

MA-729:* TEORÍA DE REPRESENTACIONES

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

II Ciclo Lectivo del 2015

Introducción

La **teoría de representaciones** es un término que comprende algunos temas del álgebra y del análisis matemático cuya característica común es la descripción de simetría en espacios vectoriales. Un juego de matrices cuadradas $n \times n$, por ejemplo, actúa directamente como transformaciones lineales sobre un espacio vectorial de dimensión n y no necesita ser representada de otra forma. Sin embargo, diversas otras estructuras algebraicas – en principio más abstractas – como grupos finitos o álgebras de Lie, por ejemplo, pueden actuar indirectamente sobre espacios vectoriales. En ese segundo caso, se trata de asociarle a cada elemento abstracto una matriz (o una aplicación lineal), conservando las leyes de suma o composición, sobre un espacio vectorial apropiado. La tarea de la teoría de representaciones es deducir propiedades esenciales de la estructura original a partir de las matrices que la representan.

Tradicionalmente, las representaciones de grupos se estudian como un apartado de la teoría de grupos; las representaciones de álgebras asociativas forman un subtema de la teoría de anillos; las representaciones de los grupos de Lie conforman un aspecto de la geometría diferencial; etcétera. En los últimos años, ha emergido un enfoque “holístico” que subsume todas estas estructuras bajo un esquema general, el cual es el objeto de este curso.

Si una determinada estructura algebraica admite una topología, es natural pedir que las correspondencias con juegos de aplicaciones lineales sea continua: así, por ejemplo, para representar un grupo compacto se usa un homomorfismo continuo entre el grupo y un juego de aplicaciones lineales sobre un espacio vectorial (real o complejo) de dimensión finita. Para representar un álgebra normada, se puede usar operadores lineales acotados sobre un espacio de Hilbert infinitodimensional. Aún en estos casos, es importante conocer a fondo las *propiedades algebraicas* de sus representaciones antes

*La sigla MA-729 es ficticia. Para efectos administrativos, la designación oficial de este curso es “MA-710: Tópicos de Álgebra Superior”.

de abordar los aspectos topológicos. Por lo tanto, en este curso introductorio el enfoque es mayormente algebraico, sin recurso a las herramientas del análisis funcional.

El origen de esta teoría es el estudio de los caracteres de grupos finitos, emprendido por Georg Frobenius y sus seguidores, a partir de 1896. Se debe comenzar, entonces, por estudiar las representaciones de un grupo finito G sobre un espacio \mathbb{F} -vectorial V . (Aquí el cuerpo de escalares \mathbb{F} puede ser cualquiera, aunque muchas veces conviene que \mathbb{F} sea algebraicamente cerrada: entre los cuerpos de característica cero, el cuerpo \mathbb{C} de los números complejos tiene un papel privilegiado.) Ahora bien, cada representación de G da lugar a una representación del álgebra de grupo $\mathbb{F}[G]$ sobre el mismo espacio vectorial V .

Una segunda fuente histórica de estas ideas son las llamadas álgebras de Lie (no asociativas), introducidas por Sophus Lie en la década de las 1870s para modelar simetrías infinitésimas de ecuaciones diferenciales. Cada álgebra de Lie \mathfrak{g} puede ser encajada en un álgebra asociativa $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$; y nuevamente las representaciones de las dos estructuras están ligadas.

El punto de partida, entonces, es el contexto de las acciones de álgebras asociativas sobre espacios vectoriales. Las otras estructuras aparecen luego como casos particulares.

Temario

Álgebras asociativas Estructuras algebraicas: grupos y álgebras sobre un cuerpo \mathbb{F} . Representaciones de álgebras irreducibles e indescomponibles, el lema de Schur. Ejemplos: el álgebra $\mathbb{F}[G]$ de un grupo finito, el álgebra de caminos de un carcaj, las álgebras tensorial, simétrica y exterior de un espacio vectorial. Álgebras de Lie y sus álgebras envolventes, el teorema de Poincaré, Birkhoff y Witt. Representaciones irreducibles del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Representaciones de álgebras Representaciones semisimples, el teorema de densidad. La estructura de álgebras finitodimensionales. Representaciones indescomponibles, el teorema de Krull y Schmidt. El carácter de una representación.

Representaciones de grupos finitos Semisimplicidad y el teorema de Maschke. Caracteres de un grupo, funciones de clase. Las relaciones de ortogonalidad de Schur. Ejemplos de representaciones, tablas de caracteres. Representaciones inducidas, la reciprocidad de Frobenius.

Representaciones del grupo S_n Acciones tensoriales de álgebras, el teorema de Schur y Weyl. Representaciones de S_n , los diagramas de Young. Polinomios simétricos, los polinomios de Schur. La fórmula de caracteres de Frobenius.

Álgebras de Lie semisimples Elementos de Casimir, el teorema de reducibilidad completa de Weyl. Álgebra de Lie complejas semisimples y sus subálgebras de Cartan. Raíces de un álgebra de Lie semisimple. Sistemas de raíces, ejemplos (A_l , B_l , C_l , D_l , E_6 , E_7 , E_8 , F_4 y G_2). El grupo de Weyl de un sistema de raíces.

Bibliografía

El temario sigue en parte las lecciones de Etingof: *Introduction to Representation Theory*. Otros tratamientos unificadores son los libros de Fulton & Harris y de Zhelobenko. La mayoría de los otros libros de la lista que sigue enfatizan las representaciones de grupos, pero también ofrecen una perspectiva global.

- [1] Pavel Etingof *et al*, *Introduction to Representation Theory*, Student Mathematical Library **59**: American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [2] W. Fulton, *Young Tableaux*, London Mathematical Society Student Texts **35**: Cambridge University Press, 1997.
- [3] W. Fulton & J. Harris, *Representation Theory: A First Course*, Graduate Texts in Mathematics **129**: Springer, New York, 2004.
- [4] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics **9**: Springer, New York, 1972.
- [5] C. Procesi, *Lie Groups: An Approach through Invariants and Representations*, Universitext: Springer, New York, 2007.
- [6] J.-P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Graduate Texts in Mathematics **42**: Springer, New York, 1977.
- [7] G. E. Shilov, *Linear Algebra*, Dover Books, Mineola, NY, 1977.
- [8] B. Simon, *Representations of Finite and Compact Groups*, Graduate Studies in Mathematics **10**: American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [9] D. P. Zhelobenko, *Principal Structures and Methods of Representation Theory*, Translations of Mathematical Monographs **228**: American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

1 Álgebras asociativas

1.1 Estructuras algebraicas

Un *álgebra asociativa* sobre un cuerpo \mathbb{F} es un anillo y la vez un espacio \mathbb{F} -vectorial, cuyas operaciones algebraicas (suma, producto y multiplicación escalar) son compatibles. Dos ejemplos destacados son $\mathbb{F}[X]$, el álgebra de polinomios con coeficientes en \mathbb{F} ; y $M_n(\mathbb{F})$, el álgebra de matrices $n \times n$ (para algún n fijo) con entradas en \mathbb{F} .

A continuación, se ofrece un resumen de las definiciones formales de estas y otras estructuras algebraicas, más que nada para establecer las notaciones usadas en adelante.

Definición 1.1. Un **grupo** es un conjunto G con un *producto* $G \times G \rightarrow G: (g, h) \mapsto gh$, el cual es *asociativo*: $(gh)k = g(hk)$ para $g, h, k \in G$; que posee un *elemento neutro* $1 \in G$ tal que $1g = g1 = g$ para $g \in G$; y en el cual todo elemento g posee un *inverso* $g^{-1} \in G$ tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = 1$.

El grupo G es *abeliano* si su operación binaria es conmutativa: $gh = hg$ para todo $g, h \in G$. En grupos abelianos se acostumbra emplear notación aditiva: $g + h = h + g$ en G ; el elemento neutro para la *suma* se denota por 0 . \diamond

Definición 1.2. Un **anillo** es un conjunto R con dos operaciones binarias asociativas, una *suma* y un **producto**, tales que $(R, +)$ sea un grupo abeliano; (R, \cdot) posee un elemento neutro (la *identidad* 1) para el producto; y se cumplen las *leyes distributivas*: $a(b + c) = ab + ac$ y $(a + b)c = ac + bc$ para todo $a, b, c \in R$.

El anillo es *conmutativo* si $ab = ba$ para todo $a, b \in R$. \diamond

Definición 1.3. Un **cuerpo** es un anillo conmutativo \mathbb{F} en el cual todo elemento no cero posee un inverso: $tt^{-1} = t^{-1}t = 1$ para todo $t \neq 0$. En otras palabras, \mathbb{F} es un anillo y $\mathbb{F}^\times \equiv \mathbb{F} \setminus \{0\}$ es un grupo multiplicativo.¹ \diamond

Definición 1.4. Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} (brevemente: un “espacio \mathbb{F} -vectorial”) es un grupo abeliano V dotado de una *multiplicación escalar* $\mathbb{F} \times V \rightarrow V: (t, x) \mapsto tx$ distributiva: $t(x + y) = tx + ty$ y $(s + t)x = sx + tx$ para $s, t \in \mathbb{F}$ y $x, y \in V$; que además satisface $s(tx) = (st)x$ y $1x = x$.

Si V y W son dos espacios \mathbb{F} -vectoriales, una función $R: V \rightarrow W$ es una **aplicación \mathbb{F} -lineal** (o simplemente *lineal*) si $R(sx + ty) = sR(x) + tR(y)$ para todo $s, t \in \mathbb{F}$ y $x, y \in V$. En el caso de que $V = W$, dicese que R es un **operador \mathbb{F} -lineal** sobre V . \diamond

¹El término **cuerpo** viene del alemán *Körper*, un término introducido por Richard Dedekind en 1871; se llama *corps* en francés, *corp* en rumano, etc., pero en inglés se usa la palabra *field*. En español, no debe usarse la traducción secundaria *campo*, que denota campos vectoriales, campos magnéticos, etc.

Definición 1.5. Un **álgebra asociativa** sobre un cuerpo \mathbb{F} (brevemente: un “ \mathbb{F} -álgebra”) es un anillo A que es a la vez un espacio \mathbb{F} -vectorial, en la cual $t(ab) = (ta)b$ para $t \in \mathbb{F}$ y $a, b \in A$. (Es decir, la multiplicación escalar es distributiva sobre el producto del anillo A .)² \diamond

Definición 1.6. Si V y W son dos espacios \mathbb{F} -vectoriales, la totalidad de aplicaciones \mathbb{F} -lineales de V en W se denota por $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. \llbracket Otro nombre para una aplicación \mathbb{F} -lineal es \mathbb{F} -homomorfismo. \rrbracket Este es evidentemente un espacio \mathbb{F} -lineal, al escribir $(sR_1 + tR_2)(x) := sR_1(x) + tR_2(x)$ para $x \in V$.

En el caso $V = W$, se escribe $\text{End}_{\mathbb{F}} V := \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$; un operador \mathbb{F} -lineal sobre V también se llama un \mathbb{F} -endomorfismo lineal de V . Este espacio vectorial es de hecho una \mathbb{F} -álgebra, cuyo producto es la composición de operadores, esto es, $RS : x \mapsto R(S(x))$. Dicho producto es evidentemente asociativo pero rara vez conmutativo.³ \diamond

Cada espacio \mathbb{F} -vectorial V posee una *base*: un conjunto B de vectores linealmente independiente que genera V , es decir, $V = \{t_1x_1 + \dots + t_nx_n : x_1, \dots, x_n \in B\}$. Todas las bases de V poseen la misma cardinalidad, la cual es la *dimensión* del espacio vectorial, $\dim V \equiv \dim_{\mathbb{F}} V := \#(B)$. Si B es finita, se puede escribir $B = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Si V y W son espacios \mathbb{F} -vectoriales finitodimensionales, y si $\{y_1, \dots, y_m\}$ es una base de W , entonces $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ también es finitodimensional, con

$$\dim \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) = (\dim V)(\dim W).$$

En efecto, cualquier aplicación \mathbb{F} -lineal $T : V \rightarrow W$ queda determinada por sus valores es una base de V , mediante la fórmula

$$T(x_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \quad \text{para } j = 1, \dots, n.$$

Estos coeficientes a_{ij} son las entradas de la **matriz** de T con respecto a este par de bases, $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Las mn aplicaciones R_{ij} dadas por

$$R_{ij}(x_k) := \begin{cases} y_i & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k, \end{cases}$$

²Cada anillo posee una identidad multiplicativa 1 y por lo tanto cada \mathbb{F} -álgebra es también “unital”. A veces conviene considerar una \mathbb{F} -álgebra *no unital*, que posee toda la estructura de un \mathbb{F} -álgebra salvo la existencia de una identidad. Si así fuera, se puede *unitizar* A al formar la \mathbb{F} -álgebra $A^+ := \mathbb{F} \oplus A$ (suma directa de espacios \mathbb{F} -vectoriales) con el producto $(s, x)(t, y) := (st, tx + sy + xy)$, cuyo elemento neutro multiplicativo es $(1, 0) \in \mathbb{F} \oplus A$: este es una “identidad externa” para A .

³Sería más consistente escribir $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$; pero las paréntesis son superfluas cuando el espacio vectorial V se denota por una sola letra. Hay que recordar las palabras de sabiduría atribuidas a William de Ockham: *Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*.

forman una base de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. Es evidente que $T = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} R_{ij}$ y que los R_{ij} son \mathbb{F} -linealmente independientes.

Si $E_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ es la matriz de R_{ij} con respecto a las mismas bases de V y W , se ve fácilmente que la entrada (i, j) de E_{ij} es 1 y las demás entradas son ceros. Estas matrices E_{ij} se llaman **unidades matriciales** en $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ y obviamente constituyen una base \mathbb{F} -vectorial de esta álgebra; en efecto, vale $A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$.

En el caso de que $V = \mathbb{F}^n$ y $W = \mathbb{F}^m$, es natural emplear la base estándar $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{F}^n – donde e_j es el vector columna con 1 en la fila j , 0 en las demás filas – y también la base estándar $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ de \mathbb{F}^m . Con ese convenio se identifican $R_{ij} \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ con la unidad matricial E_{ij} y se identifica T con su matriz A . En resumen, el isomorfismo \mathbb{F} -lineal $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m) \simeq M_{m \times n}(\mathbb{F})$ dado por $T \mapsto A$ permite identificar estos espacios \mathbb{F} -vectoriales.

Un caso particular de gran importancia es $W = \mathbb{F}$: cuando el codominio es unidimensional, se declara que el **espacio dual** de V es

$$V^* := \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F}),$$

el espacio \mathbb{F} -vectorial de *formas \mathbb{F} -lineales* sobre V . Al tomar $\{1\}$ como base de \mathbb{F} y al colocar $f_j \equiv R_{1j}$, se obtiene una base $\{f_1, \dots, f_n\}$ de V^* , la llamada **base dual** a la base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de V , determinado por la fórmula

$$f_j(x_k) := \llbracket j = k \rrbracket \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases} \quad (1.1)$$

Notación. En la fórmula anterior se ha introducido el convenio notacional propuesto por Iverson, y recomendado por Knuth para uso general.⁴ Si $B(x)$ es una relación lógica que depende de un parámetro x , la expresión $\llbracket B(x) \rrbracket$ denota la siguiente función booleana:

$$\llbracket B(x) \rrbracket := \begin{cases} 1 & \text{si } B(x) \text{ es CIERTO;} \\ 0 & \text{si } B(x) \text{ es FALSO.} \end{cases}$$

Por ejemplo, la *función indicatriz* χ_A de un conjunto A se define como $\chi_A(x) := \llbracket x \in A \rrbracket$. La *delta de Kronecker*, comúnmente escrito δ_{jk} , coincide con la expresión booleana en (1.1), esto es, $\delta_{jk} \equiv \llbracket j = k \rrbracket$.

⁴Iverson fue el inventor de *APL*, en: Kenneth E. Iverson, *A Programming Language*, Wiley, New York, 1962. Su notación booleana está usado sistemáticamente en el libro: Ronald L. Graham, Donald E. Knuth and Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

1.2 Acciones y representaciones

Definición 1.7. Dadas dos estructuras algebraicas X, Y de la misma especie, un **homomorfismo** de X en Y es una función $\varphi: X \rightarrow Y$ que conserva las operaciones algebraicas de esa especie. Así, un homomorfismo de grupos es una función multiplicativa, $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$; un homomorfismo de anillos es aditiva y multiplicativa a la vez; un homomorfismo de espacios \mathbb{F} -vectoriales es simplemente una aplicación \mathbb{F} -lineal.

En particular, un **homomorfismo de \mathbb{F} -álgebras** $\pi: A \rightarrow C$ es una aplicación \mathbb{F} -lineal multiplicativa:

$$\pi(sa + tb) = s\pi(a) + t\pi(b), \quad \pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \quad \text{para } s, t \in \mathbb{F}; a, b \in A. \quad \diamond$$

Definición 1.8. Una **representación** de una \mathbb{F} -álgebra A sobre un espacio \mathbb{F} -vectorial V es un homomorfismo de \mathbb{F} -álgebras $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$.

La dimensión $n = \dim V$ se llama el **grado** de la representación π .

En el caso de que $V = \mathbb{F}^n$, se usa el isomorfismo de \mathbb{F} -álgebras $\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n) \simeq M_n(\mathbb{F})$ para considerar cualquier homomorfismo $\sigma: A \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ como una **representación matricial** de la \mathbb{F} -álgebra A . \diamond

Una representación de un álgebra asociativa, entonces, asocia elementos del álgebra con endomorfismos lineales de un determinado espacio vectorial (o bien con matrices de cierto tamaño), de modo compatible con sus operaciones algebraicas. En otras palabras, los elementos del álgebra se representan por simetrías de un espacio vectorial.

En las teorías de grupos o anillos, los conceptos de acción de grupo sobre un conjunto, o de acción de un anillo sobre un módulo, juegan un papel análogo. Conviene recordar estas nociones.

Definición 1.9. Una **acción** (a izquierda) **de un grupo** G sobre un conjunto X es una función $\Phi: G \times X \rightarrow X$ tal que:

$$\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x), \quad \Phi(1, x) = x,$$

para todo $g, h \in G$ y $x \in X$. A veces se escribe $g \cdot x \equiv \Phi(g, x)$, de tal manera que las propiedades definitorias de la acción son

$$g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x, \quad 1 \cdot x = x. \quad (1.2)$$

Si S_X denota el grupo de todas las permutaciones de X ,⁵ también se escribe $\varphi_g(x) := g \cdot x = \Phi(g, x)$, de modo que $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$ para $g, h \in G$; y $\varphi_1 = 1_X$. La correspondencia $g \mapsto \varphi_g$ es entonces un homomorfismo de grupos $\varphi: G \rightarrow S_X$. \diamond

⁵Una *permutación* del conjunto X es una biyección $\sigma: X \rightarrow X$. Es evidente que tales biyecciones forman un grupo, bajo la composición de funciones.

