . Al repetir varias veces esta subdivisión con los símlices en K , se puede reemplazar la triangulación original por otra c' (con $\partial c' = \partial c = 0$) donde cada celda $\sigma_j(\Delta^n)$ de c' sea parte de algún dominio de carta local de M . De esta manera, la integral $\int_{c'} \omega$ de una n -forma ω se puede evaluar por cálculos con coordenadas locales. Resulta también que las integrales $\int_c \omega$, $\int_{c'} \omega$ y $\int_M \omega$ de la Definición 3.15 coinciden.

3.4 El teorema de Stokes

Los conceptos de formas diferenciales y cadenas singulares permiten unificar diversas teoremas del “análisis vectorial” en un solo enunciado, llamado el *teorema de Stokes*. El paso esencial en la prueba de este teorema es la invocación del *teorema fundamental del cálculo* unidimensional: $\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a)$. A la vez, el lenguaje de formas y cadenas hace patente que el teorema de Stokes es esencialmente un teorema de dualidad.

Teorema 3.30 (Stokes). *Sea M una variedad diferencial de dimensión n ; sea c una k -cadena singular suave sobre M para algún $k \in \{1, \dots, n\}$; y sea η una forma diferencial sobre M de grado $(k - 1)$. Entonces la siguiente igualdad es válida:*

$$\int_{\partial c} \eta = \int_c d\eta. \tag{3.16}$$

Demostración. Nótese primero que los dos lados de (3.16) son lineales en c , así que basta comprobar esta ecuación cuando $c = \sigma$ es un k -símlice singular suave. Se debe mostrar que

$$\int_{\partial \Delta_k} \sigma^* \eta = \int_{\Delta_k} \sigma^*(d\eta) = \int_{\Delta_k} d(\sigma^* \eta) \tag{3.17}$$

para todo $\eta \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$ y $\sigma \in C_k(M, \mathbb{R})$. Aquí $\sigma^* \eta$ es una $(k - 1)$ -forma diferencial definido en un abierto V con $\Delta^k \subset V \subseteq \mathbb{R}^k$, que tiene la siguiente expresión en las coor-

⁷En la categoría más amplia de variedades diferenciales con borde, las triangulaciones son cadenas pero no necesariamente son ciclos.

denadas cartesianas de \mathbb{R}^k :

$$\sigma^*\eta = \sum_{j=1}^k g_j(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^k.$$

Por la linealidad en η de los tres términos en (3.17), basta considerar el caso en el cual hay un solo sumando al lado derecho – los otros términos son análogos mediante una permutación cíclica de las variables x^j y un cambio de la función coeficiente. Entonces se puede tomar

$$\sigma^*\eta = g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{k-1}. \quad (3.18)$$

La derivada exterior de (3.18) es

$$\begin{aligned} \sigma^*(d\eta) &= d(\sigma^*\eta) = \frac{\partial g}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^k) dx^k \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{k-1} \\ &= (-1)^{k-1} \frac{\partial g}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^k. \end{aligned}$$

Por otro lado, el borde $\partial \Delta^k$ del k -símplice estándar, según la fórmula (3.11), es una suma de $k + 1$ símplices de dimensión $(k - 1)$; el primero de estas *facetas* es

$$\Delta(e_1, \dots, e_k) = \left\{ (x^1, \dots, x^{k-1}, 1 - \sum_{j=1}^{k-1} x^j) : (x^1, \dots, x^{k-1}) \in \Delta^{k-1} \right\},$$

la cual se obtiene al proyectar el hiperplano $x^1 + \cdots + x^k = 1$ sobre el hiperplano $x^k = 0$; la última faceta es $\Delta(e_1, \dots, e_{k-1}, 0) = (-1)^{k-1} \Delta_{k-1}$. También hay facetas intermedias $S_j = \Delta(0, e_1, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_k)$ para $j \in \{1, \dots, k-1\}$; la faceta S_j es parte del hiperplano $x^j = 0$.

Al invocar las fórmulas (3.15), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_k} \sigma^*(d\eta) &= \int_{\Delta_k} \frac{\partial g}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^k) dx^k \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{k-1} \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x^1} \cdots \int_0^{1-x^1-\cdots-x^{k-1}} \frac{\partial g}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^k) dx^k \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{k-1} \\ &= \int_{\Delta^{k-1}} (g(x^1, \dots, x^{k-1}, 1 - \sum_{j=1}^{k-1} x^j) - g(x^1, \dots, x^{k-1}, 0)) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{k-1} \\ &= \int_{\Delta(e_1, \dots, e_k)} g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{k-1} \\ &\quad - (-1)^{k-1} \int_{\Delta_{k-1}} g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{k-1} \\ &= \int_{\partial \Delta_{k-1}} g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{k-1} = \int_{\partial \Delta_{k-1}} \sigma^*\eta. \end{aligned}$$

En este cálculo, la tercera igualdad viene del teorema fundamental del cálculo en una dimensión. En la cuarta igualdad, las regiones de integración son las facetas primera y última de $\partial \Delta^k$. Sobre cualquier otra faceta S_j , la integral $\int_{S_j} g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1}$ vale 0 porque la coordenada x^j es constante y por ende $dx^j = 0$ a lo largo de S_j ; de ahí resulta la quinta igualdad. \square

Ejemplo 3.31. El teorema de Stokes generaliza varios resultados clásicos del “análisis vectorial”. Por ejemplo, si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva suave y si $F: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 definido en un abierto V con $\gamma([a, b]) \subset V \subseteq \mathbb{R}^n$, la **integral de línea** de F sobre la curva γ es igual a

$$\int_{\gamma} F \cdot dr \equiv \int_{\gamma} F_j dx^j = \int_{[a,b]} \gamma^*(F_j dx^j) = \int_a^b F_j(\gamma(t)) (\gamma^j)'(t) dt \equiv \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Fíjese que la curva γ es un 1-símplice singular. Si existe una **función potencial** $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla v$ (es decir, $F_j = \partial v / \partial x^j$ para cada j), entonces

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = \int_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial x^j} dx^j = \int_{\gamma} dv = \int_{\partial \gamma} v \equiv v(\gamma(b)) - v(\gamma(a)).$$

porque el borde de γ es la 0-cadena singular $+\gamma(b) - \gamma(a)$. La parametrización de la curva exhibe este caso del teorema de Stokes como una instancia del teorema fundamental del cálculo unidimensional:

$$\int_a^b \frac{d}{dt} v(\gamma(t)) dt = v(\gamma(b)) - v(\gamma(a)). \quad \diamond$$

Ejemplo 3.32 (Teorema de Green). Sea R una región abierta del plano \mathbb{R}^2 cuya frontera C es suave por trozos. Si $P, Q: V \rightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones de clase C^1 definidos en un abierto V tal que $\bar{R} \subset V \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \quad (3.19)$$

En efecto, si $\alpha := P dx + Q dy \in \mathcal{A}^1(V)$, entonces

$$d\alpha = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

así que el lado derecho de (3.19) es $\int_R d\alpha$. Ahora bien, la clausura \bar{R} admite una *triangulación*, es decir, se puede descomponer \bar{R} en una unión de conjuntos difeomorfos a

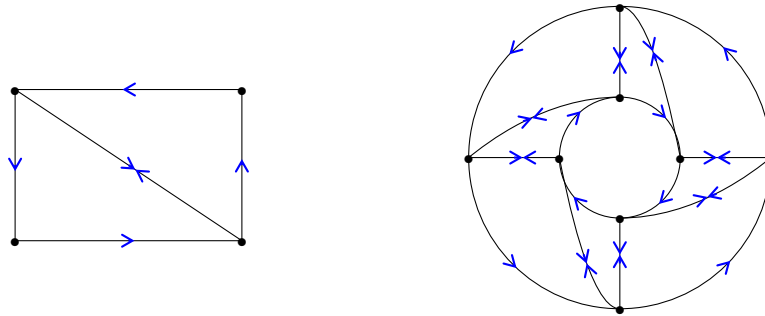


Figura 3.3: Triangulaciones de regiones del plano

triángulos planos que no traslapan (es decir, una intersección no vacía de dos triángulos de \bar{R} debe ser parte de su frontera común). Esto dice que hay una 2-cadena singular $c = \sigma_1 + \dots + \sigma_r$ tal que $\bar{R} = \sigma_1(\Delta^2) \cup \dots \cup \sigma_r(\Delta^2)$, mientras $\partial c = \partial \sigma_1 + \dots + \partial \sigma_r$ cumple $\partial c(\Delta^1) = C$: en la suma orientada de los $\partial \sigma_i(\Delta^1)$, hay arcos de “fronteras internas” que se cancelan en pares mientras los otros arcos constituyen la frontera C de R con recorrido positivo. El lado izquierdo de (3.19) entonces es $\int_{\partial c} \alpha$ y la igualdad de los dos lados es un caso del teorema de Stokes. Nótese que ∂c es un 1-ciclo singular: su imagen $\partial c(\Delta^1) = C$ es la unión de una o varias curvas cerradas en V . Véase la Figura 3.3. \diamond

► El complejo $(C_\bullet(M, \mathbb{R}), \partial)$ de (3.14), determinado por las cadenas singulares reales y su operación de borde, puede compararse con el siguiente complejo, determinado por las formas diferenciales sobre M y la derivada exterior:

$$0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^k(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \dots \quad (3.20)$$

en vista de la propiedad $d \circ d = 0$ del Teorema 2.24. Desde luego, este complejo es *finito*, pues $\mathcal{A}^k(M) = \{0\}$ para $k > \dim M$.

Definición 3.33. Conviene introducir las notaciones siguientes para las k -formas cerradas y exactas, respectivamente:

$$Z_{\text{dR}}^k(M) := \{ \omega \in \mathcal{A}^k(M) : d\omega = 0 \}, \quad B_{\text{dR}}^k(M) := \{ d\eta : \eta \in \mathcal{A}^{k-1}(M) \}.$$

La relación $d(d\eta) = 0$ dice $B^k(M)$ es un subespacio \mathbb{R} -vectorial de $Z^k(M)$. El espacio \mathbb{R} -vectorial cociente $H_{\text{dR}}^k(M) := Z_{\text{dR}}^k(M) / B_{\text{dR}}^k(M)$ es el k -ésimo **grupo de cohomología de de Rham** de la variedad M .⁸ \diamond

⁸El subíndice ‘dR’ hace referencia al matemático suizo Georges de Rham.

Ejemplo 3.34. El Lema de Poincaré (la Proposición 2.43) muestra que $H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}^n) = 0$ para todo $k \geq 1$.

Fíjese que $B_{\text{dR}}^0(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ por definición, mientras $Z_{\text{dR}}^0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : df = 0\}$ consta de las *funciones constantes* (porque \mathbb{R}^n es conexo), así que $Z_{\text{dR}}^0(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}$. Por lo tanto, se obtiene

$$H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ \{0\} & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \quad \diamond$$

El contexto general algebraico es el siguiente. Dado un anillo conmutativo R , un juego de R -módulos $C^\bullet = \{C^k : k \in \mathbb{Z}\}$ junto con R -homomorfismos $d : C^k \rightarrow C^{k+1}$ tales que $d \circ d = 0 : C^k \rightarrow C^{k+2}$ se llama un **complejo de cocadenas**. Sus **cociclos** son $Z^k := \ker(d : C^k \rightarrow C^{k+1})$ y sus **cobordes** son $B^k := \text{im}(d : C^{k-1} \rightarrow C^k)$, de modo que $B^k \subseteq Z^k$. Los R -módulos $H^k := Z^k/B^k$ forman la **cohomología** del complejo C^\bullet .

Por ejemplo, defínase $C^k(M, \mathbb{R}) := C_k(M, \mathbb{R})^*$, el espacio \mathbb{R} -vectorial dual del espacio de k -cadenas singulares reales. Sea $d : C^k(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^{k+1}(M, \mathbb{R})$ la transpuesta de la aplicación lineal $\partial : C_{k+1}(M, \mathbb{R}) \rightarrow C_k(M, \mathbb{R})$. Entonces $(C^\bullet(M, \mathbb{R}), d)$ es un complejo de cocadenas, cuya cohomología es la **cohomología singular real** de M . Resulta que esta cohomología es *isomorfo* a la cohomología de de Rham de M .⁹

Definición 3.35. La integración sobre cadenas singulares define una forma \mathbb{R} -bilineal

$$(c, \omega) \mapsto \int_c \omega : C_k(M, \mathbb{R}) \times \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathbb{R}.$$

El teorema de Stokes demuestra que el resultado es cero en los siguientes dos casos:

- (a) Si $\omega \in Z_{\text{dR}}^k(M)$, entonces $\int_{\partial b} \omega = \int_b d\omega = 0$, para todo $b \in C_{k+1}(M, \mathbb{R})$. Por lo tanto, $\int_c \omega = 0$ toda vez que $\omega \in Z_{\text{dR}}^k(M)$ y $c \in B_k(M, \mathbb{R})$.
- (b) Si $c \in Z_k(M, \mathbb{R})$, entonces $\int_c d\eta = \int_{\partial c} \eta = 0$ para todo $\eta \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$. Por lo tanto, $\int_c \omega = 0$ toda vez que $\omega \in B_{\text{dR}}^k(M)$ y $c \in Z_k(M, \mathbb{R})$.

En consecuencia, si $(c, \omega) \in Z_k(M, \mathbb{R}) \times Z_{\text{dR}}^k(M)$, el valor $\int_c \omega$ depende solamente de las clases $[c] \in H_k(M, \mathbb{R})$ y $[\omega] \in H_{\text{dR}}^k(M)$. Se obtiene así una forma bilineal bien definida:

$$([c], [\omega]) \mapsto \int_c \omega : H_k(M, \mathbb{R}) \times H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.21)$$

⁹Este isomorfismo (y su expresión mediante el teorema de Stokes) fueron demostrados por de Rham en 1933. Para los detalles de este teorema y su prueba, consúltese el capítulo 5 del libro de Warner.

El teorema de de Rham asegura que esta forma bilineal es no degenerada. En consecuencia, induce un *isomorfismo lineal* entre $H_{\text{dR}}^k(M)$ y el espacio dual $H_k(M, \mathbb{R})^*$, para $k = 0, 1, \dots, \dim M$. En particular, vale $\dim_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^k(M) = \dim_{\mathbb{R}} H_k(M, \mathbb{R})^*$ para cada k . \diamond

Ejemplo 3.36. El círculo $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ tiene dimensión 1, así que $H_{\text{dR}}^k(\mathbb{S}^1) = \{0\}$ para $k \geq 2$.

Nótese que $H_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1) = Z_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1)$ porque $B_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1) = \{0\}$. Una 0-forma cerrada es una función suave $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $df = 0$; en una carta local (U, ϕ) con coordenada local θ , vale $df|_U = f'(\theta)d\theta = 0$, así que $f'(\theta) \equiv 0$ para $\theta \in \phi(U)$. Se deduce que la función f es localmente constante; de hecho, por ser \mathbb{S}^1 conexo, f es una función *constante*: $f \equiv c$ para algún $c \in \mathbb{R}$. Resulta entonces que $H_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$.

Por otro lado, \mathbb{S}^1 es orientable y posee una 1-forma que no se anula. En efecto, si $U := \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : x \neq 0\}$ y $V := \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y \neq 0\}$, se puede definir $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^1)$ por

$$\alpha|_U := \frac{1}{x} dy, \quad \alpha|_V := -\frac{1}{y} dx,$$

al notar que $dy/x + dx/y = d(x^2 + y^2)/(2xy) = 0$ en $U \cap V$. Entonces $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^1) = Z_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1)$ no se anula. Por otro lado, una función suave $g \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ alcanza un valor máximo en algún punto $p \in \mathbb{S}^1$, porque el círculo es compacto, lo cual implica que $dg_p = 0$. Luego α no puede ser exacta, así que $[\alpha] \neq 0$ en $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1)$.

En términos de las dos cartas locales del Ejemplo 1.12, se escribe $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ y se ve que $\alpha = d\theta$ en ambas cartas. Sin embargo, esta 1-forma $d\theta$ no es exacta, por cuanto θ no es una función bien definida de \mathbb{S}^1 en \mathbb{R} . [Una función $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ define un elemento de $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ si y solo si g es *periódica*: $g(t + 2\pi) \equiv g(t)$.] Si $W = \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$, entonces $\theta : W \rightarrow (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}$ sí está definida como coordenada local, y cualquier $\beta \in \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^1)$ cumple $\beta|_W = g(\theta)d\theta$ para alguna función suave g . Como $d\theta$ no se anula en \mathbb{S}^1 , se obtiene $\beta = g(\theta)d\theta$ donde $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ es suave y periódica, con período 2π .

