Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 4(1): 31–42 (1997)

COPRODUCTOS FIBRADOS DE MORFISMOS K-FINITOS

Osvaldo Acuña Ortega[1]

Resumen

En éste artículo se estudian condiciones para que coproductos fibrados de morfismos K-finitos sean K-finitos

Abstract

In this paper we study conditions under which the push-out of morphisms K-finite are K-finite, and some related problems

1. Introducción

En el presente trabajo se estudian condiciones para que coproductos fibrados de morfismos K-finitos sean K-finitos. Se prueba que un morfismo $f : X \to Y$ es K-finito si y solo si los morfismos de su factorización epic-monic lo son también. Se prueba un teorema donde se dan varias condiciones equivalentes a la propiedad de K-finitud para monomorfismos.

Este artículo es la continuación del artículo *Algunos aspectos de morfismos K-finitos* [2], del mismo autor, y por tanto el presente trabajo sigue y utiliza las notaciones, definiciones y ciertos resultados de éste.

2. Desarrollo

Proposición 1. Sea $\mathcal{E}$ un topos y $f : X \to Y$ un morfismo. Si $f = i \circ q$, la factorización epic-monic de f entonces f es un morfismo K-finito si y solo si i, q son ambos morfismos K-finitos.

Prueba. ($\Leftarrow$) i, q son K-finitos entonces $f = i \circ q$ es K-finito por proposición 3 de [2].

($\Rightarrow$) Si

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \\ & Q \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

[1] Centro de Investigaciones en Matemáticas Puras y Aplicadas (CIMPA), Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica

es el diagrama de factorización de f, con q epic y i monic. Entonces

$$\models \quad f^{-1}(i(s)) = (i \circ q)^{-1}(i(s)) = q^{-1}(i^{-1}(i(s))) = q^{-1}(s)$$

y luego

$$\models \quad \forall s \in Q \;\; (q^{-1}(s) = f^{-1}(i(s)))$$

Como f es un morfismo K-finito tenemos por Teorema 3.2.8 de [1] que

$$\models \quad \forall s \in Q \;\; (q^{-1}(s) \in K(X))$$

luego q es un morfismo K-finito.

Por otro lado en $\mathcal{E}/X$ el soporte de $f : X \to Y$ es $i : Q \longmapsto Y$, como f es K-finito entonces i es K-finito en $\mathcal{E}/X$ por teorema 3.6 de [3].

Corolario 2. Si $f : X \to Y$ es un morfismo K-finito y si Q es la imagen de f. Entonces Q tiene complemento en Y.

Prueba. Como f es K-finito entonces $i : Q \to Y$ es K-finito y por proposición 2 de [2] Q tiene complemento en Y.

Teorema 3. Sea $i : I \to X$ un monomorfismo en un topos $\mathcal{E}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

(a) $i : I \to X$ tiene complemento

(b) $i : I \to X$ es un morfismo K-finito

(c) $p =< p_1, p_2 >: X + X \to Q$ es K-finito si

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p_2"] \\ X \arrow[r, "p_1"'] & Q \end{tikzcd}$$

es un coproducto fibrado.

(d) $p_1, p_2 : X \to Q$ son ambos K-finitos (p_1, p_2 como en (c))

Prueba. (a)$\Longleftrightarrow$(b) proposición 2 de [2]. (a)$\Rightarrow$(c) proposición 4 de [2]. (c)$\Longleftrightarrow$(d) Si $i_1, i_2 : X \to X + X$ son las dos inclusiones del coproducto, tenemos que $p_1 = p \circ i_1$, $p_2 = p \circ i_2$. Dado que i_1, i_2, p son morfismos K-finitos por proposición 3 de [2] p_1, p_2 son K-finitos.

(d)$\Rightarrow$(b) Como

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p_2"] \\ X \arrow[r, "p_1"'] & Q \end{tikzcd}$$

es también un producto fibrado, siendo p_2 K-finito entonces i es K-finito.

Lema 4. Sea $f : Y \to X$ un morfismo y $Y \xrightarrow{q} I \xrightarrow{i} X$ su factorización epic-monic. Entonces

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p_2"] \\ X \arrow[r, "p_1"'] & Q \end{tikzcd}$$

es un coproducto fibrado si y solo si

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "p_2"] \\ X \arrow[r, "p_1"'] & Q \end{tikzcd}$$

es un coproducto fibrado.