Definición 1.10. Una **acción** (a izquierda) **de un anillo** R sobre un grupo abeliano M es una función $\Psi: R \times M \rightarrow M$ tal que:

$$\begin{aligned}\Psi(a, x + y) &= \Psi(a, x) + \Psi(a, y), & \Psi(a, \Psi(b, x)) &= \Psi(ab, x), \\ \Psi(a + b, x) &= \Psi(a, x) + \Psi(b, x), & \Psi(1, x) &= x,\end{aligned}$$

para todo $a, b \in R; x, y \in M$. Es común escribir $ax \equiv \Psi(a, x)$, así que

$$\begin{aligned}a(x + y) &= ax + ay, & a(bx) &= (ab)x, \\ (a + b)x &= ax + bx, & 1x &= x.\end{aligned}$$

En la presencia de una acción de R de este tipo, el grupo abeliano M se llama un **R -módulo** (a izquierda). Si $\text{End } M$ denota la totalidad de endomorfismos (de grupo abeliano) de M , está claro que $\text{End } M$ es un anillo – cuyo producto es la composición de endomorfismos – y al escribir $\psi_a(x) := ax = \Psi(a, x)$, la correspondencia $a \mapsto \psi_a$ es un homomorfismo de anillos $\psi: R \rightarrow \text{End } M$. \diamond

Al regresar ahora a la categoría de \mathbb{F} -álgebras, se puede definir, de manera exactamente análoga, una **acción** (a izquierda) **de un \mathbb{F} -álgebra** A sobre un espacio \mathbb{F} -vectorial V como una *aplicación \mathbb{F} -bilineal* $\Pi: A \times V \rightarrow V$ tal que $\Pi(a + b, x) = \Pi(a, x) + \Pi(b, x)$ y $\Pi(1, x) = x$ para $a, b \in A$ y $x \in V$. Con las notaciones alternativas $\pi_a(x) \equiv ax \equiv \Pi(a, x)$, se recupera una representación $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$.

En vista de estas tratamientos paralelos, el espacio vectorial V en donde opera la representación π de A también puede llamarse un **A -módulo** (a izquierda).

¶ Es posible unificar un poco los diversos conceptos de esta sección con el lenguaje de las *categorías*. Recuérdese que una **categoría** \mathcal{C} comprende tres cosas:

- \diamond una clase de *objetos*: A, B, \dots ;
- \diamond para cada par de objetos A, B de \mathcal{C} , un conjunto de *morfismos*, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$;
- \diamond una *ley de composición* $(f, g) \mapsto gf: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, D)$ que satisface asociatividad y la existencia de identidades locales $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, como sigue:

$$h(gf) = (hg)f \quad \text{para } h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, E); \quad \text{y} \quad f1_A = f = 1_Bf.$$

Cabe mencionar las categorías Gr de los grupos, An de los anillos, $\mathbb{F}\text{-Vect}$ de los espacios \mathbb{F} -vectoriales, y $\mathbb{F}\text{-Alg}$ de las \mathbb{F} -álgebras; cuyos morfismos son, respectivamente, homomorfismos de grupos, homomorfismos de anillos, aplicaciones \mathbb{F} -lineales, y homomorfismos de \mathbb{F} -álgebras. ¶

► En la categoría de grupos, cada grupo tiene varios subgrupos; en la de espacios \mathbb{F} -vectoriales, cada uno tiene varios subespacios vectoriales; etcétera. ¿Cuál sería el “subobjeto” apropiado para una representación de un álgebra?

Definición 1.11. Dada una representación $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ de una \mathbb{F} -álgebra A , una **subrepresentación** de π es un homomorfismo de \mathbb{F} -álgebras $\rho: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} U$, donde U es un *subespacio* \mathbb{F} -vectorial de V que es *invariante bajo* $\pi(A)$, esto es, $\pi(a)(U) \subseteq U$ para todo $a \in A$; y $\rho(a) := \pi(a)|_U$ para todo $a \in A$.

En otras palabras, U es un **A -submódulo** de V ; y la acción de ρ sobre U entonces es la *restricción* a U de la acción de π sobre V .

Si $\sigma: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} W$ es otra representación de A , se puede formar $V \oplus W$, la suma directa de los espacios \mathbb{F} -vectoriales V y W . Defínase $\underline{\pi \oplus \sigma}: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(V \oplus W)$ por

$$\pi \oplus \sigma(a) := \pi(a) \oplus \sigma(a) \equiv \begin{pmatrix} \pi(a) & 0 \\ 0 & \sigma(a) \end{pmatrix} \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V \oplus W)$$

para todo $a \in A$. Esta $\pi \oplus \sigma$ es la **suma directa** de las representaciones π y σ .

Al identificar V y W con subespacios \mathbb{F} -vectoriales de $V \oplus W$, como de costumbre, se ve que π y σ son subrepresentaciones de $\pi \oplus \sigma$. \diamond

Definición 1.12. Cualquier representación $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ tiene dos subrepresentaciones triviales: π mismo, el la **representación nula** $0: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}\{0\}$, que corresponden a los dos A -submódulos triviales W y $\{0\}$ del espacio \mathbb{F} -vectorial W .

Dícese que la representación π es **indescomponible** si π no puede ser escrito como suma directa de dos subrepresentaciones no nulas.

Dícese que la representación π es **irreducible** si π no posee subrepresentaciones no triviales, es decir, si W no posee subespacios no triviales e invariantes bajo $\pi(A)$.

Una representación irreducible es indescomponible; pero no al contrario. \diamond

Ejemplo 1.13. Sea A el álgebra de matrices triangulares

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F}).$$

La aplicación idéntica $1_A(a) \equiv a$ define la *autorrepresentación* $1_A: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^2$. Esta representación no es irreducible, por cuanto posee un solo subespacio invariante unidimensional $U = \mathbb{F} \oplus \{0\} < \mathbb{F}^2$. Pero sí es indescomponible: cualquier otro subespacio unidimensional W tal que $U \oplus W = \mathbb{F}^2$ como suma directa \mathbb{F} -vectorial,⁶ es de la forma

⁶Fíjese bien que aquí no se trata de una suma directa “ortogonal”, porque no hay un producto escalar a la vista; este W es un subespacio *suplementario* a U , no necesariamente un complemento ortogonal.

$W = \mathbb{F}(s, t)$ para algún vector $(s, t) \in \mathbb{F}^2$ con $t \neq 0$; pero entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t \\ t \end{pmatrix} \notin W,$$

así que W no es invariante bajo la acción de A ; en consecuencia, \mathbb{F}^2 no es la suma directa de dos A -*submódulos* unidimensionales. \diamond

Una de las tareas principales de la teoría de representaciones es la descripción de las subrepresentaciones irreducibles [respectivamente, indescomponibles], de una representación dada. Además, hace falta saber cómo descomponer una representación dada en indescomponibles.

► Las representaciones de una \mathbb{F} -álgebra dada A sobre espacios \mathbb{F} -vectoriales son los objetos de una categoría, cuyos morfismos se definen a continuación.

Definición 1.14. Sean $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ y $\sigma: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(W)$ dos representaciones de una \mathbb{F} -álgebra A . Una aplicación \mathbb{F} -lineal $T: V \rightarrow W$ **entrelaza** π y σ si

$$T(\pi(a)x) = \sigma(a)(Tx) \quad \text{para todo } a \in A, x \in V, \quad (1.3)$$

o más brevemente, si $T \circ \pi(a) = \sigma(a) \circ T$ en $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ para todo $a \in A$. La totalidad de estas aplicaciones entrelazantes se denota por $\underline{\text{Hom}}_A(V, W)$. Este es obviamente un subespacio \mathbb{F} -vectorial de $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Las representaciones π y σ se llaman **equivalentes** si hay un *isomorfismo* lineal T que entrelaza π y σ ; en cuyo caso, T^{-1} entrelaza σ y π .

En el caso $V = W$ y $\sigma = \pi$, es decir, cuando T entrelaza π consigo mismo, se dice que T **conmuta con** π :

$$T \circ \pi(a) = \pi(a) \circ T \quad \text{para todo } a \in A, \quad (1.4)$$

y se escribe $T \in \text{End}_A(V)$. Fíjese que $\underline{\text{End}}_A(V)$ es una \mathbb{F} -subálgebra de $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. \diamond

La aplicación entrelazante T también puede llamarse un (*homo*)*morfismo de representaciones*. Bajo la composición usual de aplicaciones lineales, estas son los morfismos de la categoría $A\text{-Mod}$. (Un A -módulo V siempre es el espacio vectorial de una representación, porque la acción a izquierda de A sobre V es necesariamente \mathbb{F} -lineal.)

Un resultado básico, aunque muy sencillo, de la teoría de representaciones, es el siguiente **Lema de Schur**.⁷

⁷Este lema apareció por primera vez en el artículo: Issai Schur, “Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere”, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1905), 406–432.

Proposición 1.15 (Lema de Schur). *Sea $T \in \text{Hom}_A(V, W) \setminus \{0\}$ una aplicación \mathbb{F} -lineal no nula que entrelaza dos representaciones $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ y $\sigma: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(W)$.*

- (a) *Si π es irreducible, entonces T es inyectiva.*
- (b) *Si σ es irreducible, entonces T es sobreyectiva.*
- (c) *Si π y σ son irreducibles, entonces T es un isomorfismo.*

En particular, si $T \in \text{End}_A(V) \setminus \{0\}$ conmuta con una representación irreducible de A , entonces T es un isomorfismo.

Demostración. Nótese que $\ker T$ es un A -submódulo de V y que $\text{im } T$ es un A -submódulo de W . La condición $T \neq 0$ dice que $\ker T \neq V$, $\text{im } T \neq \{0\}$.

Ad (a): Si π es irreducible, V no posee A -submódulos no triviales. Se concluye que $\ker T = \{0\}$ y por ende T es inyectiva.

Ad (b): Si σ es irreducible, W no posee A -submódulos no triviales, así que $\text{im } T = W$ y por ende T es sobreyectiva.

Ad (c): Inmediato de (a) y (b). □

1.3 Ejemplos de álgebras asociativas

En adelante, \mathbb{F} denotará un cuerpo cualquiera. Los ejemplos más comunes son \mathbb{Q} (los números racionales), \mathbb{R} (los números reales) y \mathbb{C} (los números complejos).

También es útil considerar una *extensión finita* $\mathbb{Q}(\alpha)$ de \mathbb{Q} , donde $\alpha \in \mathbb{C}$ es un número algebraico – es decir, α es una raíz de algún polinomio $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$; si $p(\alpha) = 0$ con p de mínimo grado m , cada elemento de $\mathbb{Q}(\alpha)$ tiene la forma $q(\alpha)$ con q de grado $\leq m$; entonces $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{m-1}\}$ es una base de $\mathbb{Q}(\alpha)$ como espacio \mathbb{Q} -vectorial. Dícese que *el grado de la extensión* $\mathbb{Q}(\alpha) | \mathbb{Q}$ es $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] := \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha) = m$.

Un cuerpo \mathbb{F} es **algebraicamente cerrado** cuando cualquier polinomio en $\mathbb{F}[x]$ tiene todas sus raíces en \mathbb{F} ; o sea, cuando todo polinomio irreducible en $\mathbb{F}[x]$ es de primer grado. El cuerpo $\overline{\mathbb{Q}}$ de *todos* los números algebraicos es algebraicamente cerrado, desde luego; se sabe que $\overline{\mathbb{Q}} < \mathbb{C}$ ya que $\pi \notin \overline{\mathbb{Q}}$, por ejemplo. El llamado *teorema fundamental del álgebra* afirma que \mathbb{C} es algebraicamente cerrado. Si \mathbb{F} no es algebraicamente cerrado, es posible extenderlo al adjuntar raíces de sus polinomios irreducibles; con la ayuda del lema de Zorn, es posible comprobar que hay una extensión algebraica mínima $\overline{\mathbb{F}} | \mathbb{F}$ que es algebraicamente cerrada; y que dos extensiones con estas propiedades son isomorfas.⁸

⁸Para la existencia y unicidad de la clausura algebraica, véase la sección V.2 del libro: Serge Lang, *Algebra* (3ª edición), Addison-Wesley, Reading, MA, 1993.

Este cuerpo $\overline{\mathbb{F}}$, bien definido hasta un isomorfismo que preserva el subcuerpo \mathbb{F} , se llama la **clausura algebraica** de \mathbb{F} . En particular, se ve que $\overline{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{C}$.

El subgrupo aditivo de $(\mathbb{F}, +)$ generado por 1 puede ser finito o infinito. Si es infinito, este subgrupo es isomorfo a \mathbb{Z} y \mathbb{F} posee un subcuerpo mínimo, isomorfo a \mathbb{Q} ; en tal caso, dicese que \mathbb{F} tiene **característica cero** (se escribe $\text{char } \mathbb{F} = 0$). Si ese grupo es finito, el período aditivo p del elemento 1 es un número primo, y \mathbb{F} posee un subcuerpo mínimo isomorfo a $\mathbb{F}_p \equiv \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; dicese que \mathbb{F} tiene **característica p** (escrito $\text{char } \mathbb{F} = p$). En particular, si \mathbb{F} es un cuerpo finito con q elementos, su característica es algún primo p ; si $m = [\mathbb{F} : \mathbb{F}_p]$, entonces $q = p^m$ por un simple conteo de sus elementos. (Vale la pena remarcar que la clausura algebraica $\overline{\mathbb{F}_p}$ es un cuerpo infinito, de característica p .)

La condición de ser \mathbb{F} algebraicamente cerrada es importante porque garantiza que una matriz en $C \in M_n(\mathbb{F})$ posee (al menos) un autovalor (y luego, por iteración, posee n autovalores en \mathbb{F} , no necesariamente distintas). En efecto, un autovalor λ de C es una raíz del polinomio característico $p_C(x) := \det(C - x 1_n)$; como \mathbb{F} es algebraicamente cerrado, existe $\lambda \in \mathbb{F}$ con $p_C(\lambda) = 0$. Esta observación permite refinar el Lema de Schur para cuerpos algebraicamente cerrados.

Corolario 1.16 (al Lema de Schur). *Sea $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ una representación finitodimensional irreducible de un álgebra A sobre un cuerpo algebraicamente cerrado \mathbb{F} . Si $T \in \text{End}_A(V)$ conmuta con la representación π , entonces $T = \lambda 1_V$ para algún $\lambda \in \mathbb{F}$. (En consecuencia, $\text{End}_A(V) \simeq \mathbb{F}$.)*

Demostración. El operador \mathbb{F} -lineal T sobre V tiene un polinomio característico $p_T(x) := \det(T - x 1_V)$ porque V es finitodimensional. Luego, T posee un autovalor $\lambda \in \mathbb{F}$. El operador $(T - \lambda 1_V)$ conmuta⁹ con π y $\ker(T - \lambda 1_V) \neq \{0\}$. La Proposición 1.15 y la irreducibilidad de π entonces implican que $T - \lambda 1_V = 0$. \square

Corolario 1.17. *Si A es un \mathbb{F} -álgebra conmutativa y \mathbb{F} es algebraicamente cerrada, cualquier representación finitodimensional irreducible de A tiene rango 1.*

Demostración. Si $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ es finitodimensional e irreducible, cada operador $\pi(a)$ conmuta con $\pi(b)$, para $a, b \in A$. Luego $\pi(a) = \rho(a) 1_V$ donde $\rho: A \rightarrow \mathbb{F}$ es un homomorfismo. Si $x \in V$ con $x \neq 0$, entonces $\mathbb{F}x := \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{F}\}$ es un subespacio A -invariante de V . Entonces $V = \mathbb{F}x$ por irreducibilidad; es decir, $\dim V = 1$. \square

En el caso general (\mathbb{F} no necesariamente algebraicamente cerrado) de una representación irreducible de A sobre V , el lema de Schur (Proposición 1.15) dice que $\text{End}_A(V)$ es una \mathbb{F} -álgebra de división. En el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, hay tres álgebras de división *reales*

⁹Es obvio que el operador identidad 1_V pertenece a $\text{End}_A(V)$.

finitodimensionales: \mathbb{R} mismo; \mathbb{C} como extensión del cuerpo \mathbb{R} , de grado 2; y \mathbb{H} , el \mathbb{R} -álgebra de los cuaterniones, con $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = 4$. (Un teorema notable, de Wedderburn, asegura que no hay otras.) En cambio, de la demostración anterior se ve que la única álgebra de división *compleja* finitodimensional es la propia \mathbb{C} .

► De ahora en adelante, se trabajará con un cuerpo fijo \mathbb{F} . Cuando sea necesaria, se indicará si \mathbb{F} es algebraicamente cerrado o no. A continuación, se ofrece un catálogo de \mathbb{F} -álgebras importantes.

Ejemplo 1.18. Las siguientes \mathbb{F} -álgebras son *conmutativas*:

- (a) El álgebra unidimensional, $A = \mathbb{F}$ mismo.
- (b) El álgebra de polinomios en una incógnita, $A = \mathbb{F}[x]$.
- (c) El cociente de $\mathbb{F}[x]$ por el ideal principal (x^m) es un álgebra conmutativa de dimensión finita m : al poner $\bar{x} := x + (x^m) \in A$, se ve que $\{1, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{m-1}\}$ es una base \mathbb{F} -vectorial de A . Esta álgebra tiene elementos nilpotentes, pues $\bar{x}^m = 0$.
- (d) El álgebra de polinomios en varias incógnitas, $A = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$. Aquí se asume que las incógnitas conmutan, $x_j x_k = x_k x_j$ para $j, k = 1, \dots, n$, así que cualquier elemento de A es una suma finita

$$a = \sum_M a_M x^M \equiv \sum_M a_M x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$$

donde cada $M = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ es un multiíndice.

- (e) El álgebra trivial $A = \{0\}$. Este es el anillo nulo¹⁰ y a la vez es el espacio \mathbb{F} -vectorial de dimensión cero. ◇

[[Las álgebras del Ejemplo 1.18 son finitamente generadas. En problemas de análisis se encuentran álgebras conmutativas que no son finitamente generadas. Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} y si X es un espacio topológico compacto, se puede considerar el álgebra de funciones continuas $A = C(X, \mathbb{R})$ [respectivamente, $A = C(X, \mathbb{C})$] con suma y producto puntual de funciones. En tales casos, se recomienda usar la *norma* $\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in X} |f(x)|$, la cual, amén de la desigualdad triangular $\|f + g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$ posee la propiedad submultiplicativa:

$$\|fg\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty}.$$

¹⁰Cualquier anillo R debe tener una identidad multiplicativa 1; pero no se excluye la posibilidad $1 = 0$. En efecto, vale $1 = 0$ si y solo si $R = \{0\}$.

(Esto implica la continuidad del producto $m: A \times A \rightarrow A$). Dícese que A es un *álgebra normada* si la norma es submultiplicativa. El espacio vectorial $C(X, \mathbb{R})$ [resp., $C(X, \mathbb{C})$] es además completo en esta norma:¹¹ se trata de un *álgebra de Banach* (real o complejo).]

Ejemplo 1.19. Si V es un espacio \mathbb{F} -vectorial, el **álgebra de endomorfismos lineales** $A = \text{End}_{\mathbb{F}} V$ no es conmutativa si $\dim V > 1$.

En el caso finitodimensional $V = \mathbb{F}^n$, se identifica esta álgebra con el **álgebra de matrices** $A = M_n(\mathbb{F})$ – véase la Definición 1.8 – la cual no es conmutativa si $n > 1$. \diamond

El álgebra $A = \text{End}_{\mathbb{F}} V$ tiene una representación obvia: la **autorrepresentación** $1_A: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ sobre el A -módulo V . De igual modo, el álgebra de matrices tiene una autorrepresentación sobre \mathbb{F}^n . Esta autorrepresentación es irreducible, porque los únicos subespacios de \mathbb{F}^n invariantes bajo $M_n(\mathbb{F})$ son $\{0\}$ y \mathbb{F}^n .