Una integral sobre \mathbb{S}^1 no cambia si se quita un punto de su dominio, así que

$$\int_{\mathbb{S}^1} \alpha = \int_{\mathbb{S}^1} d\theta = \int_W d\theta = \int_W \theta^*(dt) = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi.$$

Luego, la aplicación \mathbb{R} -lineal $I : Z_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{R} : \beta \mapsto \int_{\mathbb{S}^1} \beta$ es sobreyectiva. Si $\beta \in \ker I$, entonces $\beta = g(\theta)d\theta$ donde $\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)d\theta = 0$. Considérese la integral indefinida de g ,

$$f(\theta) := \int_{-\pi}^{\theta} g(t) dt,$$

la cual es otra función periódica:

$$f(\theta + 2\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt + \int_{\pi}^{\theta+2\pi} g(t) dt = 0 + \int_{-\pi}^{\theta} g(t) dt = f(\theta),$$

de modo que $\beta = f'(\theta) d\theta = df$ con $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Se ha comprobado que $\ker I = B_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1)$. Al pasar al cociente, se obtiene un *isomorfismo* \mathbb{R} -lineal $\bar{I}: H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{R}$. Se ha mostrado que $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$, donde el isomorfismo está dado por (3.21) con un 1-ciclo c tal que $c(\Delta^1) = \mathbb{S}^1$. En resumen:

$$H_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1) \simeq H_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}, \quad H_{\text{dR}}^k(\mathbb{S}^1) = \{0\} \quad \text{para } k \geq 2. \quad \diamond$$

► La versión clásica del teorema de Stokes no hace referencia directa a integrales sobre cadenas o ciclos, sino que relaciona la integral de una forma diferencial sobre una porción de una superficie en \mathbb{R}^3 con otra integral sobre su curva de frontera. Para plantear esta versión en un contexto más general, conviene ampliar la definición del concepto de variedad diferencial.

Definición 3.37. El conjunto siguiente es un semiplano cerrado en \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{H}^n := \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}.$$

La topología de \mathbb{H}^n es su topología relativa como parte de \mathbb{R}^n . Se identifica \mathbb{R}^{n-1} con el hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^n : x^n = 0\}$, la *frontera* de \mathbb{H}^n en \mathbb{R}^n .

Una **variedad diferencial con borde** de dimensión n es un espacio topológico M , junto con un atlas de cartas locales $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ que cumple las Definiciones 1.6 y 1.7 de un atlas, con las siguientes dos modificaciones:

- ◊ cada $\phi_\alpha(U_\alpha)$ es un abierto de \mathbb{H}^n ;
- ◊ cada $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un abierto de \mathbb{H}^n .

Si A y B son abiertos en \mathbb{H}^n , hay abiertos U, V en \mathbb{R}^n tales que $A = U \cap \mathbb{H}^n, B = V \cap \mathbb{H}^n$. Una aplicación $f: A \rightarrow B$ es diferenciable [o suave] si es posible elegir U y V tales que $f = \tilde{f}|_A$ para alguna función diferenciable [respectivamente, suave] $\tilde{f}: U \rightarrow V$. Por la modificación correspondiente de la Definición 1.24, se define el concepto de aplicación suave entre dos variedades con borde.

Tómese $q \in M$ con $q \in U_\alpha \cap U_\beta$ tal que $\phi_\alpha(q) \in \mathbb{R}^{n-1}$; entonces $\phi_\beta(q) \in \mathbb{R}^{n-1}$ también, porque el difeomorfismo $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ lleva el abierto $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \setminus \mathbb{R}^{n-1}$ de \mathbb{R}^n en el interior de $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, y vice versa. Luego, la condición de que $\phi_\alpha(q) \in \mathbb{R}^{n-1}$ no depende de la

carta local (U_α, ϕ_α) ; la totalidad de tales puntos q constituye el **borde** de M , el cual se denota por ∂M .

Ahora $\phi_\alpha(U_\alpha \setminus \partial M) = \phi_\alpha(U_\alpha) \setminus \mathbb{R}^{n-1}$ es abierto en $\phi_\alpha(U_\alpha)$ para cada $\alpha \in A$, y por tanto $M \setminus \partial M$ es abierto en M ; Luego, ∂M es cerrado en M . El abierto $M \setminus \partial M$ es una variedad diferencial n -dimensional del tipo original; y el borde ∂M , dotado con el atlas $\mathfrak{A}' = \{(U_\alpha \cap \partial M, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M}) : \alpha \in A\}$, es una variedad diferencial (ordinaria, sin borde) de dimensión $(n - 1)$. \diamond

Ejemplo 3.38. La bola unitaria cerrada $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ es una variedad con borde, cuyo borde es $\partial \mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1}$. \diamond

Definición 3.39. Una variedad con borde M es **orientable** si M posee un atlas tal que todas sus funciones de transición (entre dos abiertos de \mathbb{H}^n) tienen jacobianos positivos. (Tales jacobianos no se anulan en la intersección de sus dominios con \mathbb{R}^{n-1} .) \diamond

Proposición 3.40. Si M es una variedad con borde orientable, entonces ∂M es también orientable; y la orientación de M induce una orientación en la variedad ordinaria ∂M .

Demostración. Tómesese dos cartas de M : (U, ϕ) con coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) y (V, ψ) con coordenadas locales (y^1, \dots, y^n) , donde el jacobiano de transición es positivo en $U \cap V$:

$$J(\psi \circ \phi^{-1}) = \det \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right] > 0.$$

Si $U \cap V \cap \partial M \neq \emptyset$, la aplicación $\psi \circ \phi^{-1}$ lleva $\phi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^{n-1}$ en $\psi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^{n-1}$. Esto implica que $y^n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) \equiv 0$. La derivada de $\psi \circ \phi^{-1}$ entonces tiene la matriz

$$D(\psi \circ \phi^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^{n-1}} & 0 \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^n} & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

cuya última entrada obedece

$$\frac{\partial y^n}{\partial x^n}(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{y^n(x^1, \dots, x^{n-1}, h) - y^n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)}{h} \geq 0,$$

porque $y^n(x_1, \dots, x_{n-1}, h) > 0$ para $h > 0$, por hipótesis. Esta derivada parcial no puede anularse, porque también se anularía el determinante de la matriz (3.22). Resulta entonces que $\frac{\partial y^n}{\partial x^n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) > 0$. La submatriz de las primeras $(n - 1)$ filas y columnas es entonces

$$J(\psi \circ \phi^{-1})|_{\phi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^{n-1}} = J(\psi \circ \phi^{-1}) \Big/ \frac{\partial y^n}{\partial x^n} > 0.$$

Este es el jacobiano de una función de transición del atlas \mathcal{A}' de ∂M cuyas cartas locales son $(U_\alpha \cap \partial M, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M})$, obtenido por restricción del atlas orientado de M . Se concluye que ∂M tiene un atlas con todos sus jacobiano de transición positivos; por la Proposición 3.5, ∂M es orientable. \square

Para evitar ciertos problemas de signo con el teorema de Stokes, conviene modificar la orientación sobre el borde ∂M de la siguiente manera.

Definición 3.41. Sea M una variedad con borde orientable. Un atlas \mathcal{A} sobre M con jacobianos de transición positivos determina una orientación sobre M . Si $\dim M = 2m$ es par, la **orientación inducida** sobre ∂M es la que está determinada por el atlas restringido \mathcal{A}' . En cambio, si $\dim M = 2m + 1$ es impar, la orientación inducida sobre ∂M es la opuesta a aquella dada por el atlas restringido \mathcal{A}' . \diamond

Los conceptos de *vectores tangentes*, *campos vectoriales* y *formas diferenciales* se extienden a las variedades con borde. Si (x^1, \dots, x^n) es un sistema de coordenadas locales en un vecindario de $p \in \partial M$, el vector tangente $\frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ se define como antes, así que $T_p M$ es un espacio vectorial n -dimensional. Un campo vectorial puede definirse como una sección suave del fibrado vectorial $TM \xrightarrow{\tau} M$; el espacio total TM es también una variedad con borde. Una k -forma diferencial puede definirse como una sección suave del fibrado vectorial $\Lambda^k T^*M \xrightarrow{\pi} M$. Si $j: \partial M \rightarrow M$ es la inclusión, y si $\eta \in \mathcal{A}^k(M)$, su imagen inversa $j^*\eta$ está definida y resulta ser una k -forma diferencial (ordinaria) sobre el borde ∂M .

Ejemplo 3.42. La variedad con borde \mathbb{H}^n tiene un atlas de una sola carta: sus coordenadas locales son las coordenadas cartesianas (x^1, \dots, x^n) de \mathbb{R}^n . Su orientación usual, heredada de \mathbb{R}^n , está dada por la forma de volumen $\nu = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Su borde es \mathbb{R}^{n-1} , con la sola carta de coordenadas cartesianas (x^1, \dots, x^{n-1}) . Por la regla de la Definición 3.41, la forma de volumen que da la orientación inducida es $\nu_0 := (-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$. \diamond

Si M es una variedad con borde orientada, de dimensión n , se puede definir la integral $\int_M \omega$ de una n -forma ω como en la Definición 3.15, con el uso de una partición de la unidad apropiada. Si (U, ϕ) es una carta local de M , la fórmula local (3.4) que dice que $\int_U \phi^* \omega_0 := \int_{\phi(U)} \omega_0$ sigue válida para variedades con borde, con la única modificación de que la región de integración múltiple $\phi(U)$ es ahora un abierto en \mathbb{H}^n . La positividad de los jacobianos de transición garantiza que esta definición no depende de la carta elegida.

Teorema 3.43 (Stokes, bis). *Sea M una variedad con borde, orientada y compacta; tómesese la orientación inducida sobre el borde ∂M . Si $\omega \in \mathcal{A}^{n-1}(M)$ y si $j: \partial M \rightarrow M$ es la inclusión, entonces*

$$\int_{\partial M} j^* \omega = \int_M d\omega. \tag{3.23}$$

Demostración (bosquejo). Con el uso de una partición de la unidad si fuera necesario, se puede suponer que ω se anula fuera del dominio U de una carta local (U, ϕ) del atlas que determina la orientación de M .

Entonces se puede suponer que $M = V \cap \mathbb{H}^n$ y $\partial M = V \cap \mathbb{R}^{n-1}$ para algún abierto V de \mathbb{R}^n ; y además, que hay un compacto K con $K \subset V \cap \mathbb{H}^n$ tal que ω se anula fuera de K .

Resulta posible cubrir el compacto K con una cantidad finita de imágenes de n -símplices singulares suaves $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ con las siguientes propiedades:

(a) Si $\sigma_i(\Delta^n) \cap \sigma_j(\Delta^n) \neq \emptyset$, esta intersección es una faceta común de σ_i y σ_j :

$$\sigma_i(\Delta^n) \cap \sigma_j(\Delta^n) = \sigma_i(\pm s_p^n(\Delta^{n-1})) = \sigma_j(\mp s_q^n(\Delta^{n-1})) \equiv \rho_{ij}(\Delta^{n-1}).$$

(b) Esta $\rho_{ij}(\Delta^{n-1})$ no es una faceta de otro σ_k y ocurre con signos opuestos en las cadenas $\partial \sigma_i$ y $\partial \sigma_j$.

(c) Si $c := \sigma_1 + \dots + \sigma_m$, entonces los símplices de ∂c (que no se cancelan en esta suma) tienen sus imágenes en $V \cap \mathbb{R}^{n-1}$, o bien en la parte de $V \cap \mathbb{H}^n$ donde ω se anula.

Entonces las integrales del enunciado se reducen a

$$\int_{\partial M} j^* \omega = \int_{\partial c} \omega \quad \text{y} \quad \int_M d\omega = \int_c d\omega.$$

Por lo tanto, la igualdad (3.23) sigue del Teorema 3.30. □

Corolario 3.44. *Sea M una variedad orientada y compacta (sin borde). Si $\omega \in \mathcal{A}^{n-1}(M)$, entonces $\int_M d\omega = 0$.* □

4 Conexiones y Curvatura

Los campos vectoriales y las formas diferenciales sobre una variedad diferencial M son *tensores*, una condición que puede formularse de dos modos equivalentes: (a) que ellos forman módulos sobre $C^\infty(M)$, lo cual garantiza su buen comportamiento local; o (b) que sus reglas de transformación bajo cambios de coordenadas locales involucran únicamente *derivadas de primer orden* de esas coordenadas. La velocidad de un movimiento a lo largo de una curva en M está dada por una sección del fibrado tangente sobre los puntos de la curva, y por tanto es de naturaleza tensorial; pero la *aceleración* de ese movimiento requiere el uso de derivadas de segundo orden. Para plantear el concepto de aceleración, se debe calcular la “derivada” de un campo vectorial (con respecto a otro); esto involucra la comparación de vectores tangentes en puntos distintos, lo cual exige una regla de comparación. El tema de este capítulo es la estructura suplementaria que permite plantear esa clase de derivadas.

4.1 Transporte paralelo y derivadas covariantes

Definición 4.1. Sea $\gamma: I \rightarrow M$ una curva suave. Una **regla de transporte paralelo sobre γ** es una familia de aplicaciones lineales invertibles

$$\{\Psi_{q,p}: T_p M \rightarrow T_q M : p, q \in \gamma(I)\}$$

tales que

$$\Psi_{r,p} = \Psi_{r,q} \circ \Psi_{q,p} \quad \text{para todo } p, q, r \in \gamma(I).$$

En particular, $\Psi_{p,p} = 1$ sobre $T_p M$; y $\Psi_{p,q} = \Psi_{q,p}^{-1}$.

Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice **paralelo a lo largo de γ** si $X_q = \Psi_{q,p}(X_p)$ para todo $p, q \in \gamma(I)$. \diamond

La transpuesta de la aplicación lineal $\Psi_{q,p}: T_p M \rightarrow T_q M$ es $\Psi_{q,p}^t: T_q^* M \rightarrow T_p^* M$. La aplicación lineal *contragradiente* $\Psi_{q,p}^{-t} = \Psi_{p,q}^t: T_p^* M \rightarrow T_q^* M$ define el transporte paralelo de covectores sobre γ . Nótese que $\langle \alpha_p, X_p \rangle = \langle \Psi_{q,p}^{-t} \alpha_p, \Psi_{q,p} X_p \rangle$: bajo estas reglas, el transporte paralelo conserva la evaluación de covectores sobre vectores.

Definición 4.2. Sea Ψ una regla de transporte paralelo a lo largo de una curva $\gamma: I \rightarrow M$ y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Si $t, t+h \in I$, escríbase $X(t) := X_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)} M$ y sea $X(t+h)_\parallel \in T_{\gamma(t)} M$ el traslado de $X(t+h)$ a $T_{\gamma(t)} M$, esto es,

$$X(t+h)_\parallel := \Psi_{\gamma(t), \gamma(t+h)}(X(t+h)).$$

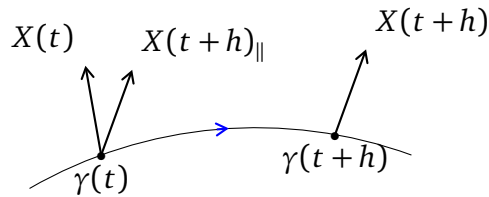


Figura 4.1: Transporte paralelo de vectores

La **derivada absoluta** de la función $t \mapsto X(t)$ en el punto $\gamma(t)$ se define así:

$$\frac{DX}{Dt}(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (X(t+h)_{\parallel} - X(t)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \Psi_{\gamma(t), \gamma(s)}(X(s)) \in T_{\gamma(t)}M. \quad (4.1)$$

Nótese que la diferencia $X(t+h) - X(t)$ no está definida, porque los dos vectores $X(t+h)$ y $X(t)$ pertenecen a espacios vectoriales diferentes (y disjuntos, en el espacio total TM). Es necesario transportar el vector $X(t+h)$ al espacio $T_{\gamma(t)}M$, en donde el límite de diferencias de vectores puede formularse. Véase la Figura 4.1. \diamond

Lema 4.3. Si $DX/Dt \equiv 0$ en el intervalo I , entonces el campo vectorial X es paralelo a lo largo de la curva γ .