Prueba. ($\Rightarrow$) Sean $g_1, g_2 : X \to Z$ tal que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Considere el siguiente digrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "q"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & & \\ & I \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p_2"] \arrow[ddr, bend left, "g_2"] & \\ & X \arrow[r, "p_1"'] \arrow[drr, bend right, "g_1"'] & Q \arrow[dr, "r"] & \\ & & & Z \end{tikzcd}$$

Tenemos que $g_1 \circ i \circ q = g_2 \circ i \circ q$, como q es epic entonces $g_1 \circ i = g_2 \circ i$. Por lo tanto existe un único morfismo $r : Q \to Z$ tal que $r \circ p_1 = g_1$ y $r \circ p_2 = g_2$. En consecuencia

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "p_2"] \\ X \arrow[r, "p_1"'] & Q \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

($\Leftarrow$) trivial.

Teorema 5. Sea $f : X \to Y$ un morfismo en un topos $\mathcal{E}$. Si f es K-finito y

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "p_2"] \\ Y \arrow[r, "p_1"'] & Q \end{tikzcd}$$

es un coproducto fibrado entonces p_1, p_2 son K-finitos.

Reciprocamente si p_1 o p_2 son K-finitos entonces la imagen I de f en Y tiene complemento o equivalentemente la inclusión $i : I \to Y$ es K-finita.

Prueba. Si

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \\ & I \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

es la factorización epic-monic entonces como f es K-finito por proposición 1, $i : I \to Y$ es K-finito y por el lema 4 y (d) del teorema 3 p_1, p_2 son K-finitos. Recíprocamente, si p_1, p_2 un k-finito como

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p_2"] \\ X \arrow[r, "p_1"'] & Q \end{tikzcd}$$

es un coproducto fibrado por lema 4, dado que i es monic, éste diagrama debe ser también un producto fibrado como p_1 o p_2 son morfismos K-finitos, ésto implica que $i : I \to X$ es K-finito por corolario 9.17 de [4].

Definición 1. Sean $g : X \to Z$ y $f : X \to Y$ dos morfismos en un topos $\mathcal{E}$. Si

$$i_1 : Y \to Y + Z \longleftarrow Z : i_2$$

es un diagrama coproducto. Sean

$$R^* \quad = \quad \cap\{R \subseteq (Y + Z) \times (Y + Z)/R \text{ es un relación de}$$

$$\text{equivalencia } \wedge \{(i_1(f(x)), i_2(g(x)))/x \in X\} \subseteq R\}$$

$Q = (Y+Z)/R^*$, $p_1 = \pi \circ i_1 : Y \to Q$ y $p_2 = \pi \circ i_2 : Z \to Q$ donde $\pi : Y+Z \to Q$ es el morfismo cociente.

Proposición 6. Con la notación de la definición anterior tenemos que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "p_2"] \\ Y \arrow[r, "p_1"'] & Q \end{tikzcd} \qquad (*)$$

es un coproducto fibrado.

Prueba. Como $\pi \circ i_1 \circ f = \pi \circ i_2 \circ g$, entonces $p_1 \circ f = p_2 \circ f$ y por lo tanto (*) conmuta.

Considere el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "h_2"] \\ Y \arrow[r, "h_1"'] & W \end{tikzcd}$$

Sea $h : Y+Z \to W$ tal que $h \circ i_1 = h_1$, $h \circ i_2 = h_2$ y R_h la relación de equivalencia definida por

$$\models \quad (x,y) \in R_h \Longleftrightarrow h(x) = h(y)$$

Como $h_1 \circ f = h_2 \circ g$ tenemos $h \circ i_1 \circ f = h \circ i_2 \circ g$ entonces

$$\begin{aligned} \models x \in X \quad &\Rightarrow \quad h(i_1(f(x))) = h(i_2(g(x))) \\ &\Rightarrow \quad (i_1(f(x)), i_2(g(x))) \in R_h \end{aligned}$$

entonces

$$\models \quad \{(i_1(f(x)), i_2(g(x)))/x \in X\} \subseteq R_h$$

por lo tanto $R^* \subseteq R_h$.