Ejemplo 1.20. Si G es un grupo finito, el **álgebra del grupo** $\mathbb{F}[G]$ es la totalidad de combinaciones lineales $a = \sum_{g \in G} a_g g$ con $g \in G$ y $a_g \in \mathbb{F}$, con la suma $a + b := \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g$. (En breve: los elementos de G forman una base \mathbb{F} -vectorial para $\mathbb{F}[G]$.) El *producto* en $\mathbb{F}[G]$ aprovecha la multiplicación del grupo:

$$ab = \left(\sum_{h \in G} a_h h \right) \left(\sum_{k \in G} b_k k \right) := \sum_{h \in G} \sum_{k \in G} a_h b_k hk = \sum_{g \in G} \left(\sum_{hk=g} a_h b_k \right) g, \quad (1.5)$$

con lo cual $(ab)_g := \sum_{hk=g} a_h b_k$. Fíjese que el elemento neutro $1 \in G$ es también la identidad del álgebra $\mathbb{F}[G]$. El álgebra $\mathbb{F}[G]$ es conmutativo si y solo si G es abeliano. \diamond

La estructura de $\mathbb{F}[G]$ es generalmente intrincada si G no es abeliano. De hecho, una aplicación importante de la teoría de representaciones es la de determinar la estructura del grupo G mediante un estudio de sus representaciones irreducibles.

Definición 1.21. Si V es un espacio \mathbb{F} -vectorial, denótese por $\text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ el grupo de automorfismos \mathbb{F} -lineales (es decir, endomorfismos \mathbb{F} -lineales invertibles) de V , bajo composición. Este es el **grupo general lineal** de V ; se puede omitir el subíndice \mathbb{F} si el cuerpo de base es fijo.

Una **representación del grupo** finito G es un homomorfismo $\pi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$.

Este π se extiende por \mathbb{F} -linealidad a una aplicación \mathbb{F} -lineal $\tilde{\pi}: \mathbb{F}[G] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ por:

$$\tilde{\pi}(a) := \sum_{g \in G} a_g \pi(g) \quad \text{si} \quad a = \sum_{g \in G} a_g g.$$

¹¹El álgebra compleja $C(X; \mathbb{C})$ posee otras propiedades importantes. La conjugación compleja de funciones, $f^*(x) := \overline{f(x)}$, hace de $C(X, \mathbb{C})$ un *álgebra (de Banach) involutiva*. La involución $f \mapsto f^*$ además obedece la propiedad notable $\|f^* f\|_{\infty} = \|f\|_{\infty}^2$, por lo que $C(X; \mathbb{C})$ se llama una **C^* -álgebra**. La teoría de representaciones de C^* -álgebras es un subcampo destacado de la teoría general de representaciones.

Es evidente de la definición del producto (1.5) que $\tilde{\pi}(ab) = \tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(b)$, así que $\tilde{\pi}$ es efectivamente un homomorfismo de \mathbb{F} -álgebras.

El espacio vectorial V es un $\mathbb{F}[G]$ -módulo. Para enfatizar la acción de los elementos del grupo, también se dice que V es un **G -módulo**. Dicho de otra manera: V es un G -módulo si el grupo G actúa sobre V mediante aplicaciones \mathbb{F} -lineales. \diamond

Definición 1.22. Un **álgebra de Lie** sobre \mathbb{F} es un espacio \mathbb{F} -vectorial \mathfrak{g} dotado de una operación \mathbb{F} -bilineal $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ denotado por $(x, y) \mapsto [x, y]$, llamado **corchete**, que cumple, para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad [x, y] &= -[y, x] && \text{(antisimetría),} \\ \text{(ii)} \quad [[x, y], z] &+ [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 && \text{(identidad de Jacobi).} \end{aligned} \quad (1.6)$$

El álgebra de Lie es *abeliano* si el corchete es idénticamente cero. Nótese que las propiedades anteriores son incompatibles con asociatividad si \mathfrak{g} no es abeliano, porque $[[x, y], z] - [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [[y, z], x] = [y, [z, x]]$ no se anula en general. \diamond

Ejemplo 1.23. Cualquier \mathbb{F} -álgebra asociativa A da lugar a un álgebra de Lie, al definir el corchete de dos elementos de A como su *conmutador*:

$$[a, b] := ab - ba.$$

Este es evidentemente antisimétrica; y la identidad de Jacobi del corchete es una consecuencia inmediata de la asociatividad del producto $(a, b) \mapsto ab$.

En particular, $\text{End}_{\mathbb{F}} V$ es un álgebra de Lie, con este el corchete. Para distinguir esta estructura de la del álgebra asociativa, este espacio \mathbb{F} -vectorial se rebautiza $\underline{\mathfrak{gl}}_{\mathbb{F}}(V)$ – o bien $\underline{\mathfrak{gl}}(V)$ cuando \mathbb{F} es fijo – y se le llama el **álgebra de Lie general lineal** sobre V .

En el caso $V = \mathbb{F}^n$, se escribe $\underline{\mathfrak{gl}}(n, \mathbb{F}) \equiv \underline{\mathfrak{gl}}(\mathbb{F}^n)$ para denotar las matrices $M_n(\mathbb{F})$ con la operación de conmutador.

Las matrices de traza cero forma un subespacio vectorial preservado por el conmutador, así que

$$\underline{\mathfrak{sl}}(n, \mathbb{F}) := \{ a \in \underline{\mathfrak{gl}}(n, \mathbb{F}) : \text{tr } a = 0 \} \quad (1.7)$$

es una *subálgebra de Lie* de $\underline{\mathfrak{gl}}(n, \mathbb{F})$, el **álgebra de Lie especial lineal** sobre \mathbb{F}^n . \diamond

Definición 1.24. Un *homomorfismo de álgebras de Lie* $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es una aplicación \mathbb{F} -lineal tal que $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ para $x, y \in \mathfrak{g}$.

Una **representación de álgebras de Lie** sobre un espacio \mathbb{F} -vectorial V es un homomorfismo $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \underline{\mathfrak{gl}}_{\mathbb{F}}(V)$. \diamond

Definición 1.25. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie finitodimensional sobre \mathbb{F} , con una base vectorial $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. El corchete se expresa mediante un juego de *constantes de estructura* $\{c_{ij}^k : i, j, k = 1, \dots, n\}$ por las fórmulas¹²

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k. \quad (1.8a)$$

Las propiedades (1.6) del corchete implican ciertas restricciones sobre estas constantes:¹³

$$c_{ji}^k = -c_{ij}^k, \quad \sum_{i=1}^n c_{ij}^k c_{lm}^i + c_{il}^k c_{mj}^i + c_{im}^k c_{jl}^i = 0.$$

Se puede definir una \mathbb{F} -álgebra asociativa, que incluye \mathfrak{g} como *subespacio vectorial* al tomar $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ como generadores del álgebra, sujeto a las $\binom{n}{2}$ relaciones siguientes:

$$e_i e_j - e_j e_i = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n. \quad (1.8b)$$

El álgebra asociativa así definida se denota por $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$: esta es el **álgebra universal envolvente** de \mathfrak{g} . \diamond

La definición anterior es provisional, porque parece depender de la base de \mathfrak{g} elegida. Resulta, sin embargo, que el uso de otra base determina un álgebra asociativa isomorfa a la original. Además, se puede comprobar que la aplicación \mathbb{F} -lineal $\mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ determinada por $e_i \mapsto e_i$ es inyectiva – su imagen no está afectada por las relaciones (1.8b).

Lema 1.26. La \mathbb{F} -álgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tiene la siguiente propiedad universal: si $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow A$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, donde A es un \mathbb{F} -álgebra asociativa con corchete $[a, b] := ab - ba$, se puede extender φ a un homomorfismo de \mathbb{F} -álgebras $\tilde{\varphi}: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow A$.

Demostración. Para la identidad 1 de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, la cual no pertenece al subespacio \mathfrak{g} , se define $\tilde{\varphi}(1) := 1 \in A$. Si $x, y \in \mathfrak{g}$, se define $\tilde{\varphi}(xy) := \varphi(x)\varphi(y) \in A$. Por linealidad, se obtiene

$$\tilde{\varphi}(xy - yx) = \tilde{\varphi}(xy) - \tilde{\varphi}(yx) = [\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y]) \in A,$$

y en particular $\tilde{\varphi}(e_i e_j - e_j e_i) = \varphi([e_i, e_j]) = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \varphi(e_k)$. Esto implica que la extensión $\tilde{\varphi}$ está bien definida sobre el subespacio de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ generado por productos de dos elementos de \mathfrak{g} . Luego se extiende $\tilde{\varphi}$ a un homomorfismo bien definido sobre todo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ por un argumento inductivo. \square

¹²Se suele omitir el símbolo de la sumatoria en las fórmulas (1.8), con el uso del convenio de Einstein.

¹³Inversamente, una colección de constantes c_{ij}^k que satisfacen estas restricciones determina un corchete sobre \mathbb{F}^n .

En consecuencia, cualquier representación de un álgebra de Lie \mathfrak{g} se extiende a una representación del álgebra asociativa $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Definición 1.27. Un **carcaj** es un grafo orientado; esto es, un conjunto N de vértices o **nodos**, junto con un conjunto F de aristas o **flechas** entre los nodos; cada flecha tiene un nodo inicial y un nodo terminal. Puede haber varias flechas (en ambos sentidos) entre un determinado par de nodos; y puede haber *lazos*, que son flechas con el mismo nodo inicial y terminal.

Si $f \in F$ y si $m, n \in N$, la notación $f: m \rightarrow n$ indica que la flecha f tiene el nodo inicial m y el nodo terminal n . Para una flecha f dada, se escribe m_f y n_f para sus respectivos nodos inicial y terminal. \diamond

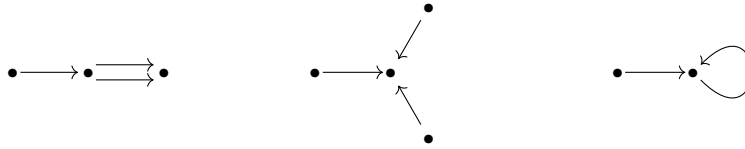


Figura 1.1: Tres carcajes simples

Definición 1.28. Una **representación de un carcaj** $Q = (N, F)$ asigna a cada nodo $n \in N$ un espacio \mathbb{F} -vectorial V_n ; y también asigna a cada flecha $f: m \rightarrow n$ una aplicación \mathbb{F} -lineal $T_f: V_m \rightarrow V_n$. \diamond

Definición 1.29. Sea $Q = (N, F)$ un carcaj finito (esto es, los conjuntos N y F son finitos). Se define $\mathbb{F}Q$, el **\mathbb{F} -álgebra del carcaj**, al tomar como base \mathbb{F} -vectorial todos los *caminos* $c = f_r \cdots f_2 f_1$ de flechas consecutivas (el nodo terminal de cada f_i es el nodo inicial de f_{i+1}), incluyendo los caminos triviales p_n para cada $n \in N$. El producto en $\mathbb{F}Q$ es la *concatenación* de caminos; si el nodo terminal del camino c_1 no coincide con el nodo inicial de c_2 , se define $c_2 c_1 := 0$.

Alternativamente, se puede definir $\mathbb{F}Q$ como la \mathbb{F} -álgebra generada por elementos $\{ p_n : n \in N \} \cup \{ a_f : f \in F \}$ con las siguientes relaciones:

$$p_m p_n = p_n \llbracket m = n \rrbracket; \quad a_f p_m = a_f \llbracket m = m_f \rrbracket; \quad p_n a_f = a_f \llbracket n = n_f \rrbracket. \quad (1.9)$$

Si $m_g \neq n_f$, entonces $a_g a_f = a_g p_{m_g} p_{n_f} a_f = 0$. Nótese que $\sum_{n \in N} p_n = 1$ en $\mathbb{F}Q$. \diamond

Cada representación del álgebra $\mathbb{F}Q$ define una representación del carcaj finito Q y viceversa. En efecto, si $\sigma: \mathbb{F}Q \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ es un homomorfismo de álgebras, sea

$V_n := \sigma(p_n)(V)$ para cada $n \in N$; y para $f: m \rightarrow n$ en F , defínase $T_f: V_m \rightarrow V_n$ por $T_f := \sigma(a_f)|_{V_m}$. Las relaciones $p_m p_n = 0$ si $m \neq n$ y $\sum_n p_n = 1$ implican que V es la *suma directa* de los subespacios vectoriales V_n . Además, las relaciones $p_n a_f = 0$ si $n \neq n_f$ muestran que la imagen de $\sigma(a_f)$ es un subespacio de V_{n_f} .

Inversamente, dada una representación del carcaj finito Q , sobre el espacio \mathbb{F} -vectorial $V := \bigoplus_{n \in N} V_n$ se puede identificar endomorfismos $\pi(p_n), \pi(a_f)$ que cumplen las relaciones (1.9), obteniendo así una representación de $\mathbb{F}Q$ sobre V .

► Los ejemplos de esta sección exhiben una gama de álgebras asociativas obtenidas de otras estructuras subyacentes (grupos, álgebras de Lie, carcajes). Cada una de estas estructuras tiene su propio concepto de representación o acción lineal; y en cada caso, hay una representación o acción lineal del álgebra asociada. Se trata, entonces, de clasificar las representaciones básicas en cada categoría y sus combinaciones en representaciones más generales. El punto de partida es el caso de las álgebras asociativas.

1.4 Productos tensoriales

Una herramienta esencial de la teoría de representaciones es el concepto de producto tensorial. En primera instancia, conviene recordar la definición del producto tensorial de espacios vectoriales.

Notación. A partir de ahora, el **convenio de Einstein** estará en vigor: en una expresión con índices inferiores y superiores, se sobreentiende una *sumatoria sobre índices repetidas* (que ocurren una vez abajo y una vez arriba), salvo indicación expresa de lo contrario. Por ejemplo, la fórmula (1.8a) se escribe así:

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k,$$

con una sumación implícita sobre el índice repetido k .

Sean U y V dos espacios \mathbb{F} -vectoriales. Denótese por $B(U, V)$ la totalidad de aplicaciones *bilineales* $h: U \times V \rightarrow \mathbb{F}$. Si $x \in U$, $y \in V$, la *evaluación* $h \mapsto h(x, y)$ es *lineal*; este elemento del espacio \mathbb{F} -vectorial dual $B(U, V)^*$ será denotado por $x \otimes y$. Si $x = x^j u_j$, $y = y^k v_k$ expresan estos vectores como combinaciones lineales de bases $\{u_j\}$ de U y $\{v_k\}$ de V , entonces $h(x, y) = x^j y^k h(e_j, f_k)$ por la bilinealidad de h . Esto muestra que

$$x \otimes y = x^j y^k (e_j \otimes f_k)$$

así que los elementos $e_j \otimes f_k$ constituyen a su vez una base \mathbb{F} -vectorial de $B(U, V)^*$.

La expresión $x \otimes y$ se llama un *tensor simple*. No todo elemento de $B(U, V)^*$ tiene esta forma; en general, un elemento de $B(U, V)^*$ es una suma finita de éstos.

Definición 1.30. Si U y V son dos espacios vectoriales sobre \mathbb{F} , su **producto tensorial** es el espacio \mathbb{F} -vectorial $U \otimes_{\mathbb{F}} V \equiv B(U, V)^*$. Sus elementos son sumas finitas de *tensores simples* $x \otimes y$, con $x \in U$, $y \in V$, los cuales cumplen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) \otimes y &= x_1 \otimes y + x_2 \otimes y, \\ x \otimes (y_1 + y_2) &= x \otimes y_1 + x \otimes y_2, \\ t(x \otimes y) &= tx \otimes y = x \otimes ty \quad \text{para todo } t \in \mathbb{F}. \end{aligned}$$

Si U y V son finitodimensionales, entonces $\dim(U \otimes_{\mathbb{F}} V) = (\dim U)(\dim V)$. ◇

Si V es un espacio \mathbb{F} -vectorial, está claro que $\dim(\mathbb{F} \otimes V) = \dim V = \dim(V \otimes \mathbb{F})$, porque hay isomorfismos lineales $\mathbb{F} \otimes V \simeq V \simeq V \otimes \mathbb{F}$, dadas por $1 \otimes x \leftrightarrow x \leftrightarrow x \otimes 1$ para $x \in V$. Nada se pierde al identificar estos tres espacios vectoriales mediante estas correspondencias.

Si U , V y W son tres espacios \mathbb{F} -vectoriales, la evaluación $k \mapsto k(x, y, z)$ de una forma trilineal k en tres vectores se puede denotar por

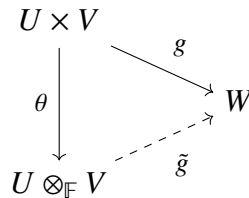
$$\underline{x \otimes y \otimes z} := (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

De esta manera el espacio \mathbb{F} -vectorial dual del espacio $T(U, V, W)$ de las aplicaciones trilineales $k: U \times V \times W \rightarrow \mathbb{F}$ se puede denotar por

$$\underline{U \otimes_{\mathbb{F}} V \otimes_{\mathbb{F}} W} \simeq (U \otimes_{\mathbb{F}} V) \otimes_{\mathbb{F}} W \simeq U \otimes_{\mathbb{F}} (V \otimes_{\mathbb{F}} W). \tag{1.10}$$

Más generalmente, el producto tensorial de tres o más espacios \mathbb{F} -vectoriales puede escribirse sin emplear paréntesis, en vista de estos isomorfismos.

El producto tensorial de espacios \mathbb{F} -vectoriales tiene la siguiente *propiedad universal*: existe una aplicación \mathbb{F} -bilineal canónica $\theta: U \times V \rightarrow U \otimes_{\mathbb{F}} V$ tal que a cada aplicación \mathbb{F} -bilineal $g: U \times V \rightarrow W$ le corresponde una única aplicación \mathbb{F} -lineal $\tilde{g}: U \otimes_{\mathbb{F}} V \rightarrow W$ que satisface $\tilde{g} \circ \theta = g$:



En efecto, se define $\theta(x, y) := x \otimes y$ para $x \in U$, $y \in V$. Es evidente de la definición de $(x \otimes y)$ que θ es bilinear. Dado una aplicación bilinear $g: U \times V \rightarrow W$ se define $\tilde{g}(x \otimes y) := g(x, y)$ necesariamente; su extensión por linealidad a todo $U \otimes_{\mathbb{F}} V$ (las sumas

finitas de tensores simples) es la aplicación lineal buscada. (La unicidad de \tilde{g} muestra fácilmente que cualquier otro espacio vectorial con la misma propiedad universal es isomorfo a $U \otimes_{\mathbb{F}} V$.)

En vista de los isomorfismos (1.10), se puede definir el producto tensorial de tres o más espacios \mathbb{F} -vectoriales con una propiedad universal análoga. Para aliviar la notación, se escribirá $U \otimes V$ en vez de $U \otimes_{\mathbb{F}} V$ cuando no hay ambigüedad sobre el cuerpo \mathbb{F} . Es útil abreviar $V^{\otimes n} \equiv V \otimes \cdots \otimes V$ (n veces).