Demostración. Se puede suponer que $I = (-a, a) \subseteq \mathbb{R}$. Si $p = \gamma(0)$, entonces

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \Psi_{p, \gamma(s)}(X(s)) = \Psi_{p, \gamma(t)} \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \Psi_{\gamma(t), \gamma(s)}(X(s)) = \Psi_{p, \gamma(t)} \left(\frac{DX}{Dt}(t) \right).$$

Luego, si $DX/Dt(t) = 0$ para $t \in I$, entonces la función $t \mapsto \Psi_{p, \gamma(t)}(X(t))$ es constante en T_pM , con $\Psi_{p, \gamma(t)}(X(t)) = X_p$ para $t \in I$. Esto dice que X es paralelo a lo largo de γ . \square

► Para convertir esta noción de paralelismo ligado a una curva específica en un concepto adecuado sobre variedades diferenciales, se debe exigir dos condiciones adicionales sobre la regla de transporte paralelo Ψ :

- (a) que el vector $(DY/Dt)|_p \in T_pM$ depende solamente del vector Y_p y no de la curva γ ;
- (b) que la correspondencia $Y_p \mapsto (DY/Dt)|_p$ sea un operador *lineal* sobre T_pM .

En tales circunstancias, dado un vector tangente $v \in T_pM$, se puede escribir

$$\nabla_v Y := \frac{DY}{Dt}(0),$$

cuyo lado derecho es la derivada absoluta a lo largo de cualquier curva γ tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = v$. Por la condición (b), la correspondencia $v \mapsto \nabla_v Y$ será lineal.

Ahora bien, si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces la correspondencia $X_p \mapsto \nabla_{X_p} Y$ (presumiblemente suave) determina un nuevo campo vectorial $\nabla_X Y$, que podría llamarse “la derivada covariante de Y a lo largo de X ”. Todas estas consideraciones conducen a la definición siguiente.

Definición 4.4. Una **conexión afín**¹ sobre una variedad diferencial M es una aplicación \mathbb{R} -bilineal

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

que cumple las siguientes dos propiedades:

- (a) $C^\infty(M)$ -linealidad en X : $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ para todo $f \in C^\infty(M)$.
- (b) Regla de Leibniz en Y :

$$\nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + (Xf)Y \quad \text{para todo } f \in C^\infty(M).$$

El operador \mathbb{R} -lineal $\nabla_X : Y \mapsto \nabla_X Y$ sobre $\mathfrak{X}(M)$ se llama la **derivación covariante** con respecto a X determinada por la conexión afín ∇ . \diamond

Definición 4.5. Dada una conexión afín ∇ sobre una variedad M y una curva suave $\gamma : I \rightarrow M$, la **derivada covariante** de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ a lo largo de γ se define como

$$\frac{DX}{Dt}(t) := \nabla_{\dot{\gamma}(t)} X.$$

La curva γ se llama una **geodésica** con respecto a ∇ si el campo restringido $\dot{\gamma} \in \mathfrak{X}(M)|_{\gamma(I)}$ es paralelo a lo largo de la propia γ . \diamond

Ahora se debe abordar la cuestión de la *existencia* de conexiones afines en general. Conviene empezar por la expresión local de una conexión afín. Si (U, ϕ) es una carta local de M , con coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) , es útil abreviar $\partial_j \equiv \partial / \partial x^j$, de modo que $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ sea una base del $C^\infty(U)$ -módulo $\mathfrak{X}(M)|_U$. Por las propiedades (a) y (b) de la Definición 4.4, basta considerar el caso en donde $X, Y \in \{\partial_1, \dots, \partial_n\}$. Entonces

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (4.2)$$

para ciertas funciones suaves $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$: estos son los **símbolos de Christoffel** de la conexión afín ∇ .

¹Algunos autores lo llaman una *conexión lineal*.

Si (V, ψ) es otra carta local de M con coordenadas locales (y^1, \dots, y^n) y campos locales $\tilde{\partial}_r \equiv \partial/\partial y^r$, se obtiene de igual manera

$$\nabla_{\tilde{\partial}_r} \tilde{\partial}_s = \tilde{\Gamma}_{rs}^t \tilde{\partial}_t$$

y es fácil verificar la siguiente regla de cambio de variables:

$$\tilde{\Gamma}_{rs}^t = \frac{\partial x^i}{\partial y^r} \frac{\partial x^j}{\partial y^s} \frac{\partial y^t}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^r \partial y^s} \frac{\partial y^t}{\partial x^l}. \quad (4.3)$$

La presencia de las derivadas de segundo orden indican que los Γ_{ij}^k no son componentes de un tensor.

Una conexión afín está determinada, en principio, por juegos de n^3 funciones Γ_{ij}^k definidos en cada carta local si ellas cumplen la regla de cambio (4.3) en las intersecciones de cartas. Ahora bien: si ∇' es otra conexión afín sobre M con símbolos de Christoffel $\Gamma_{ij}^{\prime k}$, las *diferencias* $C_{ij}^k := \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ij}^{\prime k}$ obedecen una regla de cambio más sencilla:

$$\tilde{C}_{rs}^t = \frac{\partial x^i}{\partial y^r} \frac{\partial x^j}{\partial y^s} \frac{\partial y^t}{\partial x^k} C_{ij}^k,$$

lo cual implica que $\nabla - \nabla'$ es un *tensor mixto* de bigrado $(2, 1)$ en la terminología de la Definición 2.12. De hecho, si $S(X, Y, \alpha) := \langle \alpha, \nabla_X Y - \nabla'_X Y \rangle$ para $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$, es una consecuencia directa de la Definición 4.4 que S es $C^\infty(M)$ -trilineal.

Basta, entonces, hallar *una sola conexión* ∇' sobre una determinada variedad M ; las otras ∇ difieren de la primera por ciertos tensores.

Lema 4.6. *Dada una conexión afín sobre M , una curva suave $\gamma: I \rightarrow M$ resulta ser una geodésica con respecto a ∇ si y solo si sus componentes $\gamma^k := x^k \circ \gamma$ en cada carta local cumple el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden:*

$$\frac{d^2 \gamma^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} = 0. \quad (4.4)$$

En consecuencia, para cada punto inicial $p = \gamma(0)$ y velocidad inicial $v = \dot{\gamma}(0)$, hay una única geodésica con respecto a ∇ , definida en un intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I$.

Demostración. Se puede suponer que M posee una sola carta local. Para $f \in C^\infty(M)$,

$$\langle \dot{\gamma}(t), f \rangle = (f \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{d\gamma^i}{dt}(t), \quad \text{así que} \quad \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

En vista de (4.2), se obtiene

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \partial_j = \dot{\gamma}^i(t) \nabla_{\partial_i} \partial_j = \dot{\gamma}^i(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \partial_k.$$

Denotando por $\dot{\gamma} \in \mathfrak{X}(M)|_{\gamma(t)}$ la función $t \mapsto \dot{\gamma}(t)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} &= \nabla_{\dot{\gamma}} \left(\frac{d\gamma^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \dot{\gamma} \left(\frac{d\gamma^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{d\gamma^j}{dt} \nabla_{\dot{\gamma}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \left(\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.\end{aligned}$$

La curva es una geodésica con respecto a ∇ si y solo si $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$, de donde las ecuaciones (4.4) son inmediatas.

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden (4.4) poseen una solución única – definida en algún intervalo abierto centrado en $t = 0$ – si se fijan las condiciones iniciales para los $\gamma^j(0)$ y sus derivadas $\dot{\gamma}^j(0)$; en otras palabras, si se asignan el punto $\gamma(0) \in M$ y el vector tangente $\dot{\gamma}(0) \in T_{\gamma(0)}M$. \square

► Los campos vectoriales en $\mathfrak{X}(M)$ son secciones suaves del fibrado tangente $TM \xrightarrow{\tau} M$; es decir, $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(M, TM)$ como $C^\infty(M)$ -módulos. Esta observación permite ampliar la clase de conexiones a aquellas que actúan sobre secciones de otros fibrados vectoriales con base M .

Definición 4.7. Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial. Una **conexión**² (o *conexión de Koszul*)³ en este fibrado es una aplicación \mathbb{R} -bilineal

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E) : (X, s) \mapsto \nabla_X s$$

que cumple las siguientes dos propiedades:

(a) $C^\infty(M)$ -linealidad en X : $\nabla_{fX} s = f \nabla_X s$ para todo $f \in C^\infty(M)$.

(b) Regla de Leibniz en s :

$$\nabla_X (fs) = f \nabla_X s + (Xf)s \quad \text{para todo } f \in C^\infty(M).$$

En consonancia con la Definición 4.4, el operador \mathbb{R} -lineal $\nabla_X : s \mapsto \nabla_X s$ sobre $\Gamma(M, E)$ se llama *derivación covariante* con respecto a X . \diamond

²El término *conexión afín* está reservado para el caso particular $E = TM$, en donde $\Gamma(M, E) = \mathfrak{X}(M)$.

³La teoría general de conexiones en fibrados vectoriales tiene su origen en una famosa tesis doctoral: Jean-Louis Koszul, “Homologie et cohomologie des algèbres de Lie”, *Bulletin de la Société Mathématique de France* **78** (1950), 65–127.

Ejemplo 4.8. Una función suave $g \in C^\infty(M)$ es una sección suave del fibrado trivial $M \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{pr}_1} M$. La evaluación $(X, g) \mapsto Xg$ de campos vectoriales en funciones, que cumple la regla de Leibniz $X(fg) = f(Xg) + (Xf)g$, es una conexión en este fibrado trivial.

Dada una conexión afín ∇ sobre M , se puede definir su **conexión dual** ∇' en el fibrado cotangente $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ – una aplicación \mathbb{R} -bilineal $\nabla': \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{A}^1(M) \rightarrow \mathcal{A}^1(M)$ – al demandar esta regla de Leibniz sobre evaluaciones:

$$X(\langle \alpha, Y \rangle) = \langle \nabla'_X \alpha, Y \rangle + \langle \alpha, \nabla_X Y \rangle. \tag{4.5}$$

En una carta local de M , la igualdad $\langle dx^k, \partial_j \rangle \equiv 1$ y la fórmula local (4.2) para ∇ implican una fórmula local correspondiente para ∇' :

$$\nabla_{\partial_i} dx^k = -\Gamma_{ij}^k dx^j \quad (i, k = 1, \dots, n). \quad \diamond$$

► Conviene considerar una conexión ∇ como una operación *lineal* en vez de bilineal, mediante un producto tensorial apropiado. Si $E \xrightarrow{\pi} M$ es un fibrado vectorial, se denota

$$\mathcal{A}^k(M, E) \equiv \mathcal{A}^k(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(M, E),$$

para el $C^\infty(M)$ -módulo cuyos elementos se llaman **k-formas con valores en E** . [La notación $\otimes_{C^\infty(M)}$ indica que $f\omega \otimes s = \omega \otimes fs$ para todo $f \in C^\infty(M)$.] Si ∇ es una conexión en este fibrado y si $s \in \Gamma(M, E)$, se denota por ∇s el elemento de $\mathcal{A}^1(M, E)$ tal que $\langle \nabla s, X \rangle = \nabla_X s$. De esta manera, se obtiene una aplicación \mathbb{R} -lineal

$$\nabla: \Gamma(M, E) \rightarrow \mathcal{A}^1(M, E) : s \mapsto \nabla s. \tag{4.6}$$

La regla de Leibniz para ∇ se expresa en la siguiente forma:

$$\nabla(fs) = f \nabla s + df \otimes s \quad \text{para todo } f \in C^\infty(M), s \in \Gamma(M, E).$$

4.2 Métricas riemannianas

Definición 4.9. Una **métrica riemanniana** sobre M es un 2-tensor covariante⁴

$$g: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

que es *simétrica* y *definida positiva*:

$$g(X, Y) = g(Y, X), \quad \text{con } g(X, X) > 0, \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

⁴La palabra *métrica* empleada aquí difiere de su uso en topología, donde denota una función simétrica y positiva de dos variables que cumple la desigualdad triangular. Por ahora, se puede llamar *distancia* a ese concepto topológico. Resulta que cada métrica riemanniana determina una distancia.

(Se escribe $f > 0$ en $C^\infty(M)$ si $f(p) > 0$ en \mathbb{R} para cada $p \in M$.) En consonancia con la Proposición 2.2, el valor $g(X, Y)(p)$ depende solamente de los vectores $X_p, Y_p \in T_p M$; y la evaluación

$$g_p(X_p, Y_p) := g(X, Y)(p)$$

define una forma \mathbb{R} -bilineal simétrica y definida positiva g_p ; en otras palabras, cada g_p es un *producto escalar real* sobre $T_p M$ (el cual depende suavemente de p). \diamond

Si E es un espacio \mathbb{R} -vectorial finitodimensional, un producto escalar $(\cdot | \cdot)$ sobre E define un par de isomorfismo entre E y su espacio dual E^* . Si $u \in E$ y $\xi \in E^*$, se identifica u con la forma lineal $v \mapsto (u | v)$ en E^* ; y se idéntica ξ con el vector $x \in E$ tal que $\xi(v) \equiv (x | v)$. De esta manera, una métrica riemanniana define isomorfismos $T_p M \simeq T_p^* M$ para cada $p \in M$; su efecto sobre las secciones de estos fibrados vectoriales permite cambiar campos vectoriales con 1-formas, como sigue.

Definición 4.10. Una **variedad riemanniana** es un binomio (M, g) formado por una variedad diferencial M y una métrica riemanniana sobre M . Sobre ella, se define un par de **isomorfismos musicales** de $C^\infty(M)$ -módulos: $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{A}^1(M) : X \mapsto X^\flat$ e inversamente $\mathcal{A}^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) : \alpha \mapsto \alpha^\sharp$, dados por:

$$X^\flat(Y) := g(X, Y), \quad g(\alpha^\sharp, Y) := \alpha(Y).$$

Estos isomorfismos permiten expresar la métrica como un aparejamiento de 1-formas, así:

$$g^{-1}(\alpha, \beta) := g(\alpha^\sharp, \beta^\sharp), \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathcal{A}^1(M). \quad \diamond$$

En coordenadas locales en una carta (U, ϕ) de M , se puede identificar $g|_U$ con la *matriz de funciones* $[g_{ij}] \in M_n(C^\infty(U))$ y $g^{-1}|_U$ con su matriz inversa $[g^{rs}]$, cuyas entradas se definen por

$$g_{ij} := g(\partial_i, \partial_j); \quad g^{rs} := g^{-1}(dx^r, dx^s).$$

De este modo, si $X|_U = f^i \partial_i$, $Y|_U = h^j \partial_j$, $\alpha|_U = a_r dx^r$, $\beta|_U = b_s dx^s$, entonces

$$g(X, Y) = g_{ij} f^i h^j \quad \text{y} \quad g^{-1}(\alpha, \beta) = g^{rs} a_r b_s$$

en el dominio U de la carta local.

Definición 4.11. Una **isometría** entre dos variedades riemannianas (M, g) y (N, h) es un difeomorfismo $\tau: M \rightarrow N$ tal que $\tau^* h = g$, lo cual es equivalente a la condición $h(\tau_* X, \tau_* Y) = g(X, Y)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. \diamond

Definición 4.12. Dícese que una *conexión afín* ∇ sobre M es **compatible con la métrica** g si su transporte paralelo es isométrico, es decir,

$$g_q(\Psi_{q,p}X_p, \Psi_{q,p}Y_p) = g_p(X_p, Y_p)$$

para cada par de puntos $p, q \in M$ conectadas por una curva en M . Esto ocurre si y solo si $\frac{d}{dt}g(X, Y) = 0$ toda vez que X y Y son paralelos a lo largo de una curva γ en M . Con la ayuda de la fórmula (4.1) para la derivada absoluta a lo largo de γ , se obtiene la condición

$$\frac{d}{dt}g(X, Y) = g\left(\frac{DX}{Dt}, Y\right) + g\left(X, \frac{DY}{Dt}\right) \quad \text{a lo largo de } \gamma;$$

o bien

$$\frac{d}{dt}g(X, Y)(\gamma(t)) = g(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}X, Y) + g(X, \nabla_{\dot{\gamma}(t)}Y) \quad \text{para } t \in I.$$

El lado izquierdo es $\dot{\gamma}(t)f$ para la función $f(p) := g(X, Y)(p)$. Si Z es un campo vectorial cuya restricción a $\gamma(I)$ es $\dot{\gamma}$, la condición de compatibilidad entre ∇ y g se puede resumir en la siguiente fórmula:

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \quad \text{para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (4.7)$$

Alternativamente, en términos del operador ∇ de (4.6):

$$d(g(X, Y)) = g(\nabla X, Y) + g(X, \nabla Y). \quad \diamond$$

Lema 4.13. Sea ∇ una *conexión* sobre una *variedad diferencial* M . La *receta*

$$T_{\nabla}(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (4.8)$$

define un 2-tensor $T_{\nabla}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, llamado la **torsión** de la *conexión* ∇ . En otros términos, $(X, Y, \alpha) \mapsto \langle \alpha, T_{\nabla}(X, Y) \rangle$ es un tensor de bigrado $(2, 1)$ sobre M .