Sea $j : Q \to Z$ definida tal que $\models \quad j([s]) = h(x)$ donde $[s]$ es la clase de equivalencia de x con $x \in Y+Z$.

Debemos probar que j esté bien definida:

$$\begin{aligned} \models [s] = [s'] \quad &\Rightarrow \quad (s,s') \in R^* \\ &\Rightarrow \quad (s,s') \in R_h \\ &\Rightarrow \quad h(s) = h(s') \end{aligned}$$

Queremos probar que j es un morfismo, único tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "p_2"] \arrow[ddr, bend left, "h_2"] & \\
Y \arrow[r, "p_1"'] \arrow[drr, bend right, "h_1"'] & Q \arrow[dr, "j"] & \\
& & W
\end{tikzcd}$$

Por definición de j tenemos $j \circ \pi = h$ y entonces

$$j \circ p_1 = j \circ \pi \circ i_1 = h \circ i_1 = h_1$$

$$j \circ p_2 = j \circ \pi \circ i_2 = h \circ i_2 = h_2$$

por lo tanto $j \circ p_1 = h_1$ y $j \circ p_2 = h_2$.

Por otra lado suponga que existe otro morfismo $K : Q \to W$ tal que $k \circ p_1 = h_1$ y $k \circ p_2 = h_2$ entonces $k \circ \pi \circ i_1 = h_2$ y $k \circ \pi \circ i_2 = h_1$ y por definición del coproducto $Y + Z$ tenemos que $k \circ \pi = h$, del coproducto $Y + Z$ tenemos que $k \circ \pi = h$, así se obtiene que $j \circ \pi = k \circ \pi$, como π es un epímorfismo se tiene que $j = k$.

Definición 2. Sean $f : X \to Y$ y $g : X \to Z$, dos morfismos, denote por R el subobjeto de $(Y + Z) \times (Y + Z)$ definido por la unión siguiente:

$$\{i_1(f(x)), i_1(f(\overline{x}))/x, \overline{x} \in X \wedge g(x) = g(\overline{x})\} \cup \Delta_{Y+Z} \cup$$

$$\{(i_1, (f(x)), i_2(g(x)))/x \in X\} \cup \{(i_2(g(x)), i_1(f(x))/x \in X\}$$

donde $Y \xrightarrow{i_1} Y + Z \xleftarrow{i_2} Z$ es un diagrama coproducto.

Proposición 7. Si f es un monomorfismo entonces $R = R^*$, en particular R es una relación de equivalencia.

Prueba. Primero probamos que R es una relación de equivalencia

(i) R es reflexiva ya que $\Delta_{Y+Z} \subseteq R$

(ii) R es simétrica:

$$\begin{aligned}
\models (t, s) \in R \quad &\Rightarrow \quad (\exists_{x, \overline{x} \in X} (t = i_1(f(x)) \wedge s = i_1(f(\overline{x})) \wedge g(x) = g(\overline{x}))) \vee t = s \\
&\qquad \vee \exists_{x \in X} (t = i_1(f(x)) \wedge s = i_2(g(x))) \vee \exists_{x \in X} (t = i_2(g(x)) \\
&\qquad \wedge s = i_1(f(x))) \\
&\Rightarrow \quad (s, t) \in R \vee (s, t) \in R \vee (s, t) \in R \vee (s, t) \in R \\
&\Rightarrow \quad (s, t) \in R
\end{aligned}$$

(iii) R es transitiva.