Definición 1.31. Si $S: U_1 \rightarrow U_2$ y $T: V_1 \rightarrow V_2$ son aplicaciones \mathbb{F} -lineales, su **producto tensorial** es la aplicación \mathbb{F} -lineal $S \otimes T: U_1 \otimes V_1 \rightarrow U_2 \otimes V_2$ dada sobre tensores simples por

$$\underline{S \otimes T}(x \otimes y) := S(x) \otimes T(y). \quad (1.11)$$

Es de notar que $S \otimes T$ está bien definida, porque basta evaluarla en elementos de una base, $S \otimes T(u_j \otimes v_k) := S(u_j) \otimes T(v_k)$, y observar que la extensión lineal de esta receta da la fórmula (1.11) sobre tensores simples. \diamond

Definición 1.32. Si V es un espacio \mathbb{F} -vectorial, el **álgebra tensorial** $\mathcal{T}(V)$ es la suma directa de los espacios \mathbb{F} -vectoriales $V^{\otimes n}$ sobre todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{T}(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n} \equiv \mathbb{F} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \cdots$$

con el producto dado por (la extensión lineal de) la *concatenación* de tensores simples:

$$(u_1 \otimes \cdots \otimes u_k) \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) := u_1 \otimes \cdots \otimes u_k \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \in V^{\otimes(k+r)}.$$

Este es evidentemente una \mathbb{F} -álgebra asociativa, de dimensión infinita (si $V \neq \{0\}$). \diamond

Lema 1.33. La \mathbb{F} -álgebra tensorial $\mathcal{T}(V)$ tiene la siguiente propiedad universal: cualquier aplicación \mathbb{F} -lineal $f: V \rightarrow A$ con valores en una \mathbb{F} -álgebra asociativa se extiende de manera única en un homomorfismo de \mathbb{F} -álgebras $\tilde{f}: \mathcal{T}(V) \rightarrow A$.

Demostración. La definición de \tilde{f} sobre $\mathcal{T}^0(V) \oplus \mathcal{T}^1(V)$ es automática: $\tilde{f}(1) := 1 \in A$ y $\tilde{f}(x) := f(x)$ para $x \in V$. Como $(x, y) \mapsto f(x)f(y) \in A$ es bilineal sobre $V \times V$, se define \tilde{f} sobre $\mathcal{T}^2(V)$ por $\tilde{f}(x \otimes y) := f(x)f(y)$, necesariamente. Más generalmente, se debe definir \tilde{f} sobre $\mathcal{T}^n(V)$ por $\tilde{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) := f(x_1) \cdots f(x_n)$, ya que el lado derecho es n -lineal en (x_1, \dots, x_n) . Es evidente que la aplicación \mathbb{F} -lineal $\tilde{f}: \mathcal{T}(V) \rightarrow A$ construida de esta manera es multiplicativa; es decir, es un homomorfismo de \mathbb{F} -álgebras. \square

El álgebra tensorial $\mathcal{T}(V)$ es un ejemplo de una **\mathbb{F} -álgebra graduada**, esto es, una \mathbb{F} -álgebra que puede expresarse como suma directa $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A^n$ de \mathbb{F} -subespacios A^n tales que $A^m A^n \subseteq A^{m+n}$ para $m, n \in \mathbb{N}$ – es decir, la graduación es compatible con el producto.¹⁴ En el caso de marras, $\mathcal{T}(V) \equiv V^{\otimes n}$ es el subespacio de elementos homogéneos de grado n .

► Un **ideal** de una \mathbb{F} -álgebra A es un subespacio \mathbb{F} -vectorial $J \subseteq A$ que es a su vez un ideal del anillo A . Entonces el **cociente** $A/J := \{a + J : a \in A\}$ es otra \mathbb{F} -álgebra. Si J es un *ideal graduado*: $J = \bigoplus_{n=0}^{\infty} J^n$ con $J^n := J \cap A^n$, entonces el cociente es una \mathbb{F} -álgebra graduada, con $(A/J)^n := A^n/J^n$.

Hay varias álgebras importantes que pueden definirse como cocientes de un álgebra tensorial.

Definición 1.34. Si V es un espacio \mathbb{F} -vectorial, el **álgebra simétrica** $S(V)$ generado por V es el cociente de $\mathcal{T}(V)$ por el ideal I generado por los elementos

$$x \otimes y - y \otimes x \in V \otimes V.$$

Fíjese que I es un ideal graduado, con $I^0 = \{0\}$, $I^{2m+1} = \{0\}$ para $m \in \mathbb{N}$ pues todos los generadores de I son homogéneos de grado 2. Entonces $S(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n V$ es una \mathbb{F} -álgebra graduada, con $S^0 V = \mathbb{F}$ y $S^1 V = V$.

Si $\underline{u_1 \vee u_2 \vee \dots \vee u_n} \in S^n V$ denota la coclase de $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_n \in V^{\otimes n}$ y si $\sigma \in S_n$ es una permutación, entonces $u_{\sigma(1)} \vee \dots \vee u_{\sigma(n)} = u_1 \vee \dots \vee u_n$ porque σ es un producto de transposiciones. De ahí se ve que el producto \vee en el álgebra $S(V)$ es *conmutativa*.

El subespacio $S^n V$ de $S(V)$ se llama la n -ésima **potencia simétrica** del espacio vectorial V . ◊

Definición 1.35. Si V es un espacio \mathbb{F} -vectorial, el **álgebra exterior** $\Lambda(V)$ generado por V es el cociente de $\mathcal{T}(V)$ por el ideal generado por los elementos $(x \otimes y + y \otimes x) \in V \otimes V$. Entonces $\Lambda(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda^n V$ es una \mathbb{F} -álgebra graduada, con $\Lambda^0 V = \mathbb{F}$ y $\Lambda^1 V = V$.

Si $\underline{u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n} \in \Lambda^n V$ denota la coclase de $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_n \in V^{\otimes n}$ y si $\sigma \in S_n$ es una permutación, entonces $u_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge u_{\sigma(n)} = (-1)^\sigma u_1 \wedge \dots \wedge u_n$ donde $(-1)^\sigma$ denota el signo de la permutación σ . En particular, dos elementos de $V = \Lambda^1 V$ *anticonmutan*: $x \wedge y = -y \wedge x$.

El subespacio $\Lambda^n V$ de $\Lambda(V)$ se llama la n -ésima **potencia exterior** del espacio vectorial V . Si $d := \dim V$ es finita, la anticonmutatividad de los elementos de una base

¹⁴Si B y C son subespacios de una \mathbb{F} -álgebra A , la notación \underline{BC} denota el subespacio \mathbb{F} -vectorial generado por los elementos bc , con $b \in B, c \in C$. Cada elemento de \underline{BC} es una suma finita $b_1 c_1 + \dots + b_r c_r$ de tales productos.

de V muestra que $\dim(\Lambda^n V) = \binom{d}{n}$. En particular, resulta que $\Lambda^n V = \{0\}$ si $n > d$ y que $\Lambda^d V$ es unidimensional. En este caso, el álgebra $\Lambda(V)$ también es finitodimensional, con $\dim \Lambda(V) = 2^d$. \diamond

Definición 1.36. Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie sobre \mathbb{F} , sea J el ideal de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ generado por los elementos de la forma

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y], \quad \text{para } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base \mathbb{F} -vectorial de \mathfrak{g} , la bilinealidad del corchete implica que el ideal J es generado por el conjunto finito de elementos $e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i - c_{ij}^k e_k$ en vista de las relaciones (1.8a). Si $\eta: \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g})/J$ es la aplicación cociente (la cual es un homomorfismo de \mathbb{F} -álgebras), se cumplen relaciones análogas a (1.8b):

$$\eta(e_i)\eta(e_j) - \eta(e_j)\eta(e_i) = c_{ij}^k \eta(e_k) \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n. \quad (1.12)$$

Denótese la \mathbb{F} -álgebra cociente (provisionalmente) por $\mathcal{U}'(\mathfrak{g}) := \mathcal{T}(\mathfrak{g})/J$. La construcción de $\mathcal{U}'(\mathfrak{g})$ no depende de la elección de una base de \mathfrak{g} . Resulta que $\mathcal{U}'(\mathfrak{g})$ es isomorfa al álgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de la Definición 1.25, en vista de las relaciones (1.12) y de la inyectividad de la restricción de η a $\mathcal{T}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. \diamond

De todos modos, es fácil verificar que $\mathcal{U}'(\mathfrak{g})$ tiene la misma propiedad universal que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ – véase el Lema 1.26: si $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow A$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, con valores en una \mathbb{F} -álgebra asociativa A , se puede extender φ a un (único) homomorfismo de \mathbb{F} -álgebras $\tilde{\varphi}: \mathcal{U}'(\mathfrak{g}) \rightarrow A$. En efecto, sea $\bar{\varphi}: \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ el homomorfismo de \mathbb{F} -álgebras que extiende φ al álgebra tensorial, según el Lema 1.33. Está claro que

$$\bar{\varphi}(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x) - \varphi([x, y]) = 0,$$

así que $J \subseteq \ker \bar{\varphi}$. Entonces el homomorfismo $\bar{\varphi}$ pasa al cociente como otro homomorfismo $\tilde{\varphi}: \mathcal{T}(\mathfrak{g})/J \rightarrow A$. La unicidad de $\tilde{\varphi}$ es consecuencia de la unicidad de $\bar{\varphi}$.

El ideal J no es un ideal graduado, así que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ no es una \mathbb{F} -álgebra graduada – exceptuando el caso de un álgebra de Lie abeliana, donde $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ coincide con $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$. En general, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ solo es un ejemplo de una **\mathbb{F} -álgebra filtrada**. Esta es una \mathbb{F} -álgebra que puede expresarse como una *unión creciente* de subespacios, $A = \biguparrow \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, con $A_n \subseteq A_{n+1}$ y $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$. \llbracket Si A es un álgebra graduada, también es un álgebra filtrada; se puede tomar $A_n := \bigoplus_{k=0}^n A^k$. \rrbracket

Sea $\mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$ el subespacio de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ generado por los monomios $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$ con $k \leq n$. Este subespacio no depende de la base de \mathfrak{g} , es obvio que $\mathcal{U}_n(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{U}_{n+1}(\mathfrak{g})$ y que $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})\mathcal{U}_n(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{U}_{m+n}(\mathfrak{g})$. Esto define una filtración de la \mathbb{F} -álgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

► La inyectividad de la aplicación cociente η sobre $\mathcal{T}^1(\mathfrak{g})$ sigue del siguiente teorema. Como corolario, se ve que $\mathcal{U}_1(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{F} \oplus \mathfrak{g}$ (como espacios \mathbb{F} -vectoriales).

Elíjase una *base ordenada* $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de \mathfrak{g} (arbitraria pero fija). Un monomio ordenado $M = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$ en $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ puede llamarse **anagógico**¹⁵ si los índices están en orden creciente: $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$. Sea $\mathcal{T}_n(\mathfrak{g})^{\text{ana}}$ el subespacio vectorial de $\mathcal{T}_n(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k=0}^n \mathfrak{g}^{\otimes k}$ generado por los monomios anagógicos (que son linealmente independientes). Un monomio M más general tiene un *índice* $i(M)$ que cuenta el número de descensos (cuando $i_j > i_{j+1}$) en los subíndices de M ; de tal manera que M es anagógico si y solo si $i(M) = 0$.

Esta terminología permite enunciar el lema siguiente.¹⁶

Lema 1.37. *Si $n \in \mathbb{N}$, hay una única aplicación \mathbb{F} -lineal $\sigma : \mathcal{T}_n(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{T}_n(\mathfrak{g})^{\text{ana}}$ tal que:*

(a) *la restricción de σ a $\mathcal{T}_n(\mathfrak{g})^{\text{ana}}$ es la identidad;*

(b) *para $x, y \in \mathfrak{g}$; $A, B \in \mathcal{T}(\mathfrak{g})$, se cumple la relación:*

$$\sigma(A \otimes x \otimes y \otimes B) = \sigma(A \otimes y \otimes x \otimes B) + \sigma(A \otimes [x, y] \otimes B). \quad (1.13)$$

Demostración. Se debe definir σ sobre tensores simples $M = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$, por inducción sobre el grado k y el índice $i(M)$. Cuando $i(M) = 0$, colóquese $\sigma(M) := M$ para cumplir el requisito (a).

Si $i(M) > 0$, el monomio M es de la forma $M = A \otimes e_j \otimes e_i \otimes B$ con $j > i$; el monomio $N = A \otimes e_i \otimes e_j \otimes B$ tiene índice $i(M)$ o bien $i(M) \pm 1$. Al repetir la operación varias veces, eventualmente se obtiene un monomio de índice $i(M) - 1$; considérese, por ejemplo, la composición de transposiciones:

$$(4321) \mapsto (4231) \mapsto (2431) \mapsto (2413) \mapsto (2143) \mapsto (2134) \mapsto (1234).$$

Entonces la receta recursiva (se comprobará que está bien definida):

$$\sigma(A \otimes e_j \otimes e_i \otimes B) := \sigma(A \otimes e_i \otimes e_j \otimes B) + \sigma(A \otimes [e_j, e_i] \otimes B)$$

sirve para extender σ por inducción a todo $\mathcal{T}_n(\mathfrak{g})$.

Para monomios con $i(M) = 1$ e $i(N) = 0$, la receta sí define $\sigma(M) := N + R$, donde el grado de R es menor que el grado de M . Para monomios con $i(M) \geq 2$, se debe

¹⁵Por un abuso de lenguaje: una *anagoge* usualmente denota una elevación espiritual o místico.

¹⁶Tomado de la subsección 5.7.1 del libro de Procesi. Todas las demostraciones del teorema de Poincaré, Birkhoff y Witt requieren alguna artimaña combinatoria; esta es una de las menos engorrosas.

verificar que $\sigma(M)$ no depende del orden de revertir dos descensos. Hay dos casos que considerar, según los descensos sean consecutivos o no.

En el caso de descensos no consecutivos, tómesese $M = A \otimes e_j \otimes e_i \otimes C \otimes e_l \otimes e_k \otimes B$ con $j > i, l > k$. Para simplificar la notación, escríbase $\sigma(A \otimes R \otimes B) =: \tau(R)$. Al revertir el primer descenso, se obtiene, por la linealidad de τ :

$$\begin{aligned} & \tau(e_i \otimes e_j \otimes C \otimes e_l \otimes e_k + [e_j, e_i] \otimes C \otimes e_l \otimes e_k) \\ &= \tau(e_i \otimes e_j \otimes C \otimes e_k \otimes e_l + e_i \otimes e_j \otimes C \otimes [e_l, e_k]) \\ & \quad + [e_j, e_i] \otimes C \otimes e_k \otimes e_l + [e_j, e_i] \otimes C \otimes [e_l, e_k]) \\ &= \tau(e_j \otimes e_i \otimes C \otimes e_k \otimes e_l + e_j \otimes e_i \otimes C \otimes [e_l, e_k]). \end{aligned}$$

El resultado final entonces no depende del orden de revertir $i \leftrightarrow j$ o bien $k \leftrightarrow l$.

En el caso de descensos consecutivos, tómesese $M = A \otimes e_k \otimes e_j \otimes e_i \otimes B$ con $k > j > i$. Se debe averiguar si hay igualdad en la relación siguiente:

$$\tau(e_j \otimes e_k \otimes e_i + [e_k, e_j] \otimes e_i) \stackrel{?}{=} \tau(e_k \otimes e_i \otimes e_j + e_k \otimes [e_j, e_i]). \quad (1.14)$$

Se puede aplicar la receta inductiva a los dos lados, para obtener

$$\begin{aligned} & \tau(e_j \otimes e_i \otimes e_k + e_j \otimes [e_k, e_i] + [e_k, e_j] \otimes e_i) \\ & \stackrel{?}{=} \tau(e_i \otimes e_k \otimes e_j + [e_k, e_i] \otimes e_j + [e_j, e_i] \otimes e_k + [e_k, [e_j, e_i]]). \end{aligned}$$

Aplicar la receta inductiva una vez más a los dos lados, se obtiene

$$\begin{aligned} & \tau(e_i \otimes e_j \otimes e_k + [e_j, e_i] \otimes e_k + [e_k, e_i] \otimes e_j + [e_j, [e_k, e_i]] + [e_k, e_j] \otimes e_i) \\ & \stackrel{?}{=} \tau(e_i \otimes e_j \otimes e_k + [e_k, e_j] \otimes e_i + [e_i, [e_k, e_j]] \\ & \quad + [e_k, e_i] \otimes e_j + [e_j, e_i] \otimes e_k + [e_k, [e_j, e_i]]). \end{aligned}$$

Pero la identidad de Jacobi para el álgebra de Lie \mathfrak{g} muestra que

$$[e_j, [e_k, e_i]] = -[e_k, [e_i, e_j]] - [e_i, [e_j, e_k]] = [e_k, [e_j, e_i]] + [e_i, [e_k, e_j]],$$

y así se ve que los dos lados de (1.14) sí coinciden. \square

Teorema 1.38 (Poincaré, Birkhoff, Witt). *Si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base ordenada del álgebra de Lie \mathfrak{g} , entonces los monomios ordenados $e_1^{r_1} e_2^{r_2} \cdots e_n^{r_n}$ forman una base vectorial del álgebra universal envolvente de \mathfrak{g} .*

Demostración. Está claro que los monomios ordenados generan linealmente el álgebra universal; falta comprobar su independencia lineal.

Las aplicaciones σ del Lema 1.37, definidos inicialmente sobre los subespacios $\mathcal{T}_n(\mathfrak{g})$, son compatibles para todo n y así definen un endomorfismo \mathbb{F} -lineal de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ que satisface las relaciones (1.13).

Estas relaciones implica que σ se anula sobre el ideal J y define una aplicación lineal $\bar{\sigma}: \mathcal{T}(\mathfrak{g})/J \rightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g})^{\text{ana}}$ que envía cada monomio ordenado en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ en un monomio anagógico en $\mathcal{T}(\mathfrak{g})^{\text{ana}}$. Como estos son linealmente independientes, sus preimágenes $e_1^{r_1} e_2^{r_2} \cdots e_n^{r_n}$ son también linealmente independientes; y además $\bar{\sigma}$ es un isomorfismo lineal. \square

En particular, $\bar{\sigma}(\mathcal{U}'_1(\mathfrak{g})) \simeq \mathcal{T}_1(\mathfrak{g}) = \mathbb{F} \oplus \mathfrak{g}$. Se ha comprobado que $\{1, \eta(e_1), \dots, \eta(e_n)\}$ es una base de $\mathcal{U}'_1(\mathfrak{g})$. De ahora en adelante, entonces, se puede omitir η y escribir $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \equiv \mathcal{T}(\mathfrak{g})/J$ para denotar el álgebra universal envolvente de \mathfrak{g} .

1.5 El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$

El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$, de acuerdo con (1.7), es el espacio vectorial de matrices de traza nula en $M_n(\mathbb{F})$, dotado del corchete $[a, b] := ab - ba$. En el caso $n = 2$, este espacio vectorial es tridimensional, con base

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Estas matrices cumplen $HE - EH = 2E$, $HF - FH = -2F$, $EF - FE = H$.

Por otro lado, una aplicación \mathbb{F} -bilineal $s: V \times V \rightarrow W$ queda determinada por sus valores $s(u_i, u_j)$ en pares de elementos de una base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de V . Si s es antisimétrica, basta considerar los valores $s(u_i, u_j)$ con $i < j$. Por lo tanto, se puede redefinir $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ de una manera más abstracta, como sigue.