Demostración. Se debe mostrar que T_{∇} es $C^\infty(M)$ -bilineal. Como T_{∇} es \mathbb{R} -bilineal y obviamente antisimétrico en sus argumentos, basta verificar que $T_{\nabla}(fX, Y) := fT_{\nabla}(X, Y)$ para $f \in C^\infty(M)$.

Recuérdese que $[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X$ (véase la Proposición 2.26). Por lo tanto, vale

$$\begin{aligned} T_{\nabla}(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX, Y] \\ &= f \nabla_X Y - f \nabla_Y X - (Yf)X - f[X, Y] + (Yf)X = f T_{\nabla}(X, Y), \end{aligned}$$

al usar las dos propiedades (a) y (b) de una *conexión*. □

En coordenadas locales, la torsión queda determinada por

$$T_{\nabla}(\partial_i, \partial_j) = \nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i - [\partial_i, \partial_j] = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k.$$

Luego $T_{\nabla} = 0$ (dícese que ∇ es **libre de torsión**) si y solo si los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k de cada carta local son *simétricos* en los índices inferiores i, j ; es decir, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Proposición 4.14. *Sobre una variedad riemanniana (M, g) , existe una única conexión afín ∇^g que es compatible con la métrica g y libre de torsión: cumple (4.7) y además satisface $\nabla_X^g Y - \nabla_Y^g X = [X, Y]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demostración. Para comprobar la unicidad, nótese que una conexión ∇^g que es compatible con la métrica g debe cumplir, por (4.7):

$$\begin{aligned} Z g(X, Y) &= g(\nabla_Z^g X, Y) + g(X, \nabla_Z^g Y), \\ Y g(Z, X) &= g(\nabla_Y^g Z, X) + g(Z, \nabla_Y^g X), \\ X g(Y, Z) &= g(\nabla_X^g Y, Z) + g(Y, \nabla_X^g Z). \end{aligned}$$

Si además ∇^g es libre de torsión, se obtiene

$$\begin{aligned} X g(Y, Z) + Y g(Z, X) - Z g(X, Y) \\ &= g(\nabla_X^g Y + \nabla_Y^g X, Z) + g(\nabla_Y^g Z - \nabla_Z^g Y, X) - g(\nabla_Z^g X - \nabla_X^g Z, Y) \\ &= g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) - g([X, Y], Z) + 2g(\nabla_X^g Y, Z). \end{aligned} \quad (4.9)$$

En consecuencia, la cantidad $g(\nabla_X^g Y, Z)$ está determinada por la métrica g y el corchete de $\mathfrak{X}(M)$. Como g es definida positiva (así que cada g_p es una forma bilineal definida positiva – y por ende no degenerada – sobre $T_p M$), el campo vectorial $\nabla_X^g Y$ queda determinado para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Se ha comprobado la *unicidad* de la conexión ∇^g .

Para su existencia, considérese la receta sugerida por (4.9):

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^g Y, Z) := \frac{1}{2} \{ &X g(Y, Z) + Y g(Z, X) - Z g(X, Y) \\ &- g([Y, Z], X) - g([X, Z], Y) + g([X, Y], Z) \}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Es fácil comprobar que el lado derecho de (4.10) es $C^\infty(M)$ -lineal en X y en Z , por lo cual define una aplicación \mathbb{R} -bilineal $(X, Y) \mapsto \nabla_X^g Y$ sobre $\mathfrak{X}(M)$ que es $C^\infty(M)$ -lineal en X . Es también fácil chequear que esta operación cumple la regla de Leibniz en Y ; en resumen, ∇^g es una conexión afín. En vista de (4.9), un cálculo rutinario comprueba que ∇^g es efectivamente compatible con g y libre de torsión. \square

Definición 4.15. La conexión afín ∇^g sobre una variedad riemanniana (M, g) determinada por (4.10) se llama la **conexión de Levi-Civita** sobre M asociada a la métrica g .

(Después de fijar una métrica, se puede abreviar $\nabla = \nabla^g$.) ◇

Lema 4.16. En una carta local de una variedad riemanniana (M, g) , los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita están dados por:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \quad (4.11)$$

Demostración. Si (U, ϕ) es una carta local de M , la restricción $g|_U$ es una métrica sobre la subvariedad U . La condición de compatibilidad (4.7), aplicada a los campos locales $X|_U = \partial_i, Y|_U = \partial_j, Z|_U = \partial_l$ da la fórmula

$$\partial_l g_{ij} = g_{jm} \Gamma_{li}^m + g_{im} \Gamma_{lj}^m.$$

Como los campos locales $\partial_i, \partial_j, \partial_l$ conmutan (es decir, el corchete de dos de ellos es cero) la fórmula (4.9) se reduce a

$$\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} = 2 g_{lm} \Gamma_{ij}^m.$$

Para i, j fijos, esta es una igualdad entre dos vectores de columna con índice l . Al multiplicar ambos lados por la matriz $\frac{1}{2}[g^{rs}]$ y al notar que $g^{kl} g_{lm} = \delta_m^k \equiv \llbracket k=m \rrbracket$, se obtiene la igualdad deseada (4.11). □

Ejemplo 4.17. Considérese la esfera \mathbb{S}^2 con el atlas de dos cartas locales definido en el Ejemplo 1.13: $U := \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\}$ y $V := \mathbb{S}^2 \setminus \{-e_3\}$. Se puede usar las coordenadas locales⁵

$$(x, y) := \left(\frac{x^1}{1-x^3}, \frac{-x^2}{1-x^3} \right) \text{ en } U, \quad (x, y) := \left(\frac{x^1}{1+x^3}, \frac{x^2}{1+x^3} \right) \text{ en } V.$$

Si se introduce coordenadas complejas⁶ $z = x + iy$, de modo que $z = (x^1 + ix^2)/(1 - x^3)$ en U ; y $\zeta := x + iy$, así que $\zeta = (x^1 + ix^2)/(1 + x^3)$ en V ; su relación con las las coordenadas esféricas usuales es: $z = e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$ en U , mientras $\zeta = e^{+i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ en V . Nótese que $\zeta = 1/z$ en $U \cap V$.

La **métrica redonda** (llamada así porque es invariante bajo el grupo de rotaciones $SO(3)$ de la esfera) se define el siguiente 2-tensor covariante simétrica:

$$g = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2 = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} (dx^2 + dy^2). \quad (4.12)$$

⁵Los signos de la segunda variable están elegidos de tal manera que el jacobiano de transición sea positivo en $U \cap V$.

⁶Al considerar el codominio \mathbb{R}^2 de las cartas locales como el plano complejo \mathbb{C} , se puede considerar \mathbb{S}^2 como la **esfera de Riemann** $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la compactificación de un punto del plano complejo. El punto fuera del dominio de la carta local es $z = \infty$ para U , $\zeta = \infty$ para V .

(Estas fórmulas son singulares en los polos $\pm e_3$, pero se puede usar la invariancia rotacional para extender el dominio de g para incluirlos.) La segunda expresión para g puede usarse para cualquiera de las dos cartas locales.

Escríbese $q := 1 + x^2 + y^2$, de modo que $g = 4q^{-2}(dx^2 + dy^2)$. Los componentes de g son $g_{ij} = 4q^{-2} \delta_{ij}$; la matriz inversa tiene componentes $g^{kl} = \frac{1}{4}q^2 \delta^{kl}$.

Al redefinir $(x^1, x^2) \equiv (x, y)$ como coordenadas locales (en vez de coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^3), se calcula enseguida que $\partial_l g_{ij} = -16x^l q^{-3} \delta_{ij}$. Los símbolos de Christoffel siguen directamente de (4.11):

$$\Gamma_{ij}^k = -\frac{2}{q} (x^i \delta_j^k + x^j \delta_i^k - x^k \delta_{ij}). \quad \diamond$$

► Una métrica riemanniana g sobre una variedad M define productos escalares g_p en $T_p M$ y g_p^{-1} en $T_p^* M$, para cada $p \in M$. Dos vectores $u, v \in T_p M$ son ortogonales si $g_p(u, v) = 0$; dos covectores $\xi, \eta \in T_p^* M$ son ortogonales si $g_p^{-1}(\xi, \eta) = 0$. En general, no es posible “globalizar” estos conceptos a toda la variedad M , pero al menos definen estructuras euclidianas en cada carta local.

Definición 4.18. Dos campos vectoriales X, Y sobre una variedad riemanniana (M, g) son ortogonales si $g(X, Y) = 0$; el campo X está normalizado si $g(X, X) = 1$.

En un carta local (U, ϕ) de M , una **base ortonormal local** (o *vielbein*) de campos vectoriales⁷ es una familia $\{E_1, \dots, E_n\}$ – donde $n = \dim M$ – de campos vectoriales locales en $\mathfrak{X}(U)$ tales que $g(E_\mu, E_\nu) = \delta_{\mu\nu}$ para $\mu, \nu = 1, \dots, n$. De igual manera, una base ortonormal local de 1-formas es otra familia $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ de 1-formas locales en $\mathcal{A}^1(U)$ tales que $g^{-1}(\theta^\mu, \theta^\nu) = \delta^{\mu\nu}$ para $\mu, \nu = 1, \dots, n$.

Para la existencia de estas familias, es suficiente factorizar la matriz $G = [g_{ij}]$, la cual es una función suave $G: U \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ cuyos valores son matrices definidas positivas, en la forma $G = H^t H$ donde $H = [h_j^\mu]$ es otra función matricial suave.⁸ Sea $H^{-1} = [\tilde{h}_\nu^r]$ su matriz inversa; entonces

$$h_i^\mu \delta_{\mu\nu} h_j^\nu = g_{ij}, \quad \tilde{h}_\mu^r \delta^{\mu\nu} \tilde{h}_\nu^s = g^{rs}.$$

Las bases ortonormales locales entonces se definen por

$$E_\mu := \tilde{h}_\mu^r \partial_r, \quad \theta^\nu := h_k^\nu dx^k. \quad \diamond$$

⁷Se acostumbra etiquetar las campos y formas locales con índices latinos: ∂_j, dx^k , etc., y los vielbein con índices griegos: E_μ, θ^ν , etc. La palabra alemana *vielbein* (plural *vielbeine*) significa “muchas patas”; si $n = 4$ se habla de *vierbein*; y si $n = 2$, de *zweibein*.

⁸Siempre hay una solución *continua* a la ecuación $H^t H = G$, porque una matriz definida positiva G_0 posee al menos una “raíz cuadrada” $H_0 = H_0^t$ que sea también definida positiva, y la receta $G_0 \mapsto H_0$ está dada por un límite $p_n(G_0) \rightarrow H_0$ donde los p_n son polinomios tales que $p_n(t) \rightarrow \sqrt{t}$ uniformemente sobre un intervalo $[0, t_0]$. Una solución *suave* no está garantizada, pero existe en muchos casos.

Ejemplo 4.19. En el dominio de carta $U := \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\}$ de la esfera bidimensional, la matriz de g es diagonal, $g_{ij} = 4q^{-2} \delta_{ij}$; tiene una raíz cuadrada diagonal dada por $h_j^\mu := 2q^{-1} \delta_j^\mu$. Entonces las bases ortonormales locales son

$$E_1 := \frac{q}{2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad E_2 := \frac{q}{2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \theta^1 := \frac{2}{q} dx, \quad \theta^2 := \frac{2}{q} dy. \quad \diamond$$

Si la variedad riemanniana (M, g) es también orientable, tienen una forma de volumen dada localmente por

$$\nu_g|_U = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \cdots \wedge \theta^n.$$

Esta forma de volumen cumple $\nu_g(E_1, E_2, \dots, E_n) = 1$ en U toda vez que el orden de (E_1, \dots, E_n) sea compatible con la orientación. Como $\det g \equiv \det [g_{ij}] > 0$, la expresión local para la **forma de volumen riemanniana** ν_g es

$$\nu_g|_U = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

En particular, sobre \mathbb{S}^2 la *forma de área* está dada en coordenadas locales o esféricas por

$$\sigma = 4q^{-2} dx \wedge dy = \sin \theta d\theta \wedge d\phi.$$

4.3 Tensores de curvatura

Si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ son tres campos vectoriales sobre una variedad afín y si ∇ es una conexión afín sobre M , entonces $\nabla_Y Z$ es otro campo vectorial y se puede considerar su derivada covariante con respecto a X , la cual es $\nabla_X \nabla_Y Z \in \mathfrak{X}(M)$. La expresión local de esta última cantidad tiene derivadas de segundo orden; se busca alguna variante de $\nabla_X \nabla_Y Z$ que tenga un aspecto tensorial. Resulta que hay una manera astuta de antisimetrizar la segunda derivada covariante, como se ve a continuación.

Definición 4.20. Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial sobre una variedad M . Denótese por $\text{End } E \xrightarrow{\Pi} M$ el fibrado vectorial cuya fibra en $x \in M$ es la \mathbb{R} -álgebra de **endomorfismos \mathbb{R} -lineales** $(\text{End } E)_x := \text{End}_{\mathbb{R}}(E_x)$; esto es, la totalidad de operadores \mathbb{R} -lineales sobre el espacio vectorial E_x . Si $F \simeq \mathbb{R}^k$ es la fibra típica de E , entonces $\text{End}_{\mathbb{R}} F \simeq M_k(\mathbb{R})$ es la fibra típica de $\text{End } E$. A cada trivialización local $\psi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ del fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$, le corresponde una trivialización local $\Psi: \Pi^{-1}(U) \rightarrow U \times M_k(\mathbb{R})$ del fibrado $\text{End } E \xrightarrow{\Pi} M$, dada por $\Psi^{-1}(x, A)[\psi^{-1}(x, v)] := \psi^{-1}(x, Av)$.

Las secciones suaves $\Gamma(M, \text{End } E)$ forman una $C^\infty(M)$ -álgebra que actúa sobre el $C^\infty(M)$ -módulo $\Gamma(M, E)$ fibra por fibra; es decir, si $A \in \Gamma(M, \text{End } E)$ y $s \in \Gamma(M, E)$, entonces $A \cdot s \in \Gamma(M, E)$ se define por $(A \cdot s)_x := A_x(s_x)$.

En particular, $\text{End}(\mathfrak{X}(M)) \equiv \Gamma(M, \text{End } TM)$ es el álgebra de operadores $C^\infty(M)$ -lineales sobre los campos vectoriales $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(M, TM)$. \diamond

Definición 4.21. Sea ∇ una conexión afín sobre una variedad M . Defínase una aplicación \mathbb{R} -bilineal $R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{End}(\mathfrak{X}(M))$ por la fórmula:

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (4.13)$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Este R es el **operador de curvatura** de la conexión ∇ . \diamond

Lema 4.22. La expresión $R(X, Y)Z$ es $C^\infty(M)$ -lineal en las tres variables X, Y, Z .

Demostración. Es evidente que $R(Y, X)Z = -R(X, Y)Z$; basta verificar la $C^\infty(M)$ -linealidad en X y Z . Si $f, h \in C^\infty(M)$, se obtiene

$$\begin{aligned} R(fX, Y)Z &= f \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y (f \nabla_X Z) - \nabla_{[fX, Y]} Z \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z - Y(f) \nabla_X Z - f \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_{Y(f)X} Z \\ &= f R(X, Y)Z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(X, Y)(hZ) &= \nabla_X (h \nabla_Y Z + (Yh)Z) - \nabla_Y (h \nabla_X Z + (Xh)Z) - h \nabla_{[X, Y]} Z - [X, Y](h)Z \\ &= h R(X, Y)Z + (Xh) \nabla_Y Z + (Yh) \nabla_X Z + X(Y(h))Z \\ &\quad - (Yh) \nabla_X Z - (Xh) \nabla_Y Z - Y(X(h))Z - [X, Y](h)Z \\ &= h R(X, Y)Z + (X(Y(h)) - Y(X(h)) - [X, Y](h))Z \\ &= h R(X, Y)Z. \end{aligned} \quad \square$$

Corolario 4.23. Para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$, la correspondencia

$$(X, Y, Z, \alpha) \mapsto \langle \alpha, R(X, Y)Z \rangle \quad (4.14)$$

es un tensor mixto de bigrado $(3, 1)$, llamado el **tensor de curvatura** de la conexión ∇ . \square

Para conexiones más generales sobre fibrados $E \xrightarrow{\pi} M$ (no necesariamente el fibrado tangente) se puede definir un operador de curvatura de ∇ , con valores en $\Gamma(M, \text{End } E)$, por la generalización directa de (4.13):

$$R(X, Y)s := \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s \quad \text{para } s \in \Gamma(M, E).$$

La demostración del Lema 4.22, con la única modificación $Z \mapsto s$, dice que $R(X, Y)(hs) = hR(X, Y)s$ para todo $h \in C^\infty(M)$, así que $R(X, Y)$ es efectivamente un operador $C^\infty(M)$ -lineal sobre $\Gamma(M, E)$. La antisimetría y la $C^\infty(M)$ -bilinealidad en (X, Y) muestran que R es una 2-forma con valores en $\text{End } E$, es decir:

$$R \in \mathcal{A}^2(M, \text{End } E).$$

► Por otro lado, el tensor (4.14) es antisimétrica en $X \leftrightarrow Y$, pero no en $X \leftrightarrow Z$ ni en $Y \leftrightarrow Z$. Entonces este tensor *no es una 3-forma* con valores en TM . Sin embargo, el caso especial de la conexión de Levi-Civita asociado con una métrica sí posee una amplia gama de simetrías.