$$
\begin{array}{ll}
\models & (r,s) \in R \wedge (s,t) \in R \\
\Rightarrow & \exists_{x,\overline{x}\in X}(r = i_1(f(x)) \wedge s = i_1 f(\overline{x})) \wedge g(x) = g(\overline{x})) \vee (s,t) \in R \\
\vee & r = s \wedge (s,t) \in R \vee (\exists_{x\in X} r = i_1(f(x)) \wedge s = i_2(g(x)) \wedge (s,t) \in R) \\
\vee & (\exists_{x\in X} r = i_2(g(x)) \wedge s = i_1(f(x)) \wedge (s,t) \in R \\
\Rightarrow & \exists_{x,\overline{x}\in X}(r = i_1(f(x)) \wedge s = i_1(f(\overline{x})) \wedge g(x) = g(\overline{x}) \wedge (s = t \vee \\
 & \exists_{x,\overline{x}_1}(s = i_1 f(x_1)) \wedge t = i_1(f(\overline{x}_1)) \wedge g(x_1) = g(\overline{x}_1)) \vee \\
 & \exists_{x_1\in X}(s = i_1(f(x_1)) \wedge t = i_2(g(x_1))) \\
\vee & \exists_{x_1\in X}(s = i_2(g(x_1)) \wedge t = i_1(f(x_1)))) \vee \exists_{x\in X}(r = i_1(f(x_1)) \wedge t = i_2(g(x_1))) \\
\vee & \exists_{x_1\in X}(s = i_2(g(x_1)) \wedge t = i_1(f(x_1))) \vee \\
 & \exists_{x\in X}(r = i_1(f(x)) \wedge s = i_2(g(x))) \wedge (s,t) \in R \\
\vee & \exists_{x\in X}(r = i_2(g(x)) \wedge s = i_1(f(x)) \wedge (s,t) \in R \vee (r,t) \in R \\
\Rightarrow & ((r,t) \in R \vee \exists_{x,x_1,\overline{x},\overline{x}_1}(r = i_1(f(x)) \wedge s = i_1(f(\overline{x})) \wedge s = i_1(f(x_1)) \wedge t = i_1(f(\overline{x}_1)) \\
\vee & g(x) = g(\overline{x}) \wedge g(x_1) = g(\overline{x}_1)) \vee \exists_{x,\overline{x},x_1\in X}(r = i_1(f(x)) \\
 & \wedge s = i_1(f(\overline{x})) \wedge g(x) = g(\overline{x}) \\
\wedge & s = i_1(f(x_1)) \wedge t = i_2(g(x_1))) \vee \exists_{x,\overline{x},x_1\in X}(r = i_1(f(x)) \wedge \\
 & s = i_1(f(\overline{x})) \wedge g(x) = g(\overline{x}) \wedge s = i_2(g(x_1)) \wedge t = i_1(f(x_1))) \vee \\
 & \exists_{x\in X}(r = i_1(f(x)) \wedge s = i_2(g(x))) \wedge (r,t) \in R \\
\vee & \exists_{x\in X}(r = i_2(g(x)) \wedge s = i_1(f(x))) \wedge (s,t) \in R \vee (r,t) \in R \\
\Rightarrow & (\exists_{x,x_1,\overline{x},\overline{x}_1\in X}(r = i_1(f(x)) \wedge s = i_1(f(\overline{x})) \wedge \overline{x} = x_1 \wedge t = i_1(f(\overline{x}_1)) \\
\wedge & g(x) = g(\overline{x}) \wedge g(x_1) = g(\overline{x}_1)) \vee \exists_{x,\overline{x},x_1\in X}(r = i_1(f(x)) \wedge s = i_1(f(\overline{x})) \wedge \overline{x} = x_1 \\
\wedge & t = i_2(g(x_1)) \wedge g(x) = g(\overline{x})) \vee \text{falso}\ ) \vee \exists_{x\in X}(r = i_1(f(x)) \wedge s = i_2(g(x)) \wedge (s,t) \in R \\
\vee & \exists_{x\in X}(r = i_2(g(x)) \wedge s = i_1(f(x)) \wedge (s,t) \in R \vee (r,t) \in R \\