Definición 1.39. Sea \mathbb{F} un cuerpo de característica $\neq 2$. El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ es un espacio \mathbb{F} -vectorial tridimensional, con una base $\{h, e, f\}$, dotado de un corchete determinado por las siguientes *relaciones de conmutación*:

$$[h, e] := 2e, \quad [h, f] := -2f, \quad [e, f] := h. \quad (1.16)$$

Es fácil chequear que la forma bilineal antisimétrica así definida satisface la identidad de Jacobi. \diamond

Un **ideal** en un álgebra de Lie \mathfrak{g} es un subespacio vectorial \mathfrak{l} tal que $[x, y] \in \mathfrak{l}$ para todo $x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{l}$. Es inmediato que el espacio cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{l}$ es también un álgebra de Lie bajo el corchete inducido, $[x + \mathfrak{l}, y + \mathfrak{l}] := [x, y] + \mathfrak{l}$.

Lema 1.40. *El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ es simple, es decir, no tiene ideales no triviales.*

Demostración. Sea \mathfrak{l} un ideal no nulo con $y = \alpha h + \beta e + \gamma f \neq 0$ en \mathfrak{l} . Entonces

$$\begin{aligned} [e, [e, y]] &= [e, -2\alpha e + \gamma h] = -2\gamma e \in \mathfrak{l}, \\ [f, [f, y]] &= [f, 2\alpha f - \beta h] = -2\beta f \in \mathfrak{l}. \end{aligned}$$

Luego, si $\gamma \neq 0$, entonces $e \in \mathfrak{l}$; y si $\beta \neq 0$, entonces $f \in \mathfrak{l}$ (fíjese que se ha usado $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ a la hora de dividir por 2). Si $\beta = \gamma = 0$, entonces $\alpha \neq 0$, así que $h \in \mathfrak{l}$. En cualquiera de los tres casos, las relaciones (1.16) entonces implican que $h, e, f \in \mathfrak{l}$, así que $\mathfrak{l} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$. \square

Si \mathfrak{g} es un \mathbb{F} -álgebra de Lie cualquiera y si $x \in \mathfrak{g}$, se puede considerar el operador lineal $\underline{\text{ad}} x \in \text{End}_{\mathbb{F}} \mathfrak{g}$ dado por

$$\text{ad } x: y \mapsto [x, y].$$

En el caso de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$, las relaciones (1.16) muestran que $\text{ad } h$ es diagonalizable, porque tiene tres autovalores 0, 2 y -2 (que son distintos porque $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$). En cambio, la demostración del lema anterior evidencia que $\text{ad } e$ y $\text{ad } f$ son nilpotentes, pues $(\text{ad } e)^3 = 0$, $(\text{ad } f)^3 = 0$.

► Es hora de considerar las representaciones de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ en el caso de que \mathbb{F} sea algebraicamente cerrado. (Se quiere aprovechar la forma normal de Jordan de las matrices que representan h, e, f ; pero esto requiere una garantía de existencia de autovalores.) Para simplificar la notación, en el resto de esta sección se tomará $\mathbb{F} = \mathbb{C}$; pero la clasificación es aplicable a cualquier cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0.

Sea $\sigma: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ una representación finitodimensional irreducible¹⁷ para el álgebra de Lie compleja $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Conviene abreviar $\sigma(x)v \equiv x \triangleright v$ si $x \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), v \in V$. Si α es un autovalor de $\sigma(h)$, denótese V_{α} el subespacio correspondiente:

$$V_{\alpha} := \{v \in V : h \triangleright v = \alpha v\}.$$

Si $v \in V_{\alpha}$, entonces

$$\begin{aligned} h \triangleright (e \triangleright v) &= e \triangleright (h \triangleright v) + [h, e] \triangleright v = e \triangleright (h \triangleright v) + 2e \triangleright v = (\alpha + 2)e \triangleright v, \\ h \triangleright (f \triangleright v) &= f \triangleright (h \triangleright v) + [h, f] \triangleright v = f \triangleright (h \triangleright v) - 2f \triangleright v = (\alpha - 2)f \triangleright v, \end{aligned} \quad (1.17)$$

y por lo tanto $e \triangleright v \in V_{\alpha+2}$ y $f \triangleright v \in V_{\alpha-2}$.

¹⁷Más adelante, se verá que cualquier representación irreducible para esta álgebra de Lie es automáticamente finitodimensional.

Si U es la suma directa de todos estos autoespacios, el cálculo (1.17) muestra que U es un submódulo de V , no nulo porque $\sigma(h)$ posee (al menos) un autovalor. Como V es irreducible, se concluye que $U = V$. En otras palabras, el operador \mathbb{C} -lineal $\sigma(h)$ es diagonalizable y $V = \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}$.

Lema 1.41. *Dado un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -módulo finitodimensional irreducible V , hay un $\lambda \in \mathbb{C}$ y existe una base \mathbb{C} -vectorial $\{v_0, v_1, \dots, v_r\}$ de V tal que:*

$$\begin{aligned} h \triangleright v_j &= (\lambda - 2j) v_j, \\ f \triangleright v_j &= (j + 1) v_{j+1}, \\ e \triangleright v_j &= (\lambda - j + 1) v_{j-1}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

para $j = 0, 1, \dots, r$ (tomando $v_{-1} := 0, v_{r+1} := 0$).

Demostración. Como $\dim V$ es finito, la suma directa $V = \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}$ tiene un número finito de sumandos no nulos: hay un autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $V_{\lambda} \neq 0$ y $V_{\lambda+2} = \{0\}$. Tómese $v_0 \neq 0$ en V_{λ} y nótese que $e \triangleright v_0 = 0$ necesariamente.

Para $j \in \mathbb{N}$, escríbase $v_j := (1/k!) \sigma(f)^j(v_0)$. Se obtiene $h \triangleright v_j = (\lambda - 2j)v_j$ al aplicar (1.18) consecutivamente unas j veces. Los vectores no nulos en $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ son linealmente independientes, por ser autovectores de autovalores distintos de $\sigma(h)$; por ende, solo hay un número finito de ellos. Sea $W := \text{lin}\langle v_0, v_1, \dots, v_r \rangle \leq V$, donde $r \in \mathbb{N}$ es el mínimo entero tal que $v_{r+1} = 0$.

Fíjese que $f \triangleright v_j = (j + 1)v_{j+1}$ por definición, y que

$$j(e \triangleright v_j) = e \triangleright (f \triangleright v_{j-1}) = h \triangleright v_{j-1} + f \triangleright (e \triangleright v_{j-1}).$$

Luego, al asumir que $e \triangleright v_{j-1} = (\lambda - j + 2)v_{j-2}$ en (1.18), se obtiene

$$j(e \triangleright v_j) = (\lambda - 2j + 2)v_{j-1} + (\lambda - j + 2)(j - 1)v_{j-1} = j(\lambda - j + 1)v_{j-1},$$

luego (1.18) se verifica por inducción sobre j .

Estos cálculos muestran que W es un submódulo de V ; por irreducibilidad, se obtiene $W = V$; y además, $r + 1 = \dim V$. \square

Al tomar $j = r + 1$ en (1.18), se ve que $0 = e \triangleright 0 = e \triangleright v_{r+1} = (\lambda - r)v_r$. Como $v_r \neq 0$ en V , se concluye que $\lambda = r \in \mathbb{N}$. En resumen: el Lema 1.41 muestra que $\sigma(h)$ tiene un autovalor $r \in \mathbb{N}$, y además que su espectro de autovalores es¹⁸

$$\text{sp}(\sigma(h)) = \{r, r - 2, r - 4, \dots, -r + 2, -r\}.$$

Estos autovalores de $\sigma(h)$ se llaman **pesos** de la representación σ . Nótese que el **peso máximo** es $r := \dim_{\mathbb{C}} V - 1$.

¹⁸Este resultado sigue válido si se reemplaza \mathbb{C} por cualquier otro cuerpo algebraicamente cerrado \mathbb{F} de característica 0, porque $\mathbb{Z} \subset \mathbb{F}$; se identifica $r \in \mathbb{N}$ con la suma r -tuple $1 + \dots + 1 \in \mathbb{F}$.

Proposición 1.42. *Para cada $r \in \mathbb{N}$, existe una representación irreducible del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, de dimensión $(r + 1)$. Además, dos representaciones irreducibles de la misma dimensión finita son equivalentes.*

Demostración. Para la existencia, tómesese $V := \mathbb{C}^{r+1}$ y sea $\{v_0, v_1, \dots, v_r\}$ su base estándar. Las fórmulas (1.18) definen tres operadores \mathbb{C} -lineales $\sigma(h)$, $\sigma(f)$, $\sigma(e)$ sobre V . Se verifica directamente que estas operadores cumplen las relaciones de conmutación (1.16), comprobando así que σ es una representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Si $\pi: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(W)$ es otra representación irreducible con $\dim_{\mathbb{C}} W = r + 1$, el Lema 1.41 produce una base $\{w_0, w_1, \dots, w_r\}$ de W que obedece las fórmulas (1.18). En particular, se obtiene $\pi(h)(w_j) = (r - 2j)w_j$ para $j = 0, 1, \dots, r$. Entonces es evidente que el isomorfismo \mathbb{C} -lineal $T: V \rightarrow W$ determinado por

$$T(v_j) := w_j \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, r$$

entrelaza las representaciones σ y π . Esto establece que σ y π son equivalentes. \square

1.6 Ejercicios sobre álgebras asociativas

Ejercicio 1.1. Si $A = M_n(\mathbb{F})$ es el álgebra de matrices $n \times n$ con entradas en un cuerpo \mathbb{F} , demostrar que todo ideal a izquierda de A es de la forma $Ae = \{ae : a \in A\}$ donde $e \in A$ es *idempotente*, es decir, $e^2 = e$.

Si e es idempotente, mostrar que $(1 - e)$ es idempotente y que $A \simeq Ae \oplus A(1 - e)$ como A -módulos (donde en cada caso A actúa por multiplicación a la izquierda).

Comprobar que hay idempotentes $e_1, \dots, e_n \in A$ tales que $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$, donde los Ae_i son A -módulos irreducibles e isomorfos entre sí. Verificar también que hay un isomorfismo de A -módulos $A \simeq Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \dots \oplus Ae_n$.

Ejercicio 1.2. El álgebra de **cuaterniones** es el espacio \mathbb{R} -vectorial $\mathbb{H} := \text{lin}\langle 1, i, j, k \rangle$ con el producto determinado por las relaciones $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Comprobar que

$$ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik,$$

así que \mathbb{H} es una \mathbb{R} -álgebra no conmutativa. ¿Cuál es el *centro* de \mathbb{H} ?

La *suma directa de \mathbb{R} -álgebras* $A \oplus B$ tiene producto $(a_1, b_1)(a_2, b_2) := (a_1 a_2, b_1 b_2)$. Demostrar que las siguientes \mathbb{R} -álgebras de dimensión 4:

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad \mathbb{C} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \quad \mathbb{H}$$

son mutuamente no isomorfos. ¿Habrà alguna otra?

Ejercicio 1.3. Si $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ es una representación de una \mathbb{F} -álgebra A , y si U es un subespacio A -invariante de V , sea $\eta: V \rightarrow V/U: x \mapsto x + U$ la aplicación cociente de espacios vectoriales. Demostrar que hay una única representación $\bar{\pi}: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(V/U)$ tal que $\eta \circ \pi(a) = \bar{\pi}(a) \circ \eta$ para todo $a \in A$.

(Dícese que $\bar{\pi}$ es la *representación cociente* de π sobre U/V .)

Ejercicio 1.4. Considérese el álgebra $A = \mathbb{F}[x]$ de polinomios sobre \mathbb{F} en una variable x . Demostrar que una representación de rango finito $\pi: \mathbb{F}[x] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ está determinada por el operador $T := \pi(x) \in \text{End}_{\mathbb{F}} V$.

- Si $\sigma: \mathbb{F}[x] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} W$ es otra representación de rango finito, demostrar que π y σ son equivalentes si y solo si $\dim W = \dim V$ y los operadores T y $S := \sigma(x)$ son semejantes.¹⁹
- Considérese la representación $\pi_{n,\lambda}$, donde $k \in \mathbb{N}^*$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, para la cual $V = \mathbb{F}^n$ y $T = J_{n,\lambda}$ es el bloque de Jordan $n \times n$ con autovalor λ (es decir, $t_{ii} = \lambda$, $t_{i,i+1} = 1$, $t_{ij} = 0$ para otros índices). Demostrar que los $\pi_{n,\lambda}$ son inequivalentes y que cada una es indescomponible.
- Si \mathbb{F} es algebraicamente cerrado, mostrar que cualquier representación indescomponible de $\mathbb{F}[x]$ es equivalente a algún $\pi_{n,\lambda}$. En el caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, encontrar una representación indescomponible que no sea equivalente a ningún $\pi_{n,\lambda}$.

Ejercicio 1.5. Si A es una \mathbb{F} -álgebra finitodimensional, se puede considerar la propia A como un A -módulo por la multiplicación a la izquierda: $\lambda(a)[b] := ab$, para $a, b \in A$. Denótese por A^{op} el **álgebra opuesta**: esta es el mismo espacio \mathbb{F} -vectorial A con el producto $a \cdot b := ba$. Demostrar que hay un isomorfismo de álgebras $\text{End}_A(A) \simeq A^{\text{op}}$.

Ejercicio 1.6. El **álgebra de Weyl** \mathcal{W} es la subálgebra de $\text{End}_{\mathbb{F}} V$, donde $V = \mathbb{F}[x]$, generado por dos operadores lineales x y ∂ , determinados por sus valores sobre monomios: $x(x^m) := x^{m+1}$, $\partial(x^m) := mx^{m-1}$ para $m \in \mathbb{N}$. Comprobar que $\partial x = x\partial + 1$. En seguida, demostrar que $\{x^r \partial^s : r, s \in \mathbb{N}\}$ es una base \mathbb{F} -vectorial de \mathcal{W} .

[[Indicación: para la independencia lineal, considérese el efecto sobre cada monomio $x^m \in V$.]]

Ejercicio 1.7. Si U, V son espacios \mathbb{F} -vectoriales, se identifican $\mathbb{F} \otimes U \simeq U$, $V \otimes \mathbb{F} \simeq V$, $\mathbb{F} \otimes \mathbb{F} \simeq \mathbb{F}$ por isomorfismos canónicos.

¹⁹Dos operadores lineales son semejantes si y solo si poseen matrices semejantes respecto de algunas bases vectoriales en sus espacios de dominio y codominio.

- (a) Mostrar que la aplicación bilineal $(S, T) \mapsto S \otimes T$ da lugar a un isomorfismo de espacios vectoriales:

$$\text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, V) \otimes \text{Hom}_{\mathbb{F}}(U, Z) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W \otimes U, V \otimes Z).$$

- (b) Concluir que hay un isomorfismo canónico $V \otimes U^* \simeq \text{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$.
- (c) Si $\tau: V \otimes V^* \rightarrow \mathbb{F}$ es la aplicación lineal definido por $\tau(x \otimes f) := f(x)$, describir la aplicación lineal correspondiente $\tilde{\tau}: \text{End}_{\mathbb{F}} V \rightarrow \mathbb{F}$, bajo el isomorfismo de la parte (b).

Ejercicio 1.8. Si $\mathbb{K} | \mathbb{F}$ es una extensión de cuerpos (es decir, \mathbb{K} y \mathbb{F} son cuerpos con $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$), si A es una \mathbb{F} -álgebra y si V es un A -módulo, verificar que $A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K}$ es una \mathbb{K} -álgebra que actúa \mathbb{K} -linealmente sobre $V \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K}$.

Ejercicio 1.9. El álgebra simétrica $S(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k V$ se define como un cociente del álgebra tensorial $\mathcal{T}(V)$, donde $x_1 \vee x_2 \in S^2 V$ es la coclase de $x_1 \otimes x_2 \in V \otimes V$.

- (a) Demostrar que cada $S^k V$ es isomorfo a un *subespacio* de $V^{\otimes k} \subset \mathcal{T}(V)$, al identificar

$$x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k \longleftrightarrow \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(k)},$$

de modo que $x^{\vee k} \leftrightarrow x^{\otimes k}$ en el caso $x_1 = \cdots = x_k = x \in V$.

- (b) Comprobar que $\dim S^k V = \binom{n+k-1}{k}$ si $\dim V = n$.

Ejercicio 1.10. Si $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^k$ es un álgebra graduada, su **serie de Hilbert** es la serie de potencias formal²⁰ definida por $h_A(t) := \sum_{k=0}^{\infty} (\dim A^k) t^k$. En muchos casos, esta serie representa una función racional. Calcular estas funciones racionales para las álgebras $\mathbb{F}[x]$, $\mathbb{F}[x, y]$ y $\Lambda(\mathbb{F}^n)$.

Ejercicio 1.11. Sea $\Lambda(V)$ el álgebra exterior sobre el espacio vectorial V con $\dim V = n$.

- (a) Demostrar que $\Lambda(V)$ tiene la siguiente propiedad universal: si A es una \mathbb{F} -álgebra y si $T: V \rightarrow A$ es una aplicación \mathbb{F} -lineal tal que $(Tx)^2 = 0$ para todo $x \in V$, entonces T se extiende a un único homomorfismo de álgebras $\Lambda T: \Lambda(V) \rightarrow A$.
- (b) En vista de la inclusión $W \hookrightarrow \Lambda(W)$ y la parte (a), cada $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ se extiende a un homomorfismo de álgebras $\Lambda T: \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(W)$. Si $x_1, \dots, x_k \in V$, comprobar que $\Lambda T(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) = T x_1 \wedge \cdots \wedge T x_k$.

²⁰Esta serie es “formal” por cuanto no hay necesidad de averiguar su convergencia.



Figura 1.2: Los carcajes Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 .

(c) Bajo el isomorfismo lineal $\Lambda^n V \simeq \mathbb{F}$, mostrar que $\Lambda^n T = (\det T)$.

Ejercicio 1.12. Sea Q_1 el carcaj con un solo nodo y una sola flecha (Figura 1.2). Demostrar que el álgebra del carcaj $\mathbb{F}Q_1$ es isomorfa a $\mathbb{F}[x]$.

Ejercicio 1.13. Sea Q_2 el carcaj con dos nodos y una sola flecha entre ellos (Figura 1.2). Demostrar que el álgebra del carcaj $\mathbb{F}Q_2$ es isomorfa al álgebra de matrices triangulares $T(2, \mathbb{F})$.

Ejercicio 1.14. Sea Q_3 el carcaj de Kronecker con dos nodos y dos flechas del primero al segundo (Figura 1.2). ¿Cuál es $\dim \mathbb{F}Q_3$? Encontrar una subálgebra de $T(3, \mathbb{F})$ isomorfa a $\mathbb{F}Q_3$.

Ejercicio 1.15. Sea Q_4 el carcaj con 4 nodos y 3 flechas apuntando a uno de ellos desde los otros (Figura 1.2). Encontrar un álgebra de matrices isomorfa a $\mathbb{F}Q_4$.

Ejercicio 1.16. Hallar un carcaj Q cuya álgebra $\mathbb{F}Q$ es isomorfa a $T(n, \mathbb{F})$.

Ejercicio 1.17. Escríbase $\text{ad } x(y) := [x, y]$ para $x, y \in \mathfrak{g}$; de esta manera, se obtiene una aplicación $\underline{\text{ad}} : x \mapsto \text{ad } x : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$. Demostrar que $\underline{\text{ad}}$ es una representación de \mathfrak{g} , esto es, una aplicación \mathbb{F} -lineal tal que $[\text{ad } x, \text{ad } y] = \text{ad}([x, y])$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

Ejercicio 1.18. Sea $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$ el álgebra de Lie real con base $\{x, y, z\}$ y relaciones de conmutación

$$[x, y] = z, \quad [x, z] = [y, z] = 0.$$

Exhibir tres matrices $X, Y, Z \in M_3(\mathbb{R})$ que obedecen estas relaciones de conmutación. Concluir que hay un isomorfismo entre $\mathfrak{h}_3(\mathbb{R})$ y una subálgebra de Lie de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$.