Definición 4.24. La curvatura de la conexión de Levi-Civita ∇^g de una variedad riemanniana (M, g) , la cual es una 2-forma con valores matriciales, $R \in \mathcal{A}^2(M, \text{End } TM)$, se llama la **curvatura riemanniana** de (M, g) . \diamond

Proposición 4.25. La curvatura riemanniana de una variedad riemanniana (M, g) cumple cuatro relaciones de simetría: si $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

- (a) $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$;
- (b) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$: la **identidad de Bianchi**;
- (c) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$;
- (d) $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$.

Demostración. Ad (a): Esta la mencionada antisimetría en $X \leftrightarrow Y$, evidente de la fórmula definitoria (4.13).

Ad (b): La identidad de Bianchi es válida para cualquier conexión *libre de torsión*. En efecto, nótese que

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_X [Y, Z] = \nabla_X (T_\nabla(Y, Z)) = 0.$$

Al permutar X, Y, Z cíclicamente, se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z \nabla_Y X \\ - \nabla_X [Y, Z] - \nabla_Y [Z, X] - \nabla_Z [X, Y] = 0. \end{aligned}$$

Al usar (4.13), esto queda reformulada así:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + \nabla_{[X, Y]}Z + R(Y, Z)X + \nabla_{[Y, Z]}X + R(Z, X)Y + \nabla_{[Z, X]}Y \\ - \nabla_X [Y, Z] - \nabla_Y [Z, X] - \nabla_Z [X, Y] = 0. \end{aligned}$$

Una vez más, la libertad de torsión $T_\nabla = 0$ simplifica esto en

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y + [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0,$$

y la identidad de Jacobi cancela los últimos tres términos al lado izquierdo.

Ad (c): Basta mostrar que $g(R(X, Y)Z, Z) = 0$ en general; la identidad (c) resulta al polarizar esta con las sustituciones $Z \mapsto Z + W$ y $Z \mapsto Z - W$. Escribábase $h := g(Z, Z) \in C^\infty(M)$; la compatibilidad de ∇^g con g implica que

$$2g(\nabla_X^g Z, Z) = Xg(Z, Z) = Xh.$$

La compatibilidad con g también implica que

$$\begin{aligned}
 g(R(X, Y)Z, Z) &= g(\nabla_X^g \nabla_Y^g Z, Z) - g(\nabla_Y^g \nabla_X^g Z, Z) - g(\nabla_{[X, Y]} Z, Z) \\
 &= X g(\nabla_Y^g Z, Z) - g(\nabla_Y^g Z, \nabla_X^g Z) - Y g(\nabla_X^g Z, Z) + g(\nabla_X^g Z, \nabla_Y^g Z) - \frac{1}{2}[X, Y](h) \\
 &= X g(\nabla_Y^g Z, Z) - Y g(\nabla_X^g Z, Z) - \frac{1}{2}[X, Y](h) \\
 &= \frac{1}{2}X(Yh) - \frac{1}{2}Y(Xh) - \frac{1}{2}[X, Y](h) = 0.
 \end{aligned}$$

Ad(d): Si $W \in \mathfrak{X}(M)$, las identidades (a) y (c) implican que $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(Y, X)Z, W)$ y además

$$g(R(X, Y)Z, W) + g(R(Y, Z)X, W) + g(R(Z, X)Y, W) = 0.$$

Al intercambiar W con X, Y, Z respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned}
 g(R(W, Y)Z, X) + g(R(Y, Z)W, X) + g(R(Z, W)Y, X) &= 0, \\
 g(R(X, W)Z, Y) + g(R(W, Z)X, Y) + g(R(Z, X)W, Y) &= 0, \\
 g(R(X, Y)W, Z) + g(R(Y, W)X, Z) + g(R(W, X)Y, Z) &= 0.
 \end{aligned}$$

Al sumar los lados izquierdos de estas cuatro ecuaciones, la identidad (c) implica que seis términos se cancelan en pares. Los otros seis términos están repetidos en pares: por ejemplo, $g(R(Z, W)Y, X) = g(R(W, Z)X, Y)$ por (a) y (c). De ahí resulta que

$$g(R(W, Y)Z, X) + g(R(W, Z)X, Y) + g(R(W, X)Y, Z) = 0.$$

Por otro lado, de (b) y luego (a) y (c) se obtiene

$$\begin{aligned}
 g(R(X, Y)W, Z) &= -g(R(W, X)Y, Z) - g(R(Y, W)X, Z) \\
 &= -g(R(W, X)Y, Z) - g(R(W, Y)Z, X).
 \end{aligned}$$

Combinando las últimas dos igualdades, se deduce que $g(R(X, Y)W, Z) = g(R(W, Z)X, Y)$, la cual es equivalente a (d). \square

En coordenadas locales de una carta (U, ϕ) de M , el tensor de curvatura tiene componentes

$$R^i_{jkl} := \langle dx^i, R(\partial_k, \partial_l) \partial_j \rangle.$$

Entonces

$$R^i_{jkl} \partial_i = R(\partial_k, \partial_l) \partial_j = \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_j - \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_k} \partial_j.$$

En vista de (4.2), la curvatura de ∇ está determinada por los símbolos de Christoffel y sus derivadas, mediante la fórmula:

$$R^i_{jkl} = \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{jk} + \Gamma^m_{jl} \Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk} \Gamma^i_{ml}. \quad (4.15)$$

Para la curvatura riemanniana, en el caso $\nabla = \nabla^g$, conviene usar la métrica para considerar R como un 4-tensor covariante:

$$R_{ijkl} := g(\partial_i, R(\partial_k, \partial_l) \partial_j) = g_{im} R_{jkl}^m. \quad (4.16)$$

Las simetrías de la Proposición 4.25 se expresan en términos de estos componentes así:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}; \quad R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0; \quad R_{ijkl} = R_{klij}. \quad (4.17)$$

Definición 4.26. La curvatura riemanniana R sobre (M, g) da lugar a otros tensores más simples. El **tensor de Ricci** es la traza de la aplicación $C^\infty(M)$ -lineal $Y \mapsto R(-, Y)$, que resulta ser un 2-tensor covariante Ric , cuyos componentes locales se denominan $R_{jl} \equiv \text{Ric}_{jl}$:

$$R_{jl} := \text{tr}(R_{\bullet j}^{\bullet}) = R_{jkl}^k. \quad (4.18)$$

En vista de las simetrías de R , el tensor de Ricci es simétrico:

$$R_{lj} = R_{lmj}^m = g^{mk} R_{klmj} = g^{km} R_{mjkl} = R_{jkl}^k = R_{jl}.$$

La contracción total del tensor de Ricci con la métrica (inversa):

$$S := g^{jl} R_{jl} \in C^\infty(M) \quad (4.19)$$

define la **curvatura escalar** S de (M, g) . ◇

Proposición 4.27. La esfera \mathbb{S}^2 tiene curvatura escalar constante $S \equiv 2$.

Demostración. En una variedad riemanniana (M, g) de dimensión 2, los componentes locales R_{ijkl} del tensor de curvatura obedecen las relaciones de simetría (4.17), donde $i, j, k, l = 1, 2$. De las primeras dos relaciones, $R_{ijkl} = 0$ si $i = j$ o bien $k = l$; la tercera relación (la de Bianchi) es automática, y la cuarta es consecuencia de las primeras tres. Por lo tanto, R queda determinado por el coeficiente R_{1212} solamente.⁹

En el caso de la esfera \mathbb{S}^2 , basta hacer el cálculo en el dominio de carta local $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\}$; ha y un cálculo análogo en $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{-e_3\}$. Con la notación del Ejemplo 4.17, se usa coordenadas locales $(x, y) \equiv (x^1, x^2)$ en U y se escribe $q := 1 + x^2 + y^2$. Los coeficientes de Christoffel fueron calculado en ese Ejemplo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\frac{2x}{q}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = -\frac{2y}{q}, & \Gamma_{22}^1 &= +\frac{2x}{q}, \\ \Gamma_{11}^2 &= +\frac{2y}{q}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = -\frac{2x}{q}, & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{2y}{q}. \end{aligned}$$

⁹Si $\dim M = 4$, las relaciones de simetría reducen las 256 componentes de R a unos 20 componentes independientes. En dimensión n , el número de componentes independientes es $n^2(n^2 - 1)/12$.

Como las matrices $[g_{ij}]$ y $[g^{rs}]$ son diagonales, las sumatorias en (4.16) tienen un solo término cada uno; por ejemplo,

$$R_{1212} = g_{11}R_{212}^1 \quad \text{y luego} \quad R_{212}^1 = g^{11}R_{1212}.$$

Ahora se calcula, a partir de (4.15):

$$\begin{aligned} R_{212}^1 &= \frac{\partial}{\partial x}\Gamma_{22}^1 - \frac{\partial}{\partial y}\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^m\Gamma_{m1}^1 - \Gamma_{21}^m\Gamma_{m2}^1 \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{q}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2y}{q}\right) - \frac{4x^2}{q^2} + \frac{4y^2}{q^2} - \frac{4y^2}{q^2} + \frac{4x^2}{q^2} \\ &= \frac{2q - 4x^2}{q^2} + \frac{2q - 4y^2}{q^2} = \frac{4}{q^2}, \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$R_{1212} = g_{11}R_{212}^1 = \frac{4}{q^2} \cdot \frac{4}{q^2} = \frac{16}{q^4}.$$

Los componentes del tensor de Ricci son:

$$\begin{aligned} R_{22} &= R_{212}^1 + R_{222}^2 = R_{212}^1 + g^{22}R_{222}^2 = R_{212}^1 = \frac{4}{q^2}, \\ R_{11} &= R_{111}^1 + R_{121}^2 = g^{11}R_{111}^1 + g^{22}R_{2121}^2 = g^{22}R_{1212} = \frac{q^2}{4} \cdot \frac{16}{q^4} = \frac{4}{q^2}, \end{aligned}$$

y de modo similar $R_{12} = R_{21} = 0$. Luego las matrices $[g^{rs}]$ y $[R_{jl}]$ son diagonales en este caso; la curvatura escalar es una suma de dos términos:

$$S = g^{jl}R_{jl} = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} = \frac{q^2}{4} \cdot \frac{4}{q^2} + \frac{q^2}{4} \cdot \frac{4}{q^2} = 2.$$

En resumen: la curvatura escalar S es la función constante de valor 2 en el dominio U . En el otro dominio V , la métrica redonda g tiene exactamente la misma expresión (4.12) en las coordenadas locales (x, y) correspondientes, así que $S = 2$ en V . (Desde luego, las dos fórmulas para S coinciden en $U \cap V$.) Luego vale $S \equiv 2$ en todo \mathbb{S}^2 . \square

Si se modifica la métrica g por un factor de escala constante: $g \mapsto a^2 g$, las fórmulas (4.11), (4.15) y (4.18) muestran que los coeficientes Γ_{ij}^k , R_{jkl}^i y R_{jl} quedan invariantes, mientras la contracción (4.19) modifica S por un factor escalar, $S \mapsto a^{-2} S$.

Al tomar $a := 1/\sqrt{2}$, por ejemplo, se puede elegir una métrica sobre \mathbb{S}^2 , invariante por rotaciones, tal que la curvatura escalar sea 1 en vez de 2. (Dicho de otro modo, la curvatura escalar usual de la esfera de radio a es igual a $2/a^2$.)

La métrica estándar en $M = \mathbb{R}^n$ es constante: $g_{ij} = \delta_{ij}$, cuya curvatura escalar es $S \equiv 0$. Existen otras superficies de curvatura constante negativa, llamadas *seuoesferas*.

Ejercicios

Ejercicios sobre variedades diferenciales

Ejercicio 1.1. Sea M una variedad diferencial con un atlas $\mathfrak{A} := \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$; sea N otra variedad diferencial con un atlas $\mathfrak{B} := \{(V_\beta, \psi_\beta) : \beta \in B\}$. Si $\dim M = n$ y $\dim N = m$, defínase la aplicación $\phi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ por

$$\phi_\alpha \times \psi_\beta(x, y) := (\phi_\alpha(x), \psi_\beta(y)).$$

Verificar que $\{(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta) : \alpha \in A, \beta \in B\}$ es un atlas sobre el producto cartesiano $M \times N$. (Así se define la estructura diferencial de la *variedad producto* $M \times N$.) Demostrar que las proyecciones $\text{pr}_1 : M \times N \rightarrow M$, $\text{pr}_2 : M \times N \rightarrow N$ dadas por $\text{pr}_1(x, y) := x$, $\text{pr}_2(x, y) := y$ son aplicaciones suaves.

Ejercicio 1.2. Defínase un juego de $2n$ cartas locales (V_k^\pm, ψ_k^\pm) , para $k = 1, \dots, n$, sobre la esfera \mathbb{S}^{n-1} donde los V_k^\pm son los hemisferios abiertos:

$$V_k^+ := \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : x^k > 0\}, \quad V_k^- := \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : x^k < 0\},$$

y las ψ_k^\pm son proyecciones a los respectivos planos ecuatoriales:

$$\psi_k^\pm(x) := (x^1, \dots, x^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Demostrar que estas cartas forman un atlas para \mathbb{S}^{n-1} . Determinar si este atlas es compatible o no con el atlas de dos cartas del Ejemplo 1.13.

Ejercicio 1.3. Comprobar que las funciones biyectivas $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ del Ejemplo 1.26, dadas por

$$f(x) := \frac{2x}{1 - \|x\|^2}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{1 + \sqrt{1 + \|y\|^2}}$$

son suaves. Hallar expresiones para sus derivadas.

Ejercicio 1.4. Si $a < b$ en \mathbb{R} , la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) := e^{-1/(b-t)(t-a)} \llbracket a < t < b \rrbracket$$

es obviamente suave en los intervalos abiertos $(-\infty, a)$, (a, b) y $(b, +\infty)$. Verificar que las derivadas $f^{(r)}(a)$ y $f^{(r)}(b)$, para $r \in \mathbb{N}$, también existen y son todas iguales a 0.

Ejercicio 1.5. Una función suave y sobreyectiva $f : M \rightarrow N$ es una **aplicación recubridora** si para cada $q \in N$, hay un vecindario abierto V de q cuyo preimagen $f^{-1}(V)$ sea una unión disjunta $\bigsqcup_k U_k$ de abiertos de M , donde cada $f|_{U_k} : U_k \rightarrow V$ es un difeomorfismo. Demostrar que las funciones

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} : t \mapsto e^{2\pi it} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} : z \mapsto z^2$$

son aplicaciones recubridoras.

Ejercicio 1.6. Sean (U, ϕ) y (V, ψ) dos cartas locales sobre una variedad M tales que $\phi(p) = \psi(p) = 0$ para un determinado punto $p \in U \cap V$. Sean $(x^1, \dots, x^n), (y^1, \dots, y^n)$ sus sistemas respectivas de coordenadas locales. Un vector tangente $v \in T_p M$ puede expresarse como $v = \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p = \sum_{k=1}^n b^k \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_p$. Comprobar que $b^k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(0) a^j$.

Ejercicio 1.7. Sea $f : M \rightarrow N$ una función de clase C^1 entre dos variedades diferenciales. Si $p \in M$ y $v \in T_p M$, y si $\gamma : I \rightarrow M$ es una curva suave tal que $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$, demostrar que $T_p f(v) = \dot{\zeta}(0)$ donde $\zeta := f \circ \gamma$.