\Rightarrow & (\exists_{x,\overline{x}_1}(r = i_1(f(x)) \wedge t = i_1(f(\overline{x}_1)) \wedge g(x) = g(\overline{x}_1)) \\
\vee & \exists_{x,x_1,\overline{x}\in X}(r = i_1(f(x)) \wedge t = i_2(g(x_1)) \wedge g(x) = g(\overline{x}) = g(x_1))) \\
\vee & \exists_{x\in X}(r = i_1(f(x)) \wedge s = i_2(g(x))) \wedge (s,t) \in R \vee \\
 & \exists_{x\in X}(r = i_2(g(x)) \wedge r = i_1(f(x))) \wedge (s,t) \in R \\
\vee & (r,t) \in R \\
\Rightarrow & (r,t) \in R \vee (r,t) \in R \vee \exists_{x\in X}(s = i_1(f(x))) \wedge r = i_2(g(x)) \wedge (s,t) \in R \\
\vee & \exists_{x\in X}(r = i_2(g(x)) \wedge s = i_1(f(x))) \wedge (s,t) \in R \vee (r,t) \in R \\
\Rightarrow & (\exists_{x\in X}(r = i_1(f(x)) \wedge s = i_2(g(x))) \vee \exists_{x\in X}(r = i_2(g(x)) \wedge t = i_1(f(x))) \wedge (s,t) \in R \\
 & \vee (r,t) \in R \\
\Rightarrow & \exists_{x\in X}(r = i_1(f(x)) \wedge s = i_2(g(x))) \vee \exists_{x\in X}(r = i_2(g(x)) \wedge s = i_1(f(x))) \\
\wedge & (s = t \vee \exists_{x_1,\overline{x}_1\in X}(s = i_1(f(x_1)) \wedge t = i_1(f(\overline{x}_1)) \wedge g(x_1) = g(\overline{x}_1)) \vee \\
\vee & \exists_{x_1\in X}(s = i_1(f(x_1)) \wedge t = i_2(g(x_1))) \vee \exists_{x_1\in X}(s = i_2(g(x_1)) \wedge t = i_1(f(x_1))) \\
 & \vee (r,t) \in R
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\Rightarrow & (r,t) \in R \vee \text{falso } \vee \exists_{x,x_1,\overline{x}_1 \in X}(r = i_2(g(x)) \wedge s = i_1(f(x)) \wedge s = i_1(f(x)) \\
\wedge & t = i_1(f(\overline{x}_1)) \wedge g(x_1) = g(\overline{x}_1)) \vee \text{falso } \vee \exists_{x,x_1 \in X}(r = i_2(g(x)) \wedge s = i_1(f(x)) \\
\wedge & s = i_1(f(x_1)) \wedge t = i_2(g(x_1))) \vee \exists_{x,x_1 \in X}(r = i_1(f(x)) \wedge s = i_2(g(x)) \\
\wedge & s = i_2(g(x_1)) \wedge t = i_1(f(x_1))) \vee \text{falso } \vee (r,t) \in R \\
\Rightarrow & \exists_{x,x_1,\overline{x}_1 \in X}(r = i_2(g(x)) \wedge x = x_1 \wedge t = i_1(f(\overline{x}_1) \wedge g(x_1) = g(\overline{x}_1)) \vee \\
\vee & \exists_{x,x_1 \in X}(r = i_2(g(x)) \wedge x = x_1 \wedge t = i_2(g(x_1))) \vee \exists_{x,x_1 \in X}(r = i_1(f(x)) \wedge \\
 & x = x_1 \wedge t = i_1(f(x_1))) \vee (r,t) \in R \\
\Rightarrow & \exists_{\overline{x}_1 \in X}(r = i_2(g(\overline{x}_1)) \wedge t = i_1(f(\overline{x}_1))) \vee \exists_{x \in X}(r = i_2(g(x)) \wedge t = i_2(g(x))) \\
 & \vee \exists_{x \in X}(r = i_1(f(x)) \wedge t = i_1(f(x))) \vee (r,t) \in R \\
\Rightarrow & (r,t) \in R \vee r = t \vee r = t \vee (r,t) \in R \\
\Rightarrow & (r,t) \in R
\end{array}
$$