Ejercicio 1.19. Si $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{F}}(V)$ y $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{F}}(W)$ son dos representaciones del álgebra de Lie \mathfrak{g} , mostrar que la fórmula siguiente define otra representación de \mathfrak{g} sobre $V \otimes W$:

$$x \mapsto \varphi(x) \otimes 1_W + 1_V \otimes \psi(x).$$

Además, si V^* es el espacio dual de V , mostrar que $x \mapsto -\varphi(x)^t$ es una representación de \mathfrak{g} sobre V^* .

Ejercicio 1.20. Si $1_n \in M_n(\mathbb{C})$ es la matriz identidad, considérese las siguientes matrices en $M_{2n}(\mathbb{C})$:

$$I_{2n} := \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}, \quad J_n := \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}.$$

y sea $I_{2n+1} := I_{2n} \oplus [1] \in M_{2n+1}(\mathbb{C})$.

Las cuatro series de álgebras de Lie que siguen, numeradas con $n \in \mathbb{N}^*$, se llaman las **álgebras de Lie clásicas**. Todas ellas (excepto el caso D_2) son simples (no poseen ideales no triviales). En cada caso, determinar la dimensión (sobre \mathbb{C}) del ejemplo mencionado.

$$A_n: \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}) := \{ X \in M_{n+1}(\mathbb{C}) : \text{tr } X = 0 \}.$$

$$B_n: \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C}) := \{ X \in M_{2n+1}(\mathbb{C}) : X^t I_{2n+1} = -I_{2n+1} X \}.$$

$$C_n: \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) := \{ X \in M_{2n}(\mathbb{C}) : X^t J_n = -J_n X \}.$$

$$D_n: \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) := \{ X \in M_{2n}(\mathbb{C}) : X^t I_{2n} = -I_{2n} X \}.$$

Ejercicio 1.21. El **rango** de un álgebra de Lie simple \mathfrak{g} es la mayor dimensión de una subálgebra de Lie *abeliana* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Para cada una de los álgebras de Lie listadas en el Ejercicio 1.20, encontrar una subálgebra de Lie abeliana \mathfrak{h} con $\dim \mathfrak{h} = n$.

Ejercicio 1.22. Las álgebras de Lie clásicas son distintas (no isomorfas), con la excepción de las siguientes isomorfismos en rangos bajos:

$$A_1 \simeq B_1 \simeq C_1; \quad B_2 \simeq C_2; \quad A_3 \simeq D_3; \quad D_2 \simeq B_1 \oplus B_1.$$

Tómese $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. En cada caso, hallar un isomorfismo concreto entre los ejemplos del Ejercicio 1.20. Por ejemplo, para comprobar $A_1 \simeq B_1$, se debe exhibir un isomorfismo entre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ y $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$.

Ejercicio 1.23. (a) Las álgebras de Lie *reales* $\mathfrak{u}(n)$ y $\mathfrak{su}(n)$ se definen así:

$$\underline{\mathfrak{u}(n)} := \{ X \in M_n(\mathbb{C}) : X^* = -X \}, \quad \underline{\mathfrak{su}(n)} := \{ X \in \mathfrak{u}(n) : \text{tr } X = 0 \}.$$

Calcular $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}(n)$ y comprobar que $\mathfrak{u}(n) \simeq \mathfrak{su}(n) \oplus \mathbb{R}$ como \mathbb{R} -álgebras de Lie.

(b) El álgebra de Lie real $\mathfrak{so}(n)$ se define por $\underline{\mathfrak{so}(n)} := \{ X \in M_n(\mathbb{R}) : X^t = -X \}$. Calcular $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{so}(n)$. Demostrar que $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$ pero que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \not\simeq \mathfrak{so}(3)$.

Ejercicio 1.24. Demostrar que el *producto cruz* usual de vectores hace de \mathbb{R}^3 un álgebra de Lie; y comprobar que esta álgebra de Lie es isomorfa a $\mathfrak{so}(3)$.

Ejercicio 1.25. Sea $C := h^2 + 2(ef + fe) \in \mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$. Calcular $[C, x] \equiv Cx - xC$ para los casos $x = h, e, f$. Concluir que C es un elemento *central* en el álgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$.

Luego, si σ es una representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sobre un espacio V con $\dim V = r + 1$, el operador $\sigma(C) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ debe ser un operador escalar (¿por qué?). Comprobar que efectivamente $\sigma(C) = \lambda_r 1_V$ y hallar el autovalor λ_r correspondiente.

Ejercicio 1.26. Si \mathfrak{l} es un ideal de \mathfrak{g} , sea $[\mathfrak{g}, \mathfrak{l}]$ el subespacio vectorial de \mathfrak{g} generado por los elementos $[x, y]$, con $x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{l}$. Verificar que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{l}]$ también es un ideal de \mathfrak{g} .

- (a) Hay una serie decreciente de ideales $\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}^{(2)} := [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}], \dots, \mathfrak{g}^{(k+1)} := [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}]$, etc. Dícese que \mathfrak{g} es **soluble** si hay $r \in \mathbb{N}$ con $\mathfrak{g}^{(r)} = \{0\}$. Demostrar que matrices triangulares superiores

$$\underline{\mathfrak{b}_+(n, \mathbb{F})} := \{ A \in M_n(\mathbb{F}) : a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \}$$

forman un álgebra de Lie soluble.

- (b) Hay una serie decreciente de ideales $\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}^2 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1], \dots, \mathfrak{g}^{k+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k]$, etc. Dícese que \mathfrak{g} es **nilpotente** si hay $r \in \mathbb{N}$ con $\mathfrak{g}^r = \{0\}$. Demostrar que matrices triangulares estrictamente superiores

$$\underline{\mathfrak{n}_+(n, \mathbb{F})} := \{ A \in M_n(\mathbb{F}) : a_{ij} = 0 \text{ si } i \geq j \}$$

forman un álgebra de Lie nilpotente.

Se dice que A es una \mathbb{F} -**álgebra graduada** si $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A^n$ donde cada A^n es un espacio \mathbb{F} -vectorial y $x \in A^m, y \in A^n$ implican $xy \in A^{m+n}$.

Se dice que A es una \mathbb{F} -**álgebra filtrada** si $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ donde cada A^n es un espacio \mathbb{F} -vectorial; $A_n \subseteq A_{n+1}$ para cada n ; y $x \in A_m, y \in A_n$ implican $xy \in A_{m+n}$.

Ejercicio 1.27. (a) Si A es una \mathbb{F} -álgebra graduada, colóquese $A_n := \bigoplus_{k=0}^n A^k$. Comprobar que de esta manera A es también una \mathbb{F} -álgebra filtrada.

- (b) Por otro lado, si A es una \mathbb{F} -álgebra filtrada, considérese los espacios vectoriales cocientes $G^0 := A_0, G^n := A_n/A_{n-1}$ y sea $G := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} G^n$. Dado un par de elementos $\bar{x} = x + A_{m-1}$ en $G^m, \bar{y} = y + A_{n-1}$ en G^n , demostrar que la receta $\bar{x} \bar{y} := xy + A_{m+n-1}$ se extiende a un producto bien definido sobre G , de tal manera que G sea una \mathbb{F} -álgebra graduada.²¹

²¹Esta G es el álgebra graduada **asociada** al álgebra filtrada A .

Ejercicio 1.28. Verificar que $\mathcal{T}(V)$, $S(V)$ y $\Lambda(V)$ – las álgebras tensorial, simétrica y exterior sobre V , respectivamente – son \mathbb{F} -álgebras graduadas.

Si \mathfrak{g} es una \mathbb{F} -álgebra de Lie finitodimensional, demostrar que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es una \mathbb{F} -álgebra filtrada; pero que es una \mathbb{F} -álgebra graduada si y solo si el álgebra de Lie \mathfrak{g} es abeliana (es decir, su corchete es idénticamente nulo).

Ejercicio 1.29. (a) Si $g: V \rightarrow A$ es \mathbb{F} -lineal y cumple $g(x)g(y) = g(y)g(x)$ en A para todo $x, y \in V$, demostrar que g se extiende de manera única a un homomorfismo de álgebras $\tilde{g}: S(V) \rightarrow A$.

(b) Si $h: V \rightarrow A$ es una aplicación \mathbb{F} -lineal tal que $h(x)h(y) = -h(y)h(x)$ en A para todo $x, y \in V$, demostrar que h se extiende de manera única a un homomorfismo de álgebras $\tilde{h}: \Lambda(V) \rightarrow A$.

[[Indicación: usar el Lema 1.33, la propiedad universal análoga del álgebra $\mathcal{T}(V)$.]]

Ejercicio 1.30. Si \mathfrak{g} es una \mathbb{F} -álgebra de Lie finitodimensional no abeliana. Sea $\mathcal{G}(\mathfrak{g})$ el álgebra graduada asociada al álgebra filtrada $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Demostrar que hay un isomorfismo de álgebras (graduadas) entre el álgebra simétrica $S(\mathfrak{g})$ y $\mathcal{G}(\mathfrak{g})$.

[[Indicación: usar el Ejercicio 1.29 para obtener un homomorfismo apropiado. Luego, se debe apelar al teorema de Poincaré, Birkhoff y Witt para comprobar que este es un isomorfismo.]]

Se dice que A es una **superálgebra** sobre \mathbb{F} si $A = A^{\bar{0}} \oplus A^{\bar{1}}$ donde $A^{\bar{0}}$ es una subálgebra y $A^{\bar{1}}$ es un subespacio \mathbb{F} -vectorial, con un producto graduado por \mathbb{Z}_2 como sigue:²²

$$A^{\bar{0}} A^{\bar{0}} \subseteq A^{\bar{0}}, \quad A^{\bar{0}} A^{\bar{1}} \subseteq A^{\bar{1}}, \quad A^{\bar{1}} A^{\bar{0}} \subseteq A^{\bar{1}}, \quad A^{\bar{1}} A^{\bar{1}} \subseteq A^{\bar{0}}.$$

Los elementos homogéneos tiene la **paridad** $\#a := 0$ si $a \in A^{\bar{0}}$, $\#a := 1$ si $a \in A^{\bar{1}}$. El *superconmutador* de dos elementos homogéneos se define por $[a, b] := ab - (-1)^{\#a\#b}ba$.

Ejercicio 1.31. Comprobar que cualquier álgebra graduada A es una superálgebra, al tomar $A^{\bar{0}} := \bigoplus_m A^{2m}$ y $A^{\bar{1}} := \bigoplus_m A^{2m+1}$.

Demostrar que, con esta estructura, el álgebra exterior $\Lambda(V)$ es *superconmutativa*, es decir, su superconmutador es idénticamente nulo.

Ejercicio 1.32. Si V es un espacio vectorial *real* y si $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica, se define el **álgebra de Clifford** $\underline{Cl}(V, q)$ como el cociente de $\mathcal{T}(V)$ por el

²²Más generalmente, un álgebra puede ser graduado por cualquier grupo abeliano discreto. El término *superálgebra* para álgebras \mathbb{Z}_2 -graduadas fue introducido en el libro: Feliks Aleksandrovich Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York, 1966.

ideal K generado por los elementos $\{x \otimes y - y \otimes x - 2d(x, y)1 : x, y \in V\}$. \llbracket De esta manera, vale $xy - yx = 2d(x, y)$ en $C\ell(V, d)$. \rrbracket

- (a) Si $d = 0$ es la forma bilineal idénticamente nula, verificar que $C\ell(V, 0) \simeq \Lambda(V)$.
- (b) Si d es no degenerada, V posee una base “ortonormal” $\{e_1, \dots, e_n\}$ tal que $d(e_i, e_i) = \pm 1$ y $d(e_i, e_j) = 0$ para $i \neq j$. Comprobar que $C\ell(V, d)$ tiene una base \mathbb{R} -vectorial dado por productos anagógicas $e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_k}$, con $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$, así que $\dim C\ell(V, d) = 2^n$.
- (c) Demostrar que $C\ell(V, d)$ es un álgebra de Clifford filtrada (no graduada si $d \neq 0$); pero también es una superálgebra real.
- (d) Comprobar que el álgebra graduada asociada a $C\ell(V, d)$ es isomorfa a $\Lambda(V)$.

Ejercicio 1.33. (a) Si $f: V \rightarrow A$ es \mathbb{R} -lineal y cumple $f(x)^2 = d(x, x)1$ en A para todo $x \in V$, demostrar que f se extiende de manera única a un homomorfismo de álgebras $\tilde{f}: C\ell(V, d) \rightarrow A$.

- (b) Si d y q son dos formas \mathbb{R} -bilineales simétricas no degeneradas sobre V , demostrar que $C\ell(V, d) \simeq C\ell(V, q)$ si y solo si d y q tienen la misma signatura.²³

²³La forma bilineal simétrica $x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2$ sobre \mathbb{R}^n es no degenerada si y solo si $r + s = n$; su *signatura* es $r - s$. Por el teorema de Sylvester, cualquier forma bilineal simétrica sobre \mathbb{R}^n es congruente con una de estas.

2 Representaciones de álgebras finitodimensionales

En este capítulo, A denotará un álgebra asociativa, *de dimensión finita*, sobre un cuerpo fijo \mathbb{F} . Las representaciones de A que se consideran serán de grado finito.

2.1 Representaciones semisimples

Definición 2.1. Una representación $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ se llama **semisimple** si π es una suma directa de representaciones irreducibles.

Decir que π es *irreducible* es equivalente a decir que V es un **A -módulo simple**, es decir, que V no posee A -submódulos triviales.¹ Entonces V es un A -módulo semisimple si y sólo si V es una suma directa de A -submódulos simples. \diamond

Ejemplo 2.2. Si $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} U$ es una representación irreducible de grado finito, entonces $V := \text{End}_{\mathbb{F}} U$ es un A -módulo semisimple. En efecto, defínase

$$\tilde{\pi}(a)(v) : x \mapsto \pi(a)(vx) \quad \text{para } a \in A, v \in \text{End}_{\mathbb{F}} U, x \in U.$$

Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una base \mathbb{F} -vectorial de U , entonces $v \mapsto (vx_1, \dots, vx_n) : V \rightarrow U^{\oplus n}$ es un isomorfismo \mathbb{F} -lineal que entrelaza $\tilde{\pi}$ con $n\pi \equiv \pi \oplus \dots \oplus \pi$ (n sumandos).

Al identificar U con \mathbb{C}^n con su base estándar, este isomorfismo lleva una matriz en $\text{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n) = M_n(\mathbb{F})$ a la suma directa de sus columnas: cada columna es un A -submódulo del espacio vectorial de matrices (A actúa a izquierda sobre las matrices). \diamond

Definición 2.3. Sea $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ es una representación de grado finito. Si $U \leq V$ es un A -submódulo, entonces $V \simeq U \oplus (V/U)$ como espacios \mathbb{F} -vectoriales (al extender una base de U a una base de V). Dícese que V es un A -módulo **completamente reducible** si para cada A -submódulo U existe otro A -submódulo $W \leq V$ tal que $U \oplus W \simeq V$. \diamond

Nótese que el A -submódulo suplementario W es isomorfo a V/U como A -módulos. En efecto, sea $P: V \rightarrow W$ la proyección a lo largo de U , es decir, $P(y + z) := z$ para $y \in U, z \in W$. Está claro que $\pi(a)P = P\pi(a)$ para $a \in A$. Defínase $Q: V/U \rightarrow W$ por $Q(x + U) := P(z)$ para $x \in V$. Entonces Q es un isomorfismo \mathbb{F} -lineal y además

$$\pi(a)Q(x + U) = \pi(a)P(x) = P\pi(a)x = Q(\pi(a)x + U),$$

así que Q es un operador entrelazante invertible.

¹Cuando se habla de V como A -módulo, se sobreentiende que la acción de A sobre V está dada por la representación π , esto es, $ax := \pi(a)(x)$ para $a \in A, x \in V$.

Lema 2.4. *Sea V un A -módulo completamente reducible. Entonces, cada A -submódulo [respectivamente, cada A -módulo cociente] de V es también completamente reducible.*

Demostración. Sea $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ la representación dada. Sea U un A -submódulo de V , es decir, un subespacio vectorial invariante bajo $\pi(A)$. Por hipótesis, existe otro A -submódulo W de V tal que $V \simeq U \oplus W$.

Sea $P \in \text{End}_{\mathbb{F}} V$ el proyector² definido por $P(y+z) := y$ para $y \in U, z \in W$; de modo que $\text{im } P = U$ y $\text{ker } P = W$. Como el subespacio $U \leq V$ es $\pi(A)$ -invariante, es evidente que P conmuta con π , es decir, $P \in \text{End}_A V$. Si $X \leq U$ es $\pi(A)$ -invariante, entonces $X \oplus W$ es un subespacio $\pi(A)$ -invariante de V . Por hipótesis, hay otro A -submódulo Y de V tal que $V \simeq (X \oplus W) \oplus Y$ como A -módulos. Al aplicar P a los dos lados de la suma directa $V \simeq X \oplus (W \oplus Y)$, se obtiene $U \simeq X \oplus P(Y)$. Entonces $P(Y)$ es un A -submódulo de U suplementario a X .

Ahora sea $\eta: V \rightarrow V/U: x \mapsto x + U$ la aplicación cociente. Sea $\bar{\pi}(a): x + U \mapsto \pi(a)x + U$ la *representación cociente* de A sobre V/U . Nótese que $\bar{\pi}$ está bien definida porque U es $\pi(A)$ -invariante, y que η entrelaza π y $\bar{\pi}$. Si $\bar{M} \leq V/U$ es un subespacio $\bar{\pi}(A)$ -invariante, sea $M := \eta^{-1}(\bar{M})$; este es un subespacio $\pi(A)$ -invariante de V . Entonces hay otro A -submódulo $N \leq V$ tal que $V \simeq M \oplus N$. Es fácil comprobar que $\bar{N} := \eta(N)$ es un A -submódulo de V/U tal que $U/V \simeq \bar{M} \oplus \bar{N}$. \square

Proposición 2.5. *Una representación de grado finito $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ es semisimple si y solo si el A -módulo V es completamente reducible.*

Demostración. Se demuestra esta equivalencia por inducción. Si π es irreducible, en particular si $\dim V = 1$, entonces no hay nada que mostrar.

Supóngase que la proposición es válida cuando $\dim V < n$. Si V es un A -módulo completamente reducible pero no simple, entonces posee dos A -submódulos no triviales $U \leq V$ y $W \leq V$ con $V \simeq U \oplus W$. Como $\dim U < n$ y $\dim W < n$, estas subrepresentaciones son semisimples: pueden expresarse como sumas directas de A -submódulos simples, $U \simeq U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ y $W \simeq W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$. Por lo tanto, $V \simeq U_1 \oplus \cdots \oplus U_r \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ es también una suma directa de A -submódulos simples.

Por otro lado, si π es semisimple pero no irreducible, se puede escribir $V \simeq V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ con $k > 1$, donde cada V_j es un A -submódulo simple de V . Si U es un A -submódulo no trivial cualquiera de V , sea $P \in \text{End}_A V$ el proyector con $\text{im } P = V_1$ y $\text{ker } P = V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$. Si $P(U) = \{0\}$, entonces $U \leq V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$. Por inducción sobre el número k de sumandos, se puede asumir que existe un A -submódulo X de V con $U \oplus X = V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$; por ende, $U \oplus (X \oplus V_1) \simeq V$.