Ejercicio 1.8. Si R es una subvariedad de una variedad diferencial M y si S es una subvariedad de R , comprobar que S es una subvariedad de M .

Ejercicio 1.9. Sea $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ la función que lleva cada matriz real $n \times n$ a su determinante. Demostrar que 0 es el único *valor crítico* de esta función. (Los valores de una función suave que no son valores regulares se llaman **valores críticos**.) [Indicación: usar la expansión de Laplace de determinantes en una fila o columna.]

Concluir que $SL(n, \mathbb{R})$ es una subvariedad de $M_n(\mathbb{R})$, de dimensión $n^2 - 1$.

Ejercicio 1.10. Sea $h(t) := (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$ para $t \in \mathbb{R}$. Demostrar que la aplicación $t \mapsto h(t)$ es suave e inyectiva pero que no es una inmersión de \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 .

Ejercicio 1.11. Considérese la **helicoides** $M := \{(s \cos t, s \sin t, t) \in \mathbb{R}^3 : s, t \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que M es una subvariedad de \mathbb{R}^3 . Si se definen $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y, z) := (x, y), \quad g(x, y, z) := (y, z),$$

Determinar si f y g son sumersiones o no.

Ejercicio 1.12. La **hoja de Descartes** es la curva $x^3 + y^3 = 3xy$ en el plano \mathbb{R}^2 .

(a) Verificar que la parametrización $t \mapsto (x(t), y(t))$, con

$$x(t) := \frac{3t}{1+t^3}, \quad y(t) := \frac{3t^2}{1+t^3},$$

define una inmersión $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya imagen es la hoja de Descartes.

- (b) Usar esta parametrización para *dibujar* la curva y determinar su naturaleza cerca del punto $(0, 0)$. Comprobar que esta curva *no* es una subvariedad de \mathbb{R}^2 .
- (c) Explicar por qué la inmersión inyectiva f no es un encaje.

Ejercicio 1.13. (a) Demostrar que la superficie cúbica

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$$

es una subvariedad de \mathbb{R}^3 .

- (b) Comprobar que la intersección de S con el plano $x + y + z = t$ es un *círculo* si $t > 0$, pero es vacío si $t \leq 0$. Concluir que S es una superficie de revolución.

Ejercicio 1.14. Sea $\text{Sim}(n) \simeq \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ el espacio vectorial de matrices simétricas reales $n \times n$. Defínase $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Sim}(n)$ por $f(A) := A^t A$, en concordancia con el Ejemplo 1.49. Si $B \in M_n(\mathbb{R})$, comprobar que la matriz de la aplicación tangente $T_B f$ coincide con la derivada $Df(B) \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}), \text{Sim}(n))$ y verificar que

$$Df(B) : A \mapsto A^t B + B^t A.$$

Mostrar que $Df(B)$ es sobreyectiva si y solo si $B \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$; concluir que la restricción de f a $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ es una sumersión. \llbracket Esta es una manera alternativa de demostrar que $O(n)$ es una subvariedad de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$. \rrbracket

Ejercicio 1.15. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial sobre una variedad diferencial M . Si U es un abierto de M y si $g \in C_c^\infty(U)$ es una función suave sobre U con soporte compacto $\text{sop } g = K \subset U$, se puede extender g a una función suave sobre M al colocar $g(q) := 0$ para $q \in M \setminus U$. Demostrar que $Xg \in C^\infty(M)$ tiene soporte compacto en U también, al comprobar que $\text{sop}(Xg) \subseteq \text{sop } g$.

Ejercicio 1.16. (a) Si $X = a^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Y = b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ son las expresiones en coordenadas locales de dos campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, y si $[X, Y] = c^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ con respecto a la misma carta local, comprobar que las funciones c^j están dadas por

$$c^j = a^k \frac{\partial b^j}{\partial x^k} - b^k \frac{\partial a^j}{\partial x^k}.$$

- (b) Demostrar que los dos campos vectoriales

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad Y = x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3}$$

generan una subálgebra de Lie *tridimensional* de $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$.

Ejercicio 1.17. Sea $\alpha: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ una función suave tal que $\alpha(t, \alpha(s, p)) = \alpha(t + s, p)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}, p \in M$. Demostrar que existe un único campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ cuyo flujo es α .

Ejercicio 1.18. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tienen flujos respectivos α, β definidos en todo $\mathbb{R} \times M$, demostrar que $[X, Y] = 0$ si y solo si $\alpha(t, \beta(t, p)) = \beta(t, \alpha(t, p))$ para todo $t \in \mathbb{R}, p \in M$.

Ejercicio 1.19. Considérese los dos campos vectoriales sobre \mathbb{R}^2 definidos por

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y := x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

En el Ejemplo 1.64, se demostró que las curvas integrales de X son todos los círculos $t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$, con radios $r \geq 0$.

- (a) Determinar las curvas integrales del campo vectorial Y .
- (b) Verificar que $[X, Y] = 0$ e interpretar esta conmutación en términos de los flujos, a la luz del Ejercicio 1.18.

Ejercicio 1.20. Si $z_0 = e^{i\alpha}$ es un punto del círculo $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, se puede definir un carta local (V_α, ψ_α) de \mathbb{T} al tomar $V_\alpha := \mathbb{T} \setminus \{-z_0\}$ y $\psi_\alpha: V_\alpha \rightarrow (\alpha - \pi, \alpha + \pi)$ dada por $\psi_\alpha(e^{i\theta}) := \theta$. Aquí θ es la coordenada local para esta carta y determina un campo vectorial local $d/d\theta$, restringido a V_α . Si $z_1 = e^{i\beta}$ es otro punto de \mathbb{T} , las fórmulas análogas definen un campo vectorial local $d/d\theta$ en V_β . Mostrar que estos dos campos vectoriales locales coinciden (es decir, tienen la misma restricción) sobre $V_\alpha \cap V_\beta$.

De esta manera se ha definido un campo vectorial $X = d/d\theta$ sobre todo \mathbb{T} . Comprobar que X es invariante bajo las rotaciones rígidas del círculo $\lambda_w: z \mapsto wz$, para $w \in \mathbb{T}$.

Ejercicio 1.21. Hay un \mathbb{R} -álgebra \mathbb{H} de dimensión 4 cuyos elementos se llaman **cuaterniones**. El producto en \mathbb{H} es la operación \mathbb{R} -bilineal definido en términos de una base \mathbb{R} -vectorial $\{1, i, j, k\}$ de \mathbb{H} por las fórmulas

$$(-1)^2 = 1, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik,$$

donde 1 es el elemento identidad de \mathbb{H} . Al identificar $r \in \mathbb{R}$ con $r \cdot 1 \in \mathbb{H}$, se considera \mathbb{R} como un subespacio de \mathbb{H} . Si $q = q^0 + q^1 i + q^2 j + q^3 k \in \mathbb{H}$ con cada $q^r \in \mathbb{R}$, se escribe $\bar{q} := q^0 - q^1 i - q^2 j - q^3 k$.

Si $N(q) := q \bar{q} \in \mathbb{R}$, comprobar que $N(pq) = N(p)N(q)$ para $p, q \in \mathbb{H}$. Las **cuaterniones unitarias** $\underline{\text{UH}} := \{q \in \mathbb{H} : N(q) = 1\}$ forman un grupo. Demostrar que este es un grupo de Lie y encontrar un isomorfismo $\underline{\text{UH}} \simeq \mathbb{S}^3$.

Ejercicio 1.22. Si $n \in \mathbb{P}$, se define el **grupo de Heisenberg** H_n como sigue. La variedad H_n es el espacio vectorial $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{2n+1}$, cuyo elemento típico es (q, p, t) con $q, p \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. El producto en H_n está dado por la fórmula:

$$(q_1, p_1, t_1) * (q_2, p_2, t_2) := (q_1 + q_2, p_1 + p_2, t_1 + t_2 + \frac{1}{2}(q_1 \cdot p_2 - q_2 \cdot p_1)).$$

donde $q \cdot p$ denota el producto escalar usual en \mathbb{R}^n . Comprobar que H_n es un grupo de Lie no abeliano. Determinar el *centro* del grupo H_n .

Sea \tilde{H}_n el mismo conjunto con un producto diferente:

$$(q_1, p_1, t_1) \diamond (q_2, p_2, t_2) := (q_1 + q_2, p_1 + p_2, t_1 + t_2 + q_1 \cdot p_2).$$

Hallar un isomorfismo de grupos $\theta: H_n \rightarrow \tilde{H}_n$ que sea a la vez un difeomorfismo.

Ejercicio 1.23. La **exponencial matricial** de una matriz cuadrada $X \in M_n(\mathbb{F})$, donde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , se define por $\exp X := \sum_{k=0}^{\infty} (1/k!)X^k$, con $X^0 := 1$. Verificar que la curva $\gamma_X: \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{F})$ definida por las exponenciales matriciales $\gamma_X(t) := \exp(tX)$ es suave y cumple $\dot{\gamma}_X(0) = X \in M_n(\mathbb{F})$.

[[Así se demuestra que la aplicación exponencial de la Definición 1.78 coincide con la exponencial matricial si $\mathfrak{g} \leq M_n(\mathbb{F})$.]]

Calcular $\exp tX$ para los casos siguientes:

$$(a) \quad X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (b) \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (c) \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comprobar que $\exp(X + Y) = \exp X \exp Y$ si $[X, Y] = 0$. Concluir que $t \mapsto \exp tX$ es un homomorfismo de \mathbb{R} en $\text{GL}(n, \mathbb{F})$.

Ejercicio 1.24. Para el caso $[X, Y] \neq 0$, obtener la **fórmula de Trotter y Kato**:

$$\exp(X + Y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\exp \frac{1}{k} X \exp \frac{1}{k} Y \right]^k$$

a partir de la fórmula de Campbell–Baker–Hausdorff (1.38). Usar esta última fórmula para verificar la relación:

$$\exp tX \exp tY \exp(-tX) = \exp(tY + t^2[X, Y] + O(t^3)).$$

Ejercicio 1.25. Verificar que el espacio vectorial $\mathfrak{su}(2)$, el álgebra de Lie del grupo $\text{SU}(2)$, tiene la siguiente base \mathbb{R} -vectorial:

$$X_1 := \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 := \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Verificar las relaciones de conmutación:

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2.$$

Calcular los subgrupos uniparamétricos $\{\exp tX_j : t \in \mathbb{R}\}$ para $j = 1, 2, 3$ y demostrar que cualquier elemento $U \in \text{SU}(2)$ puede escribirse en la forma

$$U = (\exp \phi X_3)(\exp \theta X_2)(\exp \psi X_3)$$

con $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\pi < \phi \leq \pi$, $-2\pi < \psi \leq 2\pi$.

[[Los ángulos de Euler θ, ϕ, ψ parametrizan el grupo de Lie $\text{SU}(2)$.]]

Ejercicio 1.26. Verificar que el espacio vectorial $\mathfrak{so}(3)$, el álgebra de Lie del grupo $\text{SO}(3)$, tiene la siguiente base \mathbb{R} -vectorial:

$$Y_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con la notación del Ejercicio 1.25, defínase un homomorfismo $\rho : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$ por

$$\rho(\exp tX_j) := \exp tY_j \quad \text{para } j = 1, 2, 3; t \in \mathbb{R}.$$

Calcular $\rho(\exp \phi X_3 \exp \theta X_2 \exp \psi X_3)$ y comprobar que el núcleo de ρ es el subgrupo de dos elementos $\{1_2, -1_2\} \leq \text{SU}(2)$. Demostrar que ρ es una aplicación recubridora.¹

Ejercicio 1.27. Considérese el grupo simpléctico $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$, definido en (1.43). Nótese que la matriz $J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$ de (1.42) cumple $J^2 = -1_{2n}$ y $J^t = -J$. Comprobar que la forma bilineal d_J definida por $d_J(x, y) := s(x, Jy)$ es el producto escalar usual sobre \mathbb{R}^{2n} .

Demostrar que una matriz $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ pertenece a $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ si y solo si $B^t J B = J$.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d \in M_n(\mathbb{R})$, demostrar que $A \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ si y solo si las matrices $a^t c$ y $b^t d$ son simétricas, con $a^t d - b^t c = 1_n$. Deducir que $\dim \text{Sp}(2n, \mathbb{R}) = 2n^2 + n$.

Ejercicio 1.28. Sea G un grupo de Lie. Verificar que $g \cdot h := ghg^{-1}$ define una acción a izquierda de G sobre sí mismo. ¿Cuáles son las órbitas de esta acción? Cuál es el subgrupo de isotropía de un elemento $h \in G$ bajo esta acción?

¹Dícese que el grupo de Lie $\text{SU}(2)$ es un **cubrimiento doble** del grupo de Lie $\text{SO}(3)$.

Ejercicio 1.29. Sea G un grupo de Lie que actúa sobre una variedad diferencial M . Si las órbitas $G \cdot u$ y $G \cdot v$ coinciden, demostrar que los subgrupos de isotropía G_u y G_v son conjugados, es decir, que existe $h \in G$ tal que $G_v = \{hgh^{-1} : g \in G_u\}$.

Ejercicio 1.30. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, demostrar que la receta

$$A \cdot z := \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{para } z \in \mathbb{C}$$

define una acción a izquierda de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ sobre \mathbb{C} . ¿Cuál es la órbita del punto $i = \sqrt{-1}$? ¿Cuál es el subgrupo de isotropía de i bajo esta acción?

Ejercicio 1.31. El grupo de Lie $\text{SU}(1, 1)$ consta de matrices complejas 2×2 de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{con } |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1.$$

Verificar que tales matrices forman un grupo. Este grupo actúa transitivamente sobre el disco unitario $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ por

$$A \cdot z := \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}} \quad \text{para } z \in \mathbb{D}.$$

Identificar las órbitas de cada uno de los tres subgrupos uniparamétricos con elementos

$$k(\theta) := \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad a(t) := \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \quad n(s) := \begin{pmatrix} 1 + is & -is \\ is & 1 - is \end{pmatrix}.$$

Estos subgrupos generan $\text{SU}(1, 1)$. Mostrar que el grupo de isotropía del origen $0 \in \mathbb{D}$ es $\mathbb{T} := \{k(\theta) : -\pi < \theta \leq \pi\}$; concluir que $\text{SU}(1, 1)/\mathbb{T}$ es difeomorfo a \mathbb{D} .

Ejercicio 1.32. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie \mathfrak{g} . Para $g \in G$, $Y \in \mathfrak{g}$, defínase

$$\text{Ad}(g)Y := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(\exp tY)g^{-1}.$$

- (a) Demostrar que $(g, Y) \mapsto \text{Ad}(g)Y$ es una acción suave de G sobre \mathfrak{g} .
- (b) Si G es un grupo de Lie lineal, es decir, $G \leq \text{GL}(m, \mathbb{F})$ para algún $m \in \mathbb{N}$ (con $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}), demostrar que esta **acción adjunta** está dada por la conjugación de matrices:

$$\text{Ad}(g)Y = gYg^{-1}.$$

(c) Usar las fórmulas del Ejercicio 1.24 para mostrar la relación general

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Ad}(\exp sX)Y = [X, Y] \quad \text{si } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Ejercicio 1.33. Si $V \in \text{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$ es un subespacio de \mathbb{R}^n de dimensión k , denótese por V^\perp su complemento ortogonal con respecto del producto escalar usual de \mathbb{R}^n . Escribáse

$$U_V := \{ W \in \text{Gr}(k, \mathbb{R}^n) : W \cap V^\perp = \{0\} \}.$$

Si $W \in U_V$, cada vector $w \in W$ se escribe de manera única como $w = v + y$ con $v \in V$, $y \in V^\perp$. Comprobar que la aplicación lineal $w \mapsto v$ es invertible, así que la composición $v \mapsto w \mapsto y$ es una aplicación lineal $T_W : V \rightarrow V^\perp$.

Defínase una función $\phi_V : U_V \rightarrow \mathcal{L}(V, V^\perp)$ por $\phi_V(W) := T_W$. Inversamente, dado $T \in \mathcal{L}(V, V^\perp)$, sea $W_T := \{ v + Tv : v \in V \} = \text{im}(1 + T)$ en $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$.

Verificar que las correspondencias $W \mapsto T_W$, $T \mapsto W_T$ son recíprocas, es decir, que $W_{T_W} = W$ y $T_{W_T} = T$. Concluir que la aplicación ϕ_V es biyectiva.