Por lo tanto R es transitiva y entonces es una relación de equivalencia. Por otro lado como

$$\{(i_1(f(x)), i_2(g(x)))/x \in X\} \subseteq R \ ,$$

siendo R una relación de equivalencia, tenemos que $R^* \subseteq R$.

Si R' es cualquier relación de equivalencia que contiene

$$\{(i_1(f(x)), i_2(g(x)))/x \in X\}$$

entonces $R' \supseteq \{(i_2(g(x)), i_1(f(x)))/x \in X\}$. Por otro lado tenemos que

$$
\begin{array}{ll}
\models & x, \overline{x} \in X \wedge g(x) = g(\overline{x}) \\
\Rightarrow & (i_1(f(x)), i_2(g(x)) \in R' \wedge (i_1(f(\overline{x})), i_2(g(\overline{x})) \in R' \\
 & \wedge g(x) = g(\overline{x}) \\
\Rightarrow & (i_1(f(x)), i_2(g(x)) \in R' \wedge (i_2(g(x)), i_1(f(\overline{x}))) \in R' \\
\Rightarrow & (i_1(f(x)), i_1(f(\overline{x}))) \in R' \\
\Rightarrow & \{i_1(f(x)), i_1(f(\overline{x}))/x, \overline{x} \in X \wedge g(x) = g(\overline{x})\} \subseteq R'
\end{array}
$$

Por lo tanto $R \subseteq R'$ y entonces $R \subseteq R^*$ y $R = R^*$.

Proposición 8. En el siguiente coproducto fibrado

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "pr_2"] \\
Y \arrow[r, "pr_1"'] & Q
\end{tikzcd}
\qquad (*)
$$

tenemos que si f es un monomorfismo, entonces f es un morfismo K-finito si y sólo si pr_2 es un morfismo K-finito. En particular la imagen de f es Y tiene complemento si y sólo si la imagen de pr_2 en Q tiene complemento.

Prueba. Es conocido que si f es un monomorfismo entonces (*) es también un producto fibrado y pr_2 es un monomorfismos. En particular si pr_2 es K-finito, entonces f es también K-finito ya que los funtores imagen inversa de morfismos geométricos preservan objetos K-finitos.

Recíprocamente suponga que f es un monomorfismo K-finito entonces si X' es la imagen de f, X' tiene complemento X'' en Y. Sea Z' es la imagen de pr_2 en Q y Z'' la imagen del morfismo

$$pr_1/X'' : X'' \to Q$$

Queremos probar que Z'' es el complemento de Z' y como pr_2 es monic, esto implicaría que pr_2 es un morfismo K-finito.

Primero probemos que

$$Z' \cap Z'' = \emptyset$$

$$\begin{array}{ll}
\models & q \in Z' \cap Z'' \\
\Rightarrow & \exists_{z\in Z} q = pr_2(z) \wedge \exists_{y\in Y}(q = pr_1(y) \wedge y \in X'') \\
\Rightarrow & \exists_{z\in Z, y\in Y}(pr_2(z) = pr_1(y) \wedge y \in X'') \\
\Rightarrow & \exists_{z\in Z, y\in Y}(\pi(i_2(z)) = \pi(i_1(y)) \wedge y \in X'') \\
\Rightarrow & \exists_{z\in Z, y\in Y}((i_2(z), i_1(y)) \in R \wedge y \in X'') \\
\Rightarrow & \exists_{z\in Z, y\in Y}(\text{falso } \vee \text{falso } \vee \text{falso } \vee \exists_{x\in X} z = g(x) \wedge i_1(f(x)) = i_1(y) \wedge y \in X'') \\
\Rightarrow & \exists_{z\in Z, y\in Y}(y \in X' \wedge y \in X'') \\
\Rightarrow & \exists_{z\in Z, y\in Y}(\text{falso }) \\
\Rightarrow & \text{falso}
\end{array}$$

Por lo tanto $\models q \in Z' \cap Z'' \Rightarrow$ falso. Luego $Z' \cap Z'' = \emptyset$

Probemos ahora que

$$Z' \cup Z'' = Q$$

$$\begin{array}{ll}
\models & q \in Q \\
\Rightarrow & \exists_{y\in Y} q = \pi(i_1(y)) \vee \exists_{z\in Z} q = \pi(i_2(z)) \\
\Rightarrow & \exists_{x\in X} q = \pi(i_1(f(x)) \vee \exists_{x''\in X''} q = \pi(i_1(x'')) \vee \exists_{z\in Z} q = \pi(i_2(z)) \\
\Rightarrow & \exists_{x\in X} q = p\pi_1(f(x)) \vee q \in Z'' \vee q \in Z' \\
 & (\text{como } p\pi_1(f(x)) = pr_2(g(x))) \\
\Rightarrow & \exists_{x\in X} q = pr_2(g(x)) \vee q \in Z'' \vee q \in Z' \\
\Rightarrow & q \in Z' \vee q \in Z'' \vee q \in Z' \\
\Rightarrow & q \in Z' \vee q \in Z'' \\
\Rightarrow & q \in Z' \cup Z''
\end{array}$$

Por lo tanto $Q = Z' \cup Z''$ y Z'' es el complemento de Z' en Q, que es lo que queríamos probar.