²En contraste con la aplicación P del párrafo anterior, aquí el codominio de P es el espacio total V .

Si $P(U) \neq \{0\}$, entonces $P(U)$ es un A -submódulo no nulo de V_1 , así que $P(U) = V_1$ por irreducibilidad. Sea $Y := U \cap \ker P$, el cual es un subespacio $\pi(A)$ -invariante de $V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$. Nuevamente, por inducción sobre k , se puede suponer que hay un A -submódulo Z de V tal que $Y \oplus Z \simeq V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$. Entonces $U \cap Z = Y \cap Z = \{0\}$ porque $P(Z) = \{0\}$; luego, $U \oplus Z = V_1 \oplus Y \oplus Z \simeq V$. Se concluye que V es completamente reducible. \square

En vista de la última proposición, se puede considerar los términos *semisimple* y *completamente reducible* como sinónimos. Así, es permitido hablar de un “ A -módulo semisimple” y de una “representación completamente reducible”.

Sea X_A el conjunto de las clases de isomorfía de los A -módulos finitodimensionales simples (o bien, lo que es lo mismo, las clases de equivalencia de las representaciones irreducibles de A , de rango finito). Si $\xi \in X_A$ y si V es un A -módulo semisimple, considérese la suma de A -submódulos

$$V_{(\xi)} := \sum \{U : U \leq V, [U] = \xi\}.$$

Al eliminar submódulos redundantes (por inducción sobre $\dim V$), se llega a *una suma directa* de un número finito de tales submódulos U . (Fíjese que si $U_1 \leq V$ y $U_2 \leq V$ son simples, entonces $U_1 \cap U_2$ es también un A -submódulo de V , de modo que $U_1 = U_2$ o bien $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ por irreducibilidad.) Si V no posee A -submódulo simple alguno de la clase ξ , entonces $V_{(\xi)} = \{0\}$. Como V es semisimple, entonces V es la suma de todos estos $V_{(\xi)}$ y de nuevo se llega a una suma directa finita:

$$V = \bigoplus_{\xi \in X_A} V_{(\xi)}.$$

Los sumandos $V_{(\xi)}$ se llaman **componentes isotípicos** del A -módulo V .

► En adelante en esta sección, se supondrá que \mathbb{F} es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Lema 2.6. Sea $\{U_\xi : \xi \in X_A\}$ una enumeración sin repeticiones de los A -módulos simples – es decir, se toma un A -módulo particular U_ξ de cada clase ξ . Si V es un A -módulo finitodimensional semisimple, entonces hay un isomorfismo de A -módulos:

$$V \simeq \bigoplus_{\xi \in X_A} \text{Hom}_A(U_\xi, V) \otimes_{\mathbb{F}} U_\xi. \quad (2.1)$$

Demostración. Defínase una aplicación \mathbb{F} -lineal

$$S_\xi : \text{Hom}_A(U_\xi, V) \otimes_{\mathbb{F}} U_\xi \rightarrow V \quad \text{por} \quad S_\xi(\varphi \otimes x) := \varphi(x) \in V.$$

Bajo la acción $a \cdot (\varphi \otimes x) := \varphi \otimes (a \cdot x)$, el espacio \mathbb{F} -vectorial $\text{Hom}_A(U_\xi, V) \otimes U_\xi$ es un A -módulo. Además, resulta que $\varphi(a \cdot x) = a \cdot \varphi(x)$ porque $\varphi \in \text{Hom}_A(U_\xi, V)$. Esto muestra que S_ξ es también una aplicación entrelazante (es decir, un morfismo de A -módulos).

Si $\varphi \neq 0$ en $\text{Hom}_A(U_\xi, V)$, el lema de Schur (Proposición 1.15) dice que φ es inyectivo, así que $\varphi(U_\xi)$ es un A -submódulo simple de V , isomorfo a U_ξ . Por lo tanto, $S_\xi(\text{Hom}_A(U_\xi, V) \otimes U_\xi) \subseteq V_{(\xi)}$.

Si $V_{(\xi)} \neq \{0\}$, entonces $V_{(\xi)} \simeq U_\xi \oplus \cdots \oplus U_\xi \equiv m U_\xi$ para algún m . Dicho de otro modo, hay un A -isomorfismo $\theta: V_{(\xi)} \rightarrow \mathbb{F}^m \otimes_{\mathbb{F}} U_\xi$, donde la acción de A al lado derecho es $a \cdot (c \otimes x) := c \otimes (a \cdot x)$. Si $\{e_1, \dots, e_m\}$ es la base usual de \mathbb{F}^m , entonces cada $\varphi_i: x \mapsto \theta^{-1}(e_i \otimes x)$ es un elemento de $\text{Hom}_A(U_\xi, V)$; y además, $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ son linealmente independientes.

Si $\varphi \in \text{Hom}_A(U_\xi, V)$, entonces $\theta(\varphi(x)) = (x_1, \dots, x_m)$, donde cada $x \mapsto x_i$ es un elemento de $\text{End}_A(U_\xi)$. Ahora bien, como \mathbb{F} es algebraicamente cerrado, el lema de Schur (Corolario 1.16) dice que $\text{End}_A(U_\xi) \simeq \mathbb{F}$, así que hay $\alpha_i \in \mathbb{F}$ con $x_i = \alpha_i \varphi_i(x)$. Se ha comprobado que $\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \cdots + \alpha_m \varphi_m$, y se deduce que $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ es una base vectorial de $\text{Hom}_A(U_\xi, V)$. En conclusión, $S_\xi: \text{Hom}_A(U_\xi, V) \otimes U_\xi \rightarrow V_{(\xi)}$ es un isomorfismo de A -módulos.

El número de sumandos no nulos al lado derecho de (2.1) es finito, pues $\dim_{\mathbb{F}} V < \infty$. La suma directa de las S_ξ correspondientes es el isomorfismo buscado. \square

Corolario 2.7. *Una A -módulo semisimple V puede escribirse en la forma*

$$V \simeq n_1 V_1 \oplus n_2 V_2 \oplus \cdots \oplus n_r V_r, \quad (2.2)$$

donde V_1, \dots, V_r son A -módulos simples, no isomorfos entre sí; con $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$. \square

Proposición 2.8. *Sea V un A -módulo semisimple de la forma (2.2) y sea U un A -submódulo de V . Entonces*

$$U \simeq m_1 V_1 \oplus m_2 V_2 \oplus \cdots \oplus m_r V_r$$

para algunos $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ con $m_k \leq n_k$ para $k = 1, \dots, r$. Además, la inclusión $i: U \hookrightarrow V$ es la suma directa de r inclusiones $i_k: m_k V_k \hookrightarrow n_k V_k$ de la forma

$$i_k(x_1, \dots, x_{m_k}) = (x_1, \dots, x_{m_k}) B_k$$

donde B_k es una matriz $m_k \times n_k$ con entradas en \mathbb{F} ; al lado derecho, se considera (x_1, \dots, x_{m_k}) como una matriz $1 \times m_k$ con entradas en V_k . La matriz B_k tiene rango m_k , es decir, sus filas son linealmente independientes.

Demostración. Se demuestra el resultado por inducción sobre el número total de sumandos de V , $n = n_1 + \cdots + n_r$. El caso $n = 1$ es trivial, porque $V = V_1$ es simple y sus únicos A -submódulos son $\{0\}$ y V_1 (así que $n_1 = 1$, $m_1 = 0$ o 1).

Ahora sea W un A -submódulo simple de U con $W \neq \{0\}$. Al componer la inclusión $W \hookrightarrow V$ con la proyección sobre cualquiera de los sumandos en (2.2), el lema de Schur muestra que el resultado es no nulo para un solo $n_k V_k$, y que $W \simeq V_k$. Luego de identificar W con V_k , esta inclusión tiene la forma $x \mapsto (\alpha_1 x, \dots, \alpha_{n_k} x)$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_k} \in \mathbb{F}$ no todos cero.³

Sea $g_k \in \text{GL}(n_k, \mathbb{F})$ una matriz invertible tal que $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_k})g_k = (1, 0, \dots, 0)$. Nótese que el grupo $\text{GL}(n_k, \mathbb{F})$ actúa (a derecha) sobre $n_k V_k$ de tal modo que $W \cdot g_k = V_k \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0$. Esta acción de grupo se extiende a una acción sobre todo V que deja fijos los otros sumandos $n_j V_j$. Como resultado, $U \cdot g_k = V_k \oplus U'$, donde U' es un A -submódulo de $n_1 V_1 \oplus \cdots \oplus (n_k - 1)V_k \oplus \cdots \oplus n_r V_r$.

Por la hipótesis inductiva, $i': U' \hookrightarrow V$ está dada por posmultiplicación por matrices B'_1, \dots, B'_r . Al tomar $B_k := B'_k g_k^{-1}$ y $B_j := B'_j$ para $j \neq k$, se obtiene el resultado deseado. (Fíjese que la transformación $B'_k \mapsto B_k$ no cambia el rango matricial.) \square

Corolario 2.9. *Sea $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ una representación irreducible de grado finito, y sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ un juego de vectores linealmente independientes en V . Si y_1, \dots, y_n son n vectores cualesquiera en V , entonces existe $a \in A$ tal que*

$$\pi(a)x_i = y_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Demostración. Considérese la aplicación \mathbb{F} -lineal $f: A \rightarrow nV$ dada por

$$f(a) := (\pi(a)x_1, \dots, \pi(a)x_n).$$

Si el enunciado fuera falso, la imagen $U := f(V)$ sería un A -submódulo propio de nV , semisimple por el Lema 2.4 y (por la Proposición 2.8) dada por posmultiplicación por una matriz $B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ para algún $m < n$. Luego, hay vectores $z_1, \dots, z_m \in V$ tales que

$$(z_1, \dots, z_m)B = f(1) = (x_1, \dots, x_n).$$

Al ser $m < n$, existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$ tal que $B(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t = (0, \dots, 0)^t \in \mathbb{F}^m$. Luego

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = (z_1, \dots, z_m)B(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t = 0,$$

lo cual contradice la independencia lineal de $\{x_1, \dots, x_n\}$. \square

³Cada término $x \mapsto \alpha_j x$ es un A -endomorfismo de V_k , y por ende $\alpha_j \in \mathbb{F}$ por ser \mathbb{F} algebraicamente cerrado, en vista del Corolario 1.16.

Nótese que la asignación $x_i \mapsto y_i$, $i = 1, \dots, n$, determina un elemento de $\text{End}_{\mathbb{F}} V$ si $n = \dim_{\mathbb{F}} V$; y si $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una base \mathbb{F} -vectorial de V , cualquier elemento de $\text{End}_{\mathbb{F}} V$ tiene esta forma. (En cambio, si $n < \dim_{\mathbb{F}} V$, esta asignación corresponde a varios elementos de $\text{End}_{\mathbb{F}} V$; este caso es relevante si V tiene dimensión infinita.) Dícese que un conjunto \mathcal{T} de endomorfismos es **denso** en $\text{End}_{\mathbb{F}} V$ si dados $x_1, \dots, x_n \in V$ linealmente independientes y $y_1, \dots, y_n \in V$ arbitrarios, hay $T \in \mathcal{T}$ tal que $T(x_i) = y_i$ para cada i . Obviamente, si $\dim_{\mathbb{F}} V$ es finita, esto es válido solo si $\mathcal{T} = \text{End}_{\mathbb{F}} V$. Esta terminología motiva el nombre del siguiente resultado, el *teorema de densidad* de Jacobson.⁴

Teorema 2.10 (Jacobson). (a) *Sea $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ una representación irreducible de grado finito. Entonces el homomorfismo π es sobreyectivo.*

(b) *Más generalmente, si $V \simeq V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r$ es una suma directa de A -módulos simples, no isomorfos entre sí, entonces el homomorfismo*

$$\pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_r: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V_1 \oplus \dots \oplus \text{End}_{\mathbb{F}} V_r \quad (2.4)$$

es también sobreyectivo.

Demostración. Ad(a): Tómese $T \in \text{End}_{\mathbb{F}} V$. Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base de V y sea $y_i := T(x_i)$ para $i = 1, \dots, n$. Por el Corolario 2.9, existe $a \in A$ que satisface (2.3), así que $T(x_i) = y_i = \pi(a)x_i$ para todo vector x_i de la base, y por ende $T = \pi(a)$.

Ad(b): En el caso general, sea $B := (\pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_r)(A) \leq \bigoplus_{i=1}^r \text{End}_{\mathbb{F}} V_i$. Hay isomorfismos de A -módulos $\text{End}_{\mathbb{F}} V_i \simeq n_i V_i$ donde $n_i = \dim_{\mathbb{F}} V_i$, así que $\bigoplus_{i=1}^r \text{End}_{\mathbb{F}} V_i$ es un A -módulo semisimple, de la forma (2.2).

Por la Proposición 2.8, el A -submódulo B tiene una descomposición correspondiente: $B \simeq B_1 \oplus \dots \oplus B_r$, donde cada B_i es un A -submódulo de $\text{End}_{\mathbb{F}} V_i$. De la parte (a), se obtiene $B_i = \text{End}_{\mathbb{F}} V_i$. En consecuencia, se ve que $B = \bigoplus_{i=1}^r \text{End}_{\mathbb{F}} V_i$. \square

2.2 Estructura de álgebras finitodimensionales

Si $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ es una representación del álgebra A , su núcleo $\ker \pi$ es un *ideal* de A .

Definición 2.11. El **radical** de una \mathbb{F} -álgebra finitodimensional A es la totalidad de elementos que actúan trivialmente en representaciones irreducibles:

$$\underline{\text{rad}} A := \bigcap \{ \ker \pi : \pi \text{ es una representación irreducible de } A \}. \quad \diamond$$

⁴Véase, por ejemplo, la sección 4.3 del libro: Nathan Jacobson, *Basic Algebra II*, Dover Books, Mineola, NY, 1989. El teorema de densidad, en un contexto más general, introduce el *conmutante* $A' := \text{End}_A V$ y el *biconmutante* $A'' := \text{End}_{A'} V$ para un A -módulo semisimple V y demuestra que A es denso en A'' en el sentido indicado.

Si I es un ideal a izquierda de A , el cociente A/I es un espacio \mathbb{F} -vectorial y también un A -módulo (a izquierda): $a(b + I) := ab + I$ para $(b + I) \in A/I$ y $a \in A$. El ideal I es *maximal* si y solo si el A -módulo es *simple*. No es difícil comprobar, entonces, que $\text{rad } A$ es la intersección de los ideales a izquierda maximales de A . [[Dicha intersección es obviamente un ideal a izquierda. Como la multiplicación a derecha $b \mapsto ba$ permuta los ideales a izquierda maximales, también es un ideal a derecha.]] Otra caracterización del radical es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{rad } A &= \{ b \in A : (1 - ab) \text{ es invertible, para todo } a \in A \} \\ &= \{ c \in A : (1 - ca) \text{ es invertible, para todo } a \in A \}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.12. Sea $A := \mathbb{F}[x]/(x^m)$, una \mathbb{F} -álgebra conmutativa de dimensión m del Ejemplo 1.18(c). Si $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ es una representación irreducible, entonces $V \simeq \mathbb{F}$ por el Corolario 1.17, $\pi(1) = 1 \in \mathbb{F}$ y $\pi(\bar{x}) = \alpha \in \mathbb{F}$ cumple $\alpha^m = \pi(\bar{x}^m) = 0$. Por lo tanto, hay una sola representación irreducible de A hasta equivalencia; en consecuencia, $\text{rad } A = \ker \pi = (\bar{x})$, el cual es un ideal nilpotente de A , de codimensión 1. \diamond

Proposición 2.13. Una \mathbb{F} -álgebra finitodimensional A posee un número finito de representaciones irreducibles, no isomorfos entre sí. Estas representaciones V_1, \dots, V_r son finitodimensionales; y hay un isomorfismo de \mathbb{F} -álgebras:

$$\frac{A}{\text{rad } A} \simeq \text{End}_{\mathbb{F}} V_1 \oplus \dots \oplus \text{End}_{\mathbb{F}} V_r. \quad (2.5)$$

Demostración. Si $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ es una representación irreducible y si $x \in V$ con $x \neq 0$, entonces $\pi(A)x$ es un A -submódulo no nulo de V , porque $x = \pi(1)x \in \pi(A)x$. Por irreducibilidad, se obtiene $V = \pi(A)x$, así que V es finitodimensional, con $\dim V \leq \dim \pi(A) \leq \dim A$, habida cuenta de que π es una aplicación \mathbb{F} -lineal.

Si $\pi_i: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V_i$, para $i = 1, \dots, r$, es un juego de representaciones irreducibles inequivalentes, el Teorema 2.10 muestra que el homomorfismo $\Pi := \pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_r$ de (2.4) es sobreyectivo. En particular, Π es una aplicación \mathbb{F} -lineal de A en $\bigoplus_{i=1}^r \text{End}_{\mathbb{F}} V_i$; luego

$$r \leq \sum_{i=1}^r \dim \text{End}_{\mathbb{F}} V_i \leq \dim A.$$

El número de representaciones irreducibles inequivalentes es finito, acotado por $\dim A$.

Si ahora $\{\pi_1, \dots, \pi_r\}$ es una enumeración de *todas* las representaciones irreducibles de A (hasta equivalencia), entonces el núcleo del homomorfismo (2.4) es

$$\ker \Pi = \ker(\pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_r) = \bigcap_{i=1}^r \ker \pi_i = \text{rad } A,$$

por la definición del radical. La conclusión (2.5) sigue, pues $A/\ker \Pi \simeq \text{im } \Pi$. \square

Corolario 2.14. Si $d_i \equiv \dim V_i$ es el grado de la representación irreducible π_i de A , entonces

$$d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_r^2 \leq \dim A, \quad (2.6)$$

con igualdad si y solo si $\text{rad } A = \{0\}$.

Definición 2.15. Una \mathbb{F} -álgebra finitodimensional A es **semisimple** si $\text{rad } A = \{0\}$. \diamond

Es evidente que una \mathbb{F} -álgebra *simple* (esto es, sin ideales no triviales) es también semisimple: el ideal $\text{rad } A$ no es todo A porque $1 \notin \text{rad } A$, así que $\text{rad } A = \{0\}$.

Proposición 2.16. Para un álgebra finitodimensional A sobre un cuerpo algebraicamente cerrado \mathbb{F} , las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) A es semisimple.
- (b) Si V_1, \dots, V_r son todos los A -módulos simples, hasta isomorfía, con $d_i = \dim V_i$ para cada i , entonces $d_1^2 + \cdots + d_r^2 = \dim A$.
- (c) Existen $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{N}^*$ tales que $A \simeq \bigoplus_{i=1}^r M_{d_i}(\mathbb{F})$.
- (d) Cada representación finitodimensional de A es semisimple.
- (e) La propia álgebra A (por multiplicación a izquierda) es un A -módulo semisimple.

Demostración. La equivalencia (a) \iff (b) es el Corolario 2.14. Del isomorfismo (2.5) se deduce la implicación (a) \implies (c).

Para obtener (c) \implies (a), es cuestión de notar que el álgebra $M_d(\mathbb{F})$ es simple y tiene una sola representación irreducible (hasta equivalencia), sobre \mathbb{F}^d visto como un espacio de “vectores de columna”. Cualquier $M_d(\mathbb{F})$ -módulo finitodimensional tiene la forma $m\mathbb{F}^d$ para algún m .