Comprobar que la totalidad de pares (U_V, ϕ_V) son cartas locales para un atlas² sobre $\text{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$. Concluir que $\dim \text{Gr}(k, \mathbb{R}^n) = k(n - k)$.

Ejercicio 1.34. Si $\{a_1, \dots, a_n\}$ es una base cualquiera de \mathbb{R}^n , el *algoritmo de Gram y Schmidt* produce una base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\}$ de \mathbb{R}^n , de tal manera que la base parcial $\{u_1, \dots, u_k\}$ depende solamente de $\{a_1, \dots, a_k\}$. Si A y U son las matrices cuyas columnas son estas dos bases, comprobar que $A = UR$, donde $R \in T_+(n, \mathbb{R})$ es una matriz triangular superior con entradas diagonales positivas: $r_{ij} = 0$ si $i > j$, $r_{jj} > 0$. Usar las fórmulas explícitas del algoritmo para demostrar que la correspondencia $UR \mapsto (U, R)$ es un *difeomorfismo* de variedades: $\text{GL}(n, \mathbb{R}) \approx O(n) \times T_+(n, \mathbb{R})$.

Ejercicio 1.35. Si $x \cdot y := x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$ denota el producto escalar usual en \mathbb{R}^3 , considérese el conjunto

$$E := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1, x \cdot y = 0 \} \subset \mathbb{R}^6$$

con su topología relativa; la proyección $\pi : E \rightarrow \mathbb{S}^2 : (x, y) \mapsto x$ es continua. La esfera \mathbb{S}^2 tiene un cubrimiento abierto $\{U_1, U_2, U_3\}$, donde $U_k := \{x \in \mathbb{S}^2 : |x^k| < 1\}$ para $k = 1, 2, 3$. Defínase tres funciones $\psi_k : \pi^{-1}(U_k) \rightarrow U_k \times \mathbb{R}^2$ por

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &:= (x; x^2y^3 - x^3y^2, y^1), \\ \psi_2(x, y) &:= (x; x^3y^1 - x^1y^3, y^2), \\ \psi_3(x, y) &:= (x; x^1y^2 - x^2y^1, y^3). \end{aligned}$$

²Se puede mostrar que este atlas es equivalente al atlas que define la estructura diferencial de la variedad cociente $O(n)/(O(k) \times O(n - k))$.

Demostrar que ψ_1, ψ_2, ψ_3 son trivializaciones locales para un *fibrado vectorial* $E \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^2$.

Ejercicio 1.36. Un **morfismo de fibrados vectoriales** entre $E \xrightarrow{\pi} M$ y $F \xrightarrow{\sigma} N$ es un par ordenado (Φ, ϕ) , donde $\Phi: E \rightarrow F$ y $\phi: M \rightarrow N$ son aplicaciones suaves tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & F \\ \pi \downarrow & & \downarrow \sigma \\ M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array}$$

es decir, $\sigma \circ \Phi = \phi \circ \pi$; y tales que todas las aplicaciones parciales entre las fibras dadas por $\Phi_x: v \mapsto \Phi(v): E_x \rightarrow F_{\phi(x)}$ son aplicaciones *lineales*.

Si $f: M \rightarrow N$ es una función suave, mostrar que la aplicación tangente $Tf: TM \rightarrow TN$ dada por $Tf(p, v) := (f(p), T_p f(v))$ es suave y que el par (Tf, f) es un morfismo de fibrados entre los fibrados tangentes de M y N .

Ejercicio 1.37. Un **isomorfismo de fibrados vectoriales** es un morfismo de fibrados (Φ, ϕ) invertible, es decir, las dos aplicaciones Φ y ϕ son difeomorfismos.

Demostrar que el fibrado vectorial $E \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^2$ del Ejercicio 1.35 es isomorfo al fibrado tangente $T\mathbb{S}^2 \xrightarrow{\tau} \mathbb{S}^2$.

Ejercicio 1.38. Comprobar que el fibrado tangente $T\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\tau} \mathbb{S}^1$ es trivial,³ al encontrar un isomorfismo explícito entre $T\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\tau} \mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \xrightarrow{pr_1} \mathbb{S}^1$.

Ejercicios sobre formas diferenciales

Ejercicio 2.1. Sea $\sigma: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal alternante sobre un espacio vectorial real E de dimensión n . Demostrar que hay $g_1, \dots, g_{2r} \in E^*$, linealmente independientes, tales que

$$\sigma = g_1 \wedge g_2 + g_3 \wedge g_4 + \dots + g_{2r-1} \wedge g_{2r}.$$

[[Indicación: Si $\sigma \neq 0$, hay vectores $v_1, v_2 \in E$ tales que $\sigma(v_1, v_2) \neq 0$. Demostrar que hay $g_1, g_2 \in E^*$ con $g_1(v_1) = g_2(v_2) = 1, g_1(v_2) = g_2(v_1) = 0$.]]

Calcular $\sigma^{\wedge r} := \sigma \wedge \dots \wedge \sigma$ (r veces) y verificar que $\sigma^{\wedge r} \neq 0, \sigma^{\wedge(r+1)} = 0$. (El rango de la forma bilineal es $2r$; fíjese que $2r \leq n$.)

³Dícese que una variedad M es **paralelizable** si su fibrado tangente es trivial. Las esferas \mathbb{S}^1 y \mathbb{S}^3 son paralelizables porque son grupos de Lie: $\mathbb{S}^1 \approx U(1)$ y $\mathbb{S}^3 \approx SU(2) \simeq Sp(1)$.

Si $\sigma(u, v) = 0$ para todo $v \in E$ implica que $u = 0$, se dice que σ es una forma bilineal **no degenerada**. Comprobar que esto ocurre solo si n es par y $2r = n$.

Ejercicio 2.2. Si $M = \mathbb{R}^{2m}$, demostrar que la 2-forma $\omega = \sum_{k=1}^m dx^{2k-1} \wedge dx^{2k}$ es no degenerada: es decir, si $\omega(X, Y) = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2m})$, entonces $X = 0$.

Calcular $\omega^{\wedge m} := \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (m veces) en términos de las coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^{2m} .

Ejercicio 2.3. (a) Si $\omega \in \mathcal{A}^{2r+1}(M)$ tiene grado impar, mostrar que $\omega \wedge \omega = 0$.

(b) Si $\eta = dx^1 \wedge dx^2 - dx^2 \wedge dx^3 + dx^3 \wedge dx^4 \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^4)$, calcular $\eta \wedge \eta$.

Ejercicio 2.4. Sea $\{\alpha^i := a_r^i dx^r : i = 1, \dots, n\}$ un juego de unas n 1-formas sobre \mathbb{R}^n . Si $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, listado en orden creciente, demostrar que

$$\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_k} = \sum_{|J|=k} m_{IJ} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k},$$

donde $m_{IJ} = \det A_{IJ}$ es el menor de la submatriz $k \times k$ de A con filas I y columnas J . Concluir que

$$\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n = (\det A) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Ejercicio 2.5. En la esfera \mathbb{S}^{n-1} , las cartas locales (V_k^\pm, ψ_k^\pm) del Ejercicio 1.2 determinan coordenadas locales $(x^1, \dots, \widehat{x^k}, \dots, x^n)$. La fórmula siguiente:

$$\sigma := \sum_{j=1}^n (-1)^j x^j dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

determina una forma diferencial $\sigma \in \mathcal{A}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ en términos de las coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^n . Calcular la expresión local de σ en cada V_k^\pm y comprobar que $\sigma_q \neq 0$ para $q \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Sea $\rho : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ la simetría $x \mapsto -x$. Verificar que $\rho^* \sigma = (-1)^n \sigma$.

Ejercicio 2.6. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, demostrar que $i_X \circ i_Y = -i_Y \circ i_X$ como operadores sobre $\mathcal{A}^\bullet(M)$. [En particular, resulta $i_X \circ i_X = 0$.]

Ejercicio 2.7. Si $\tau : M \rightarrow N$ y $\sigma : N \rightarrow R$ son aplicaciones suaves entre variedades diferenciales, demostrar que $\tau^*(\sigma^* \eta) = (\sigma \circ \tau)^* \eta$ para todo $\eta \in \mathcal{A}^\bullet(R)$.

Ejercicio 2.8. Si $\eta = g dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$ en $\mathcal{A}^n(\mathbb{R}^n)$ y si $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo, demostrar que

$$\tau^* \eta = (g \circ \tau)(J\tau) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

donde $J\tau := \det[\partial \tau^i / \partial x^j]$ es el jacobiano de τ .

Ejercicio 2.9. Si $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es suave y si $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, defínase tres formas por:

$$\begin{aligned}\alpha_F &:= F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz, \\ \beta_F &:= F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy, \\ \gamma_g &:= g dx \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}$$

Con las notaciones usuales: $\nabla f = \text{grad } f$, $\nabla \times F = \text{rot } F$, $\nabla \cdot F = \text{div } F$ del llamado “análisis vectorial”, verificar que

$$\alpha_{\nabla f} = df, \quad \beta_{\nabla \times F} = d\alpha_F, \quad \gamma_{\nabla \cdot F} = d\beta_F.$$

Comprobar que las identidades conocidas $\nabla \times \nabla f = 0$ y $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$ son casos particulares de la nilpotencia $d^2 = 0$ de la derivada exterior.

Ejercicio 2.10. Si $\beta \in \mathcal{A}^2(M)$, verificar la fórmula:

$$\begin{aligned}d\beta(X, Y, Z) &= X(\beta(Y, Z)) + Y(\beta(Z, X)) + Z(\beta(X, Y)) \\ &\quad - \beta([X, Y], Z) - \beta([Y, Z], X) - \beta([Z, X], Y).\end{aligned}$$

[[Indicación: comprobar que el lado derecho es trilineal y alternante en (X, Y, Z) ; y que la sustitución $X \mapsto fX$ multiplica el lado derecho por $f \in C^\infty(M)$. Concluir que es suficiente verificar la igualdad en una carta local con campos vectoriales básicos.]]

Ejercicio 2.11. Si $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, verificar la fórmula algebraica general para la derivada exterior:

$$\begin{aligned}d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} X_j(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}).\end{aligned}$$

Ejercicio 2.12. Si $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, verificar la fórmula algebraica general para la derivada de Lie:

$$\mathcal{L}_X \omega(X_1, \dots, X_k) = X(\omega(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{j=1}^k \omega(X_1, \dots, [X, X_j], \dots, X_k).$$

Ejercicio 2.13. Las fórmulas de los Ejercicios 2.11 y 2.12 pueden considerarse como *definiciones alternativas* de las derivadas exterior y de Lie. Con base en estas fórmulas únicamente, comprobar las identidades algebraicas:

$$d(d\omega) = 0; \quad \mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d; \quad \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X, Y]}.$$

Ejercicio 2.14. Si $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$, comprobar que

$$\mathcal{L}_{fX}\omega = f \mathcal{L}_X\omega + df \wedge (i_X\omega).$$

Ejercicio 2.15. Si $\eta = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ en $\mathcal{A}^n(\mathbb{R}^n)$, verificar la fórmula

$$\mathcal{L}_X\eta = (Xf + f \operatorname{div}X) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

donde $\operatorname{div}X := \sum_{j=1}^n \frac{\partial g^j}{\partial x^j}$ es la **divergencia** del campo vectorial $X = g^j \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Ejercicio 2.16. Si $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, verificar la fórmula:

$$i_{[X,Y]}\omega = \mathcal{L}_X i_Y\omega - i_Y \mathcal{L}_X\omega.$$

Concluir que $\mathcal{L}_X i_X\omega = i_X \mathcal{L}_X\omega$.

Ejercicio 2.17. Si $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, considérese el sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z} = f, \quad \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x} = g, \quad \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = h.$$

Demostrar que esta ecuación tiene una solución – dada por $p, q, r \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ – si y solo si

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0.$$

[[Indicación: colocar $\omega := f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$ y usar el lema de Poincaré en \mathbb{R}^3 .]]

Ejercicio 2.18. Si $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ es el fibrado cotangente de una variedad M , se define la **1-forma de Liouville** $\Theta \in \mathcal{A}^1(T^*M)$ por⁴

$$\langle \Theta_{(q,\xi)}, w \rangle := \langle \xi, T_{(q,\xi)}\pi(w) \rangle,$$

donde $q \in M$, $\xi \in T_q^*M$, $w \in T_{(q,\xi)}(T^*M)$, de tal manera que $T_{(q,\xi)}\pi(w) \in T_qM$.

En términos de las coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) de una carta local (U, ϕ) de M y $(x^1, \dots, x^n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ de la carta local correspondiente $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ de T^*M , demostrar que la expresión local de Θ en esa carta es

$$\Theta = \xi_j dx^j.$$

Concluir que la 2-forma $\Omega := -d\Theta$ sobre T^*M es cerrada y no degenerada (véase el Ejercicio 2.2).

⁴Si $v \in E$, $f \in E^*$, la notación $\langle f, v \rangle \equiv f(v)$ denota la evaluación de la forma lineal f en el vector v .

Ejercicio 2.19. Sea G un grupo de Lie. Una forma diferencial $\eta \in \mathcal{A}^\bullet(G)$ es **invariante** (a izquierda) si $\lambda_g^* \eta = \eta$ para todo $g \in G$; en cuyo caso η está determinada por el elemento $\eta_1 \in \Lambda^\bullet(T_1^*G)$. Si \tilde{X} denota el campo vectorial invariante tal que $\tilde{X}_1 = X \in \mathfrak{g}$, demostrar que la 1-forma α es invariante si y solo si, para todo $X \in \mathfrak{g}$, la función $\alpha(\tilde{X})$ es constante de valor $\alpha_1(X)$. Concluir que $d\alpha$ es una 2-forma invariante, que cumple $d\alpha(\tilde{X}, \tilde{Y}) = -\alpha_1([X, Y])$.

Si $\{X_1, \dots, X_n\}$ es una base para el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_1G$, el corchete de \mathfrak{g} está determinado por las combinaciones lineales:

$$[X_j, X_k] = c_{jk}^i X_i$$

cuyas coeficientes c_{jk}^i , para $i, j, k = 1, \dots, n$, son las **constantes de estructura** de \mathfrak{g} . Se identifica el espacio vectorial de 1-formas invariantes a izquierda con el espacio \mathbb{R} -vectorial dual $\mathfrak{g}^* := T_1^*G$. Si $\{\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^n\}$ es la base dual de \mathfrak{g}^* , comprobar las **ecuaciones de Maurer y Cartan**:⁵

$$d\alpha^i = -\frac{1}{2} c_{jk}^i \alpha^j \wedge \alpha^k.$$

Ejercicio 2.20. Sobre el grupo de Lie $GL(m, \mathbb{R})$, defínase una matriz de 1-formas por la receta $\Omega := g^{-1} dg$. Verificar que las entradas de esta matriz⁶ son 1-formas invariantes sobre G .

Comprobar que $d(g^{-1}) = -g^{-1} dg g^{-1}$ para $g \in GL(m, \mathbb{R})$ y obtener así una expresión matricial para $d\Omega$. ¿Cómo se expresan las ecuaciones de Maurer y Cartan (del Ejercicio 2.19) para este grupo de Lie?

Ejercicio 2.21. Una **forma simpléctica** sobre una variedad diferencial M es una 2-forma cerrada no degenerada: $\omega \in \mathcal{A}^2(M)$ con $d\omega = 0$, y $\omega(X, Y) = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ solo si $X = 0$. Demostrar que $\dim M$ es necesariamente par. [Indicación: si $p \in M$, usar el Ejercicio 2.1 para comprobar que $\dim T_p^*M$ es par.] Demostrar que $X \mapsto i_X \omega$ es una biyección lineal entre los espacios vectoriales $\mathfrak{X}(M)$ y $\mathcal{A}^1(M)$.

Dada una forma simpléctica $\omega \in \mathcal{A}^2(M)$, escríbase $X^\flat := i_X \omega \in \mathcal{A}^1(M)$ para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$. Denótese por $\alpha \mapsto \alpha^\sharp : \mathcal{A}^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ la biyección inversa a la biyección $X \mapsto X^\flat$. Para cada $f \in C^\infty(M)$, el campo vectorial $X_f := (df)^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ se llama el **campo vectorial hamiltoniano** asociado a la función f . Comprobar que $\omega(X_f, Y) = Yf$

⁵A partir de estas fórmulas, se puede obtener la identidad de Jacobi en el álgebra de Lie como consecuencia de la identidad $d \circ d = 0$ aplicada a las 1-formas invariantes.