Corolario 9. Si en el siguiente coproducto fibrado

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle pr_2} \\ Y & \xrightarrow[pr_1]{} & Q \end{array} \qquad (*)$$

f es un monomorfismo K-finito y g es un morfismo K-finito entonces pr_1 es un morfismo K-finito.

Prueba. Si g es un monomorfismo por la proposición anterior pr_1 es K-finito.

Suponga que g es un epimorfismo, entonces pr_1 es un epimorfismo también. Sea Y' la imagen de f en Y es Y'' su complemento, entonces

$$\begin{aligned} \models\ & \overline{y} \in Y'' \wedge y \in (pr_1)^{-1}(pr_1(\overline{y})) \\ \Rightarrow\ & pr_1(y) = pr_1(\overline{y}) \wedge \overline{y} \in Y'' \\ \Rightarrow\ & (i_1(y), i_1(\overline{y})) \in R \wedge \overline{y} \in Y'' \\ \Rightarrow\ & i_1(y) = i_1(\overline{y}) \vee \text{falso} \ \vee \text{falso} \ \vee \text{falso} \\ \Rightarrow\ & y = \overline{y} \\ \Rightarrow\ & y \in \{\overline{y}\} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \models\ & \overline{y} \in Y'' \\ \Rightarrow\ & \forall_{y \in Y}(y \in (pr_1)^{-1}(pr_1(\overline{y})) \Rightarrow y \in \{\overline{y}\}) \\ \Rightarrow\ & (pr_1)^{-1}(pr_1(\overline{y})) \subseteq \{\overline{y}\} \end{aligned}$$

como $\models \{\overline{y}\} \subseteq (pr_1)^{-1}(pr_1(\overline{y}))$ entonces

$$\begin{aligned} \models \overline{y} \in Y'' \ \Rightarrow\ & (pr_1)^{-1}(pr_1(\overline{y})) = \{\overline{y}\} \\ \Rightarrow\ & (pr_1)^{-1}(pr_1(\overline{y})) \in K(Y) \end{aligned}$$

luego

$$\models \overline{y} \in Y'' \Rightarrow (pr_1)^{-1}(pr_1(y)) \in K(Y)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \models\ & \overline{x} \in X \wedge y \in (pr_1)^{-1}(pr_1(f(\overline{x}))) \\ \Rightarrow\ & pr_1(y) = pr_1(f(\overline{x})) \\ \Rightarrow\ & (i_1(y), i_1(f(\overline{x})) \in R \\ \Rightarrow\ & i_1(y) = i_1(f(x)) \vee \exists_{x_1, x_2 \in X}(i_1(y) = i_1(f(x_1)) \wedge i_1(f(\overline{x})) = \\ & i_1(f(x_2)) \wedge g(x_1) = g(x_2) \vee \text{falso} \ \vee \text{falso} \\ \Rightarrow\ & y = f(\overline{x}) \vee \exists_{x_1, x_2 \in X}(y = f(x_1) \wedge \overline{x} = x_2 \wedge g(x_1) = g(x_2)) \\ \Rightarrow\ & y \in \{f(\overline{x})\} \vee \exists_{x_1 \in X}(y = f(x_1) \wedge g(x_1) = g(\overline{x})) \\ \Rightarrow\ & y \in \{f(\overline{x})\} \vee \exists_{x_1 \in X}(y = f(x_1) \wedge x_1 \in g^{-1}(g(\overline{x})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & y \in \{f(\overline{x})\} \vee y \in f(g^{-1}(g(\overline{x}))) \\ & \text{como} \models f(\overline{x}) \in f(g^{-1}(g(\overline{x}))) \\ \Rightarrow \quad & y \in f(g^{-1}(g(\overline{x}))) \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\models \overline{x} \in X \Rightarrow \forall_{y \in Y}(y \in (pr_1)^{-1}(pr_1(f(\overline{x})) \Rightarrow y \in f(g^{-1}(g(\overline{x}))))$$

es decir

$$\models \overline{x} \in X \Rightarrow (pr_1)^{-1}(pr_1(f(\overline{x})) \subseteq f(g^{-1}(g(\overline{x}))))$$

Tenemos también que

$$\begin{aligned} \models \quad & z \in f(g^{-1}(g(\overline{x}))) \\ \Rightarrow \quad & \exists_{x \in X}(z = f(x) \wedge g(x) = g(\overline{x})) \\ \Rightarrow \quad & (i_1(z), i_1(f(\overline{x}))) \in R \\ \Rightarrow \quad & \pi \circ i_1(z) = \pi \circ i_1(f(\overline{x})) \\ \Rightarrow \quad & pr_1(z) = pr_1(f(\overline{x})) \\ \Rightarrow \quad & z \in (pr_1)^{-1}(pr_1(f(\overline{x}))) \end{aligned}$$

luego

$$\models f(g^{-1}(g(x))) \subseteq (pr_1)^{-1}(pr_1(f(\overline{x})))$$

entonces

$$\models \overline{x} \in X \Rightarrow (pr_1)^{-1}(pr_1(f(\overline{x}))) = f(g^{-1}(g(\overline{x})) \quad .$$

Dado que g es un morfismo K-finito sabemos que $\models \forall_{\overline{x} \in X} g^{-1}(g(\overline{x})) \in K(X)$ y como $f(K(X)) \subseteq K(Y)$ esto implica

$$\models \overline{x} \in X \Rightarrow (pr_1)^{-1}(pr_1(f(\overline{x}))) \in K(Y)$$

y entonces

$$\begin{aligned} \models \overline{y} \in Y' \quad \Rightarrow \quad & \exists_{\overline{x} \in X} \overline{y} = f(\overline{x}) \\ \Rightarrow \quad & \exists_{\overline{x} \in X} \overline{y} = f(x) \wedge (pr_1)^{-1}(pr_1(f(\overline{x}))) \in K(Y) \\ \Rightarrow \quad & \exists_{\overline{x} \in X} (pr_1)^{-1}(pr_1(\overline{y})) \in K(Y) \\ \Rightarrow \quad & (pr_1)^{-1}(pr_1(\overline{y})) \in K(Y) \end{aligned}$$

es decir

$$\models y \in Y' \Rightarrow (pr_1)^{-1}(pr_1(\overline{y})) \in K(Y) \quad .$$

Como $Y = Y' \cup Y''$ obtenemos

$$\models y \in Y \Rightarrow (pr_1)^{-1}(pr_1(y)) \in K(Y)$$

que es equivalente a decir que pr_1 es un morfismo K-finito ya que $pr_1 : Y \to Q$ es un epimorfismo.

Si g es un morfismo general y $g = i \circ q$ es la factorización epic-monic, considere el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f"'] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\overline{f}"] & Z \arrow[d, "\overline{pr_2}"] \\
Y \arrow[r, "\overline{q}"'] & Q_1 \arrow[r, "\overline{i}"'] & Q_2
\end{tikzcd}$$

donde los dos cuadrados son coproductos fibrados. Por lo tanto el rectángulo formados por estos cuadrados es también un coproducto de fibrado y entonces $\overline{i} \circ \overline{q}$ es isomorfo a pr_1. Por los argumentos anteriores $\overline{i}$, $\overline{q}$ un morfismo K-finito lo que implica que $\overline{i} \circ \overline{q}$ es K-finito y entonces pr_1 es K-finito.

Referencias

[1] Acuña Ortega, O. (1977) *Finiteness in Topoi.* Diseertation, Wesleyan University, Middletown, Connecticut.

[2] Acuña Ortega, O. "Algunos aspectos de morfismos K-finitos en un topos elemental", por aparecer.

[3] Kock, A.; Lecouturuier, P.; Mikkelsen, C.J. (1975) "Some topos-theoretic concepts of finiteness", *Model Theory and Topoi*, Springer Lectures Notes in Math. **445**: 209–283.

[4] Johnstone, P.T. (1977) *Topos Theory.* L.M.S Mathematical Monographs **10**, Academic Press, New York.