⁶Al tomar las entradas g_{ij} de $g \in GL(m, \mathbb{R})$ como coordenadas locales para el grupo, dg es la matriz de 1-formas $[dg_{ij}]$. Se puede considerar Ω como una 1-forma sobre $GL(m, \mathbb{R})$ con valores en el espacio vectorial $M_m(\mathbb{R})$, el cual es el álgebra de Lie de $GL(m, \mathbb{R})$. Es posible mostrar que si $G \leq GL(m, \mathbb{R})$ es un subgrupo de Lie cerrado, entonces $\{g^{-1} dg : g \in G\}$ toma valores en \mathfrak{g} , el álgebra de Lie de G .

para $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Demostrar que $\mathcal{L}_{X_f} \omega = 0$; concluir que ω es invariante bajo el flujo del campo hamiltoniano X_f .

Ejercicio 2.22. Una **variedad simpléctica** (M, ω) consta de una variedad diferencial M de dimensión par, dotada de una forma simpléctica $\omega \in \mathcal{A}^2(M)$.

Denótese por $(q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n)$ las coordenadas cartesianas de $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, donde (q^1, \dots, q^n) son las coordenadas cartesianas de la base \mathbb{R}^n . Comprobar que $(T^*\mathbb{R}^n, \omega)$ es una variedad simpléctica,⁷ con ω definido por $\omega := dq^j \wedge dp_j \in \mathcal{A}^2(T^*\mathbb{R}^n)$.

Si $f \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$, comprobar que el campo vectorial hamiltoniano X_f está dado por

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j}.$$

El **corchete de Poisson** es la forma \mathbb{R} -bilineal sobre $C^\infty(M)$ dado por $\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$. Para $M = T^*\mathbb{R}^n$, comprobar la fórmula:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q^j}.$$

Ejercicios sobre integración en variedades

Ejercicio 3.1. El **espacio proyectivo real** \mathbb{RP}^{n-1} es el cociente de la esfera \mathbb{S}^{n-1} bajo la identificación de puntos antipodales:⁸ $x \sim y$ si y solo si $x = \pm y$ (como vectores en \mathbb{R}^n).

Sea $\rho : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ la simetría $x \mapsto -x$; y sea $\eta : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ la aplicación cociente $x \mapsto \{x, -x\}$. Si $\omega \in \mathcal{A}^{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1})$, comprobar que $\rho^* \eta^* \omega = \eta^* \omega$.

Sea σ la forma de volumen sobre \mathbb{S}^{n-1} , así que $\eta^* \omega = f \sigma$ con $f \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$. Demostrar que $\rho^* \sigma = (-1)^n \sigma$ y que $f(-p) = (-1)^n f(p)$ para $p \in \mathbb{S}^{n-1}$. Concluir que \mathbb{RP}^{n-1} es orientable si y solo si n es par.

Ejercicio 3.2. Sea G un grupo de Lie. Demostrar que la variedad diferencial G es orientable. [Indicación: si $n = \dim G$, tómesese $\xi \neq 0$ en $\Lambda^n T_1^* G$. Mostrar que existe $\nu \in \mathcal{A}^n(G)$ tal que $\nu_1 = \xi$ y $\lambda_g^* \nu = \nu$ para todo $g \in G$.]

Ejercicio 3.3. Si $(M, [\nu])$ es una variedad orientada de dimensión n y sea $\omega \in \mathcal{A}^n(M)$. Dícese que una partición de la unidad $\{h_\alpha : \alpha \in A\}$ está **subordinada** al atlas $\mathfrak{A} =$

⁷Un teorema de Darboux asegura cualquier variedad simpléctica tiene un atlas para el cual ω posee esta misma expresión local en cada carta local. Si Q es una variedad diferencial cualquiera, el espacio total $M = T^*Q$ de su fibrado cotangente es una variedad simpléctica.

⁸La esfera \mathbb{S}^{n-1} está cubierta por n pares antipodales de hemisferios abiertos; al pasar al cociente, \mathbb{RP}^{n-1} posee un atlas de n cartas locales. Luego \mathbb{RP}^{n-1} es una variedad diferencial compacta de dimensión $(n-1)$.

$\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ de M si $\text{soph}_\alpha \subset U_\alpha$ para cada $\alpha \in A$. Si $\{k_\beta : \beta \in B\}$ es otra partición de la unidad subordinada a otro atlas $\mathfrak{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta) : \beta \in B\}$, entonces $\omega = \sum_\alpha h_\alpha \omega = \sum_\beta k_\beta \omega$. Demostrar que

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} (h_\alpha \omega) = \sum_\beta \int_{V_\beta} (k_\beta \omega),$$

para poder concluir que la integral $\int_M \omega$ de la Definición 3.15 está bien definida.

Ejercicio 3.4. Sea $(M, [\nu])$ una variedad orientada y conexa. Escríbase $-M$ para denotar la misma variedad con la orientación opuesta, es decir, $-M = (M, [-\nu])$. Si $\omega \in \mathcal{A}^n(M)$ con $n = \dim M$, comprobar que

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega.$$

Un difeomorfismo $\rho : M \rightarrow M$ *preserva* o *revierte* la orientación según sea $\rho^* \nu \sim \nu$ o bien $\rho^* \nu \sim -\nu$. En el caso de que ρ revierta la orientación, verificar que $\int_M \rho^* \omega = - \int_M \omega$ para todo $\omega \in \mathcal{A}^n(M)$.

Ejercicio 3.5. Si $TM \xrightarrow{\tau} M$ es el fibrado tangente de una variedad diferenciable M , demostrar que el espacio total TM es orientable (sea M orientable o no).

Ejercicio 3.6. Sea R una región⁹ acotada de \mathbb{R}^2 cuya frontera ∂R es una curva suave cerrada y simple (es decir, sin autointersecciones).

- (a) Si V es un abierto tal que $D \cup \partial D \subset V \subseteq \mathbb{R}^2$ y si $f, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones suaves, verificar que la **fórmula de Green**:

$$\oint_{\partial R} f dx + g dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

es un corolario del teorema de Stokes.

- (b) Concluir que el área de la región plana rodeada por una curva suave cerrada y simple C (recorrido contrario a reloj) está dada por la fórmula $A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$.
- (c) Usar esta última fórmula para hallar el área de una elipse de semiejes a y b .

⁹Una **región** de \mathbb{R}^n es un conjunto abierto y conexo.

Ejercicio 3.7. Sea R una región acotada de \mathbb{R}^2 cuya frontera ∂R es una curva suave cerrada y simple. Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ una función suave tal que $f(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \partial D$. Usar el teorema de Stokes para verificar la fórmula:

$$\iint_D \left(f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy = - \iint_D \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) dx \wedge dy.$$

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv 0$ en D , concluir que f se anula idénticamente en D .

Ejercicio 3.8. Sea $\Omega_n := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sigma$ la medida de la esfera \mathbb{S}^{n-1} , donde σ es la $(n-1)$ -forma del Ejercicio 2.5. Sea V_n el volumen de la bola unitaria $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Usar el teorema de Stokes para verificar que

$$V_n = \frac{\Omega_n}{n}.$$

Comprobar que $V_n/V_{n-1} = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{(n-1)/2} dt$, por una integración parcial con respecto a x^n . Demostrar por inducción las siguientes fórmulas para V_n y Ω_n :

$$V_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(\frac{1}{2}n)}, \quad \Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)} = \begin{cases} \frac{2\pi^m}{(m-1)!} & \text{si } n = 2m, \\ \frac{2^{m+1}\pi^m}{(2m-1)!!} & \text{si } n = 2m+1, \end{cases}$$

donde Γ es la función gamma de Euler: $\Gamma(n+1) = n!$ si $n \in \mathbb{N}$, y $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Ejercicios sobre conexiones y curvatura

Ejercicio 4.1. Sea ∇ una conexión afín sobre una variedad diferencial M . Un campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es *paralelo a lo largo de una curva* $\gamma: I \rightarrow M$ que pasa por $p = \gamma(0)$ si $\nabla_{\dot{\gamma}} Y = 0$ (es decir, $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y = 0 \in T_{\gamma(t)}M$ para todo $t \in I$).

Si $Y|_U = f^j \partial_j$ en coordenadas locales de una carta (U, ϕ) , demostrar que Y es paralelo a lo largo de γ si y solo si

$$\frac{d}{dt}(f^i \circ \gamma)(t) + \Gamma_{jk}^i(\gamma(t)) f^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

para todo $t \in I$. Deducir que Y_q queda determinado por Y_p para cada $q \in \gamma((-\varepsilon, \varepsilon))$ para algún $\varepsilon > 0$; y que la correspondencia $Y_p \mapsto Y_q$ determina un isomorfismo lineal $\Psi_{q,p}: T_p M \rightarrow T_q M$ para tales puntos q . Concluir que la conexión ∇ determina una regla de transporte paralelo a lo largo de cada curva suave en M .

Ejercicio 4.2. Verificar la siguiente regla de cambio de variables (4.3) para los símbolos de Christoffel de una conexión afín:

$$\tilde{\Gamma}_{rs}^t = \frac{\partial x^i}{\partial y^r} \frac{\partial x^j}{\partial y^s} \frac{\partial y^t}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^r \partial y^s} \frac{\partial y^t}{\partial x^l}.$$

Ejercicio 4.3. Sea $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ la semirrecta positiva de \mathbb{R} (sin el origen), con coordenada local $r > 0$ y campo vectorial básico $\frac{d}{dr} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^+)$. Sea $Z := r \frac{d}{dr}$ el campo de Euler en \mathbb{R}^+ . Demostrar que Z es paralelo a lo largo de \mathbb{R}^+ con respecto a la conexión afín ∇ sobre \mathbb{R}^* dada por

$$\nabla_{d/dr} \left(\frac{d}{dr} \right) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr}.$$

Comprobar que la geodésica $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ determinado por las condiciones iniciales $\gamma(0) = 1$, $\dot{\gamma}(0) = a \frac{d}{dr}|_1$ está dada por la función exponencial $\gamma(t) = e^{at}$.

Ejercicio 4.4. Comprobar que la receta (4.10) que determina la conexión de Levi-Civita para una métrica riemanniana g es válida, del modo siguiente.

$$g(\nabla_X^g Y, Z) := \frac{1}{2} \{ X g(Y, Z) + Y g(Z, X) - Z g(X, Y) - g([Y, Z], X) - g([X, Z], Y) + g([X, Y], Z) \}$$

- (a) Comprobar que el lado derecho es $C^\infty(M)$ -lineal en X y en Z , por lo cual define una aplicación $(X, Y) \mapsto \nabla_X^g Y$ sobre $\mathfrak{X}(M)$ que es $C^\infty(M)$ -lineal en X y \mathbb{R} -lineal en Y .
- (b) Chequear que esta operación cumple una regla de Leibniz en Y .
- (c) Verificar que esta conexión ∇^g es libre de torsión.
- (d) Verificar que ∇^g es compatible con la métrica g .

Ejercicio 4.5. Si ∇^g es la conexión de Levi-Civita sobre la esfera \mathbb{S}^2 con la métrica redonda $f = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, hallar los 8 coeficientes de Christoffel Γ_{ij}^k en $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\}$ en términos de las coordenadas esféricas (θ, ϕ) .

Ejercicio 4.6. Si (M, g) es una variedad riemanniana orientada, su **forma de volumen riemanniana** se define localmente por

$$v_g := \rho dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad \text{con } \rho := \sqrt{\det[g_{ij}]}.$$

Si Γ_{ij}^k son los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita ∇^g , comprobar esta fórmula local para su *traza parcial*:

$$\Gamma_{jk}^j = \frac{1}{2} g^{jl} \partial_k g_{jl} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x^k} = \partial_k(\log \rho).$$

Ejercicio 4.7. Sea $i: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ un encaje de M como subvariedad de \mathbb{R}^m . Cada espacio tangente $T_p \mathbb{R}^m$ se identifica con \mathbb{R}^m por $A_p = a^j(p) \partial / \partial x^j|_p \leftrightarrow (a^1(p), \dots, a^m(p)) \in \mathbb{R}^m$. La métrica estándar en \mathbb{R}^m está dada por el producto escalar euclidiano, $\tilde{g}(A, B) := a \cdot b$. Defínase la **métrica inducida** g sobre M como la imagen inversa $g := i^*(\tilde{g})$, es decir, $g(X, Y)(p) := X_p \cdot Y_p$ para todo $p \in M$.

- (a) Si $F = \phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ parametriza el dominio de una carta local (U, ϕ) de M , verificar que $g_{ij} = \partial_i F \cdot \partial_j F$ son los componentes de la métrica inducida.
- (b) En particular, usando las coordenadas esféricas

$$F(\theta, \phi) := (a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \theta)$$

de la esfera $M = a \mathbb{S}^2$ de radio a en \mathbb{R}^3 , calcular los g_{ij} como funciones de (θ, ϕ) .

- (c) Calcular los coeficientes de Christoffel para $a \mathbb{S}^2$ en coordenadas esféricas.

Ejercicio 4.8. Considérese el **semiplano superior** $\mathbb{H}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ con la métrica riemanniana $g = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$. Calcular sus coeficientes de Christoffel Γ_{ij}^k y el componente R_{1212} del tensor de curvatura riemanniana. Demostrar que su curvatura escalar es constante: $S \equiv -2$.

Ejercicio 4.9. Sea $\{X_1, \dots, X_n\}$ una base local¹⁰ de campos vectoriales para una carta (U, ϕ) . Defínase los coeficientes locales de una conexión ∇ , de su tensor de torsión T_∇ y de su tensor de curvatura R_∇ por

$$\nabla_{X_i} X_j =: \tilde{\Gamma}_{ij}^k X_k, \quad T_\nabla(X_i, X_j) =: \tilde{T}_{ij}^k X_k, \quad R_\nabla(X_k, X_l)X_j =: \tilde{R}_{jkl}^i X_i.$$

Defínase las 1-formas duales θ^i y una matriz de 1-formas locales $[\omega_j^k]$ por:

$$\langle \theta^i, X_j \rangle := \delta_j^i, \quad \omega_j^k := \tilde{\Gamma}_{ij}^k \theta^i.$$

- (a) Si $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$, verificar que $\tilde{T}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k - \tilde{\Gamma}_{ji}^k - c_{ij}^k$.
- (b) Comprobar que $\tilde{R}_{jkl}^i = X_k \tilde{\Gamma}_{jl}^i - X_l \tilde{\Gamma}_{jk}^i - c_{kl}^m \tilde{\Gamma}_{mj}^i + \tilde{\Gamma}_{lj}^m \tilde{\Gamma}_{km}^i - \tilde{\Gamma}_{kj}^m \tilde{\Gamma}_{lm}^i$.
- (c) Mostrar que las 1-formas θ^i y ω_j^k cumplen las **ecuaciones de estructura** de Cartan:

$$d\theta^k = -\omega_m^k \wedge \theta^m + \frac{1}{2} \tilde{T}_{ij}^k \theta^i \wedge \theta^j, \quad d\omega_j^i = -\omega_m^i \wedge \omega_j^m + \frac{1}{2} \tilde{R}_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l.$$

¹⁰En cada punto $p \in U$, los vectores tangentes X_{ip} forman una base para $T_p M$. Ejemplos son: $X_i = \partial / \partial x^i$ (base local de coordenadas); o bien $X_i = E_i$ con $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ (base local ortonormal respecto de una métrica g).

Índice General

Introducción	1
1 Variedades diferenciales	6
1.1 Definición y ejemplos de variedades	8
1.2 Aplicaciones diferenciables	13
1.3 Vectores tangentes	22
1.4 Subvariedades	25
1.5 Campos vectoriales	30
1.6 Curvas integrales y flujos	37
1.7 Grupos de Lie y espacios homogéneos	41
1.8 Fibrados vectoriales	53
2 Formas diferenciales	57
2.1 Formas diferenciales de primer grado	57
2.2 Álgebra tensorial y álgebra exterior	60
2.3 Formas diferenciales de grado superior	65
2.4 La derivada exterior	71
2.5 La derivada de Lie	78
2.6 Formas cerradas y exactas	83
3 Integración en variedades	88
3.1 Variedades orientables	88
3.2 Integrales de n -formas	95
3.3 Símplices y cadenas	97
3.4 El teorema de Stokes	105
4 Conexiones y Curvatura	115
4.1 Transporte paralelo y derivadas covariantes	115
4.2 Métricas riemannianas	120
4.3 Tensores de curvatura	126
Ejercicios	132
Ejercicios sobre variedades diferenciales	132
Ejercicios sobre formas diferenciales	140
Ejercicios sobre integración en variedades	145
Ejercicios sobre conexiones y curvatura	147