Entonces es fácil comprobar que (c) \implies (d), mientras que (d) \implies (e) es inmediato.

Falta comprobar (e) \implies (c). Por hipótesis, hay un isomorfismo de A -módulos $A \simeq n_1 V_1 \oplus \cdots \oplus n_s V_s$ donde V_1, \dots, V_s son A -módulos simples, no isomorfos entre sí.

Sea $B := \text{End}_A(A)$ el álgebra de A -endomorfismos de A . Por el lema de Schur, cada $\beta \in B$ no nula lleva V_i en una copia isomorfa de V_i : se concluye que

$$B \simeq \bigoplus_{i=1}^s \text{End}_A(n_i V_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^s M_{n_i}(\text{End}_A V_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^s M_{n_i}(\mathbb{F}),$$

donde el tercer isomorfismo viene también del Lema de Schur (Corolario 1.16).

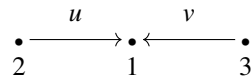
Por otro lado, cualquier A -endomorfismo de la acción a izquierda $b \mapsto ab$ viene de la multiplicación a derecha, $b \mapsto bc$, para algún $c \in A$, por la asociatividad $(ab)c = a(bc)$. Esto dice que $B \simeq A^{\text{op}}$, el *álgebra opuesta* de A . Por último, nótese que la transpuesta de matrices da un isomorfismo $M_n(\mathbb{F})^{\text{op}} \simeq M_n(\mathbb{F})$ para cualquier n . Entonces hay isomorfismos de \mathbb{F} -álgebras $A \simeq B^{\text{op}} \simeq \bigoplus_{i=1}^s M_{n_i}(\mathbb{F})$; la implicación (e) \implies (c) queda establecida. \square

2.3 Representaciones indescomponibles

Las Proposiciones 2.13 y 2.16 esclarecen la estructura de álgebras semisimples (sobre un cuerpo algebraicamente cerrado), cuyas representaciones son sumas directas de representaciones irreducibles. Para álgebras más generales, cuyos radicales no son triviales, la situación es más compleja: puede haber representaciones que son indescomponibles en sumas directas pero no irreducibles.

En esta sección, el cuerpo \mathbb{F} será algebraicamente cerrado.

Ejemplo 2.17. Sea $A = \mathbb{F}Q$ el álgebra del carcaj siguiente:



El álgebra A tiene dimensión 5: según la Definición 1.29, una base es $\{p_1, p_2, p_3, a_u, a_v\}$, donde los p_j son idempotentes, $p_j^2 = p_j$, uno para cada vértice, y a_u, a_v corresponden a las flechas. No hay caminos de longitud mayor que 1 en este carcaj. Nótese que $a_u a_v = 0 = a_v a_u$ porque las flechas no son consecutivos. Los productos no nulos entre los p_j y las flechas son $p_1 a_u = a_u = a_u p_2, p_1 a_v = a_v = a_v p_3$.

Hay un isomorfismo entre A y una subálgebra 5-dimensional de $M_3(\mathbb{F})$, definido como sigue. Denótese por e_{ij} la **matriz elemental** con entrada (i, j) igual a 1 y sus otras entradas cero. Las matrices elementales diagonales son idempotentes: $e_{kk}^2 = e_{kk}$. La regla de multiplicación matricial es $e_{ij} e_{kl} = e_{il} \llbracket j = k \rrbracket$. Entonces la aplicación \mathbb{F} -lineal inyectiva $A \rightarrow M_3(\mathbb{F})$ dada por

$$p_1 \mapsto e_{11}, \quad p_2 \mapsto e_{22}, \quad p_3 \mapsto e_{33}, \quad a_u \mapsto e_{12}, \quad a_v \mapsto e_{13},$$

identifica A con una subálgebra de $M_3(\mathbb{F})$. La notación

$$A \simeq \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

sirve para exhibir este isomorfismo entre $\mathbb{F}Q$ y un álgebra matricial.

El subespacio $\mathbb{F}e_{12} + \mathbb{F}e_{13}$ es un ideal nilpotente maximal de este álgebra; este es el radical de A :

$$\text{rad } A \simeq \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es evidente que $A/\text{rad } A \simeq \mathbb{F} \oplus \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}$, visto como la subálgebra diagonal (¡semisimple!) de $M_3(\mathbb{F})$. Fíjese que las tres copias de \mathbb{F} son representaciones irreducibles (obviamente, por ser unidimensionales) de A , pero son inequivalentes al examinar la acción de a_u y a_v sobre cada copia. El último isomorfismo entonces ejemplifica la Proposición 2.13.

La inyección $A \hookrightarrow M_3(\mathbb{F}) \simeq \text{End}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^3)$ es una representación de A , de rango 3. No es irreducible, porque $\mathbb{F}e_3$ y $\mathbb{F}e_2 + \mathbb{F}e_3$ son A -submódulos no triviales de \mathbb{F}^3 . Aun así, esta representación de A es indescomponible. \diamond

► Si A es un \mathbb{F} -álgebra finitodimensional y si V es un A -módulo finitodimensional, entonces bien V es indescomponible, o bien $V = U \oplus W$ es una suma directa no trivial de A -submódulos de menor dimensión. Al repetir este argumento con U y W , etcétera (por inducción sobre $\dim V$, si se quiere), se llega a una descomposición:

$$V \simeq V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s,$$

donde los V_j son indescomponibles. Se puede obtener una descomposición de este tipo de varias maneras, lo que plantea un interrogante sobre su unicidad. El resultado principal de esta sección (el Teorema 2.21) muestra que esta descomposición es “esencialmente única”.

Definición 2.18. Sea V un A -módulo finitodimensional de una \mathbb{F} -álgebra finitodimensional A . Si U es un subespacio A -invariante de V , entonces U es un A -submódulo de V y el espacio vectorial cociente V/U es también un A -módulo.

Una **filtración** de V es una cadena ascendente de A -submódulos:

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m = V.$$

Los *cocientes* de la filtración son los A -módulos $W_j := V_j/V_{j-1}$ para $j = 1, \dots, m$. Si algún W_j es reducible, posee un A -submódulo no trivial W'_j ; sea $V'_j := \eta_{j-1}^{-1}(W'_j)$, donde $\eta_{j-1}: V_j \rightarrow V_{j-1}$ es el A -morfismo cociente. Entonces $V_{j-1} \subset V'_j \subset V_j$ y por ende es posible intercalar V'_j en la filtración original. Al repetir este proceso un número finito de veces, se obtiene una filtración maximal de V donde todos los cocientes son irreducibles. \diamond

Teorema 2.19 (Jordan y Hölder). *Sea V un A -módulo finitodimensional de una \mathbb{F} -álgebra finitodimensional A . Dadas dos filtraciones maximales de V ,*

$$\{0\} \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m = V \quad \text{y} \quad \{0\} \subset V'_1 \subset \cdots \subset V'_n = V,$$

con cocientes irreducibles $W_i = V_i/V_{i-1}$ y $W'_j = V'_j/V'_{j-1}$, entonces resulta que $n = m$ y hay una permutación $\sigma \in S_m$ tal que $W'_j \simeq W_{\sigma(j)}$ para $j = 1, \dots, m$.

Demostración. Por inducción sobre $\dim V$; el resultado es trivial si $\dim V = 1$. Si $W_1 = W'_1$ (es decir, $V_1 = V'_1$ como subespacios de V), entonces V/V_1 tiene dos filtraciones correspondientes, con subespacios V_i/V_1 y V'_j/V_1 , y el resultado sigue porque $\dim(V/V_1) < \dim V$.

Si $W_1 \neq W'_1$, entonces $W_1 \cap W'_1 = \{0\}$ porque tanto W_1 como W'_1 es irreducible. Entonces $V_1 \oplus V'_1$ es un subespacio A -invariante de V . Considérese el A -módulo cociente $U := V/(V_1 \oplus V'_1)$. Sea $\{0\} \subset U_1 \subset \cdots \subset U_p = U$ una filtración maximal de U con cocientes $Z_k := U_k/U_{k-1}$.

Al cocientar las dos filtraciones originales de V por V_1 y también por V'_1 , se obtiene:

- ◊ dos filtraciones de V/V_1 , una con cocientes W'_1, Z_1, \dots, Z_p ; y otra con cocientes W_2, \dots, W_m ;
- ◊ dos filtraciones de V/V'_1 , una con cocientes W_1, Z_1, \dots, Z_p ; y otra con cocientes W'_2, \dots, W'_n .

Como $\dim(V/V_1) < \dim V$ y $\dim(V/V'_1) < \dim V$, la hipótesis inductiva implica que $m - 1 = p + 1 = n - 1$ y que los siguientes conjuntos coinciden:

$$\{W_1, W_2, \dots, W_m\} = \{W_1, W'_1, Z_1, \dots, Z_p\} = \{W'_1, W'_2, \dots, W'_n\}. \quad \square$$

El número $m = n$ de A -submódulos de V en una filtración maximal se llama la **longitud** de V . Si V es *semisimple*, con $V \simeq W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$ expresada como suma directa de A -módulos simples, se puede tomar $V_j := W_1 \oplus \cdots \oplus W_j$, formando así una filtración de V . Luego, en el caso semisimple, la longitud es el número de sumandos irreducibles en una descomposición de V .

► Conviene recordar la propiedad esencial de una *suma directa*:⁵ $V \simeq V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ si y sólo si hay homomorfismos $i_k: V_k \rightarrow V$ y $p_k: V \rightarrow V_k$ para $k = 1, \dots, r$ tales que

$$p_j i_k = 1_{V_k} \llbracket j = k \rrbracket; \quad i_1 p_1 + \cdots + i_r p_r = 1_V. \quad (2.7)$$

Nótese que cada i_k es inyectivo y cada p_k es sobreyectivo.

⁵Esta caracterización de sumas directas es válida en cualquier categoría aditiva.

Lema 2.20. *Si V es un A -módulo finitodimensional indescomponible, cada A -endomorfismo $h \in \text{End}_A V$ es un isomorfismo o bien es nilpotente.*

Demostración. Considérese h como endomorfismo \mathbb{F} -lineal, $h \in \text{End}_{\mathbb{F}} V$. Se puede elegir una base \mathbb{F} -vectorial de V respecto de la cual la matriz de h tiene la forma canónica de Jordan. (Esta forma canónica está disponible porque \mathbb{F} es algebraicamente cerrado.) Sea U un subespacio de V que corresponde a uno de los bloques de Jordan de esta matriz; hay una suma directa $V = U \oplus W$ de espacios \mathbb{F} -vectoriales reduce h , es decir, $h(U) \subseteq U$ y a la vez $h(W) \subseteq W$.

Ahora bien, por ser h un A -endomorfismo, tanto U como W son A -submódulos de V . Como V es indescomponible, se concluye que $U = V$ y $W = \{0\}$. Por lo tanto, la matriz de h es un solo bloque de Jordan, con un solo autovalor $\lambda \in \mathbb{F}$. Si $\lambda \neq 0$, la matriz es invertible y h es un isomorfismo. En cambio, si $\lambda = 0$, la matriz es triangular con ceros en la diagonal y h es nilpotente, con $h^n = 0$ para $n = \dim V$. \square

Teorema 2.21 (Krull y Schmidt). *Sea V un módulo finitodimensional de una \mathbb{F} -álgebra finitodimensional A . Dadas dos descomposiciones de V en suma directas de A -submódulos indescomponibles:*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m = V'_1 \oplus V'_2 \oplus \cdots \oplus V'_n,$$

resulta que $n = m$ y hay una permutación $\sigma \in S_m$ tal que $V'_j \simeq V_{\sigma(j)}$ para $j = 1, \dots, m$.

Demostración. Por inducción sobre $\dim V$. Considérese los A -morfismos $i_k: V_k \rightarrow V$ y $p_k: V \rightarrow V_k$ que cumplen (2.7) y las aplicaciones análogas $i'_j: V'_j \rightarrow V$ y $p_j: V \rightarrow V'_j$ para la segunda suma directa. Para $j = 1, \dots, n$, tómesese $h_j := p_1 i'_j p'_j i_1 \in \text{End}_A V_1$. Las relaciones (2.7) muestran que $h_1 + \cdots + h_n = 1_{V_1}$.

Si h_1 es nilpotente, con $h_1^p = 0$, entonces $h_2 + \cdots + h_n = 1 - h_1$ es un isomorfismo, porque $(1 - h_1)(1 + h_1 + h_1^2 + \cdots + h_1^{p-1}) = 1_{V_1}$. Sea $h'_j := (1 - h_1)^{-1} h_j$ para $j = 2, \dots, n$, así que $h'_2 + \cdots + h'_n = 1_{V_1}$. Si h_2 es también nilpotente, $h'_2 = (1 - h_1)^{-1} h_2$ no es un isomorfismo, así que es nilpotente, por el Lema 2.20. Entonces $h_3 + \cdots + h_n = (1 - h_1)(1 - h'_2)$ es un isomorfismo. Al continuar así (o bien, por inducción sobre n), se ve que no todos los h_j pueden ser nilpotentes. Al permutar los V_j se puede suponer que h_1 no es nilpotente, así que es un isomorfismo.

Ahora h_1 es la composición de los A -morfismos $p'_1 i_1: V_1 \rightarrow V'_1$ (inyectivo) y $p_1 i'_1: V'_1 \rightarrow V_1$ (sobreyectivo). Luego $e := (p'_1 i_1) h^{-1} (p_1 i'_1) \in \text{End}_A V'_1$ es idempotente, $e^2 = e$, así que $V'_1 = \text{im } e \oplus \text{ker } e$. Como V'_1 es indescomponible, se concluye que $e = 0$ o $e = 1$ en $\text{End}_A V'_1$. Si fuera $e = 0$, sería $p'_1 i_1 = 0$ porque $h^{-1}(p_1 i'_1)$ es sobreyectivo, pero esto implicaría $h = 0$. Entonces $e = 1$ y por ende $p'_1 i_1 \in \text{Hom}_A(V_1, V'_1)$ y $p_1 i'_1 \in \text{Hom}_A(V'_1, V_1)$ son isomorfismos.

Colóquese $U := V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$ y $U' := V'_2 \oplus \cdots \oplus V'_n$ y sean $i_U, p_U, i'_{U'}, p'_{U'}$ los A -morfismos canónicos asociados a las descomposiciones $V = V_1 \oplus U = V'_1 \oplus U'$. Tómesese $g := p'_{U'} i_U \in \text{Hom}_A(U, U')$. Si $x \in \ker g$, entonces $p'_{U'}(x) = 0$, así que $x \in V'_1$. Pero $p_1(x) = 0$ porque $\ker g \subseteq U$, así que $p_1(i'_1(x)) = p_1(x) = 0$, y por lo tanto $x = 0$. Luego g es inyectivo, pero también sobreyectivo porque $\dim U' = \dim V - \dim V_1 = \dim U$.

En fin, los A -módulos U y U' son isomorfos: $V_2 \oplus \cdots \oplus V_m \simeq V'_2 \oplus \cdots \oplus V'_n$ como A -submódulos de V . El resultado sigue por inducción sobre $\dim V$. \square

2.4 El carácter de una representación

Definición 2.22. Sea $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ una representación finitodimensional de un álgebra A . El **carácter** de π (o del A -módulo V) es la función \mathbb{F} -lineal $\chi_{\pi} \equiv \chi_V: A \rightarrow \mathbb{F}$ definida por

$$\chi_{\pi}(a) := \text{tr}(\pi(a)), \quad \text{para todo } a \in A. \quad (2.8)$$

Aquí $\text{tr}: \text{End}_{\mathbb{F}} V \rightarrow \mathbb{F}$ es la *traza* de un endomorfismo lineal, dada por $\text{tr } T := t_{11} + \cdots + t_{nn}$ mediante un isomorfismo cualquiera $\text{End}_{\mathbb{F}} V \simeq M_n(\mathbb{F})$.

Es evidente que dos representaciones equivalentes tienen el mismo carácter. \diamond

Lema 2.23. Sea V un A -módulo finitodimensional y U un A -submódulo de V ; el espacio vectorial cociente V/U es también un A -módulo. Los caracteres de estos tres A -módulos obedecen la relación: $\chi_{V/U} = \chi_V - \chi_U$.

Demostración. Llámese $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V$ la representación dada y sea $\eta: V \rightarrow V/U$ la aplicación cociente. Elíjase una base $\{x_1, \dots, x_k\}$ de U y extiéndela a una base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de V ; sea $\{f_1, \dots, f_n\}$ la base dual de V^* . Al escribir $\bar{x}_j := \eta(x_j) \equiv x_j + U$, se ve que $\{\bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n\}$ es una base de V/U , con base dual $\{\tilde{f}_{k+1}, \dots, \tilde{f}_n\} \subset (V/U)^*$, donde $\eta^t(\tilde{f}_i) = \tilde{f}_i \circ \eta = f_i$ para $i > k$.

El resultado sigue al calcular trazas con estas bases:

$$\chi_{V/U}(a) := \sum_{j=k+1}^n \tilde{f}_j(\eta(\pi(a)x_j)) = \sum_{j=k+1}^n f_j(\pi(a)x_j) = \chi_V(a) - \chi_U(a) \quad \text{si } a \in A. \quad \square$$

Proposición 2.24. Sea A un álgebra finitodimensional sobre un cuerpo \mathbb{F} algebraicamente cerrado y sean V_1, \dots, V_r unos A -módulos irreducibles, no isomorfos entre sí. Entonces los caracteres correspondientes χ_1, \dots, χ_r son linealmente independientes.

Demostración. La Proposición 2.13 muestra que el homomorfismo (2.4),

$$\pi_1 \oplus \cdots \oplus \pi_r: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V_1 \oplus \cdots \oplus \text{End}_{\mathbb{F}} V_r \simeq M_{d_1}(\mathbb{F}) \oplus \cdots \oplus M_{d_r}(\mathbb{F}),$$

es sobreyectivo. Supóngase que $\sum_{j=1}^r c_j \chi_j = 0$ en el espacio \mathbb{F} -vectorial A^* . Entonces $\sum_{j=1}^r c_j \chi_j(a) = \sum_{j=1}^r c_j \operatorname{tr}(\pi_j(a)) = 0$ para todo $a \in A$. La sobreyectividad dice que $\sum_{j=1}^r c_j \operatorname{tr}(B_j) = 0$ para matrices $B_1 \in M_{d_1}(\mathbb{F}), \dots, B_r \in M_{d_r}(\mathbb{F})$ cualesquiera. Para cada $k = 1, \dots, r$, tómesese $B_k := e_{11} \in M_{d_k}(\mathbb{F})$ y $B_j := 0$ para $j \neq k$; la sumatoria anterior se reduce a $c_k = 0$. Se concluye que χ_1, \dots, χ_r son linealmente independientes en A^* . \square

Como $\pi(1) = 1_V$, se ve que $\chi_\pi(1) = 1 + \dots + 1 = n \in \mathbb{F}$. Si \mathbb{F} es un cuerpo de característica p y si $\dim_{\mathbb{F}} V$ es divisible por p , entonces $\chi_\pi(1) = 0$. En visto de esta circunstancia anómala, la teoría de caracteres es de mayor utilidad cuando $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$, en cuyo caso $\chi_\pi(1) = \dim V$.⁶

Cuando \mathbb{F} es algebraicamente cerrado y de característica 0, los dos resultados anteriores llevan a una prueba más corta del Teorema 2.19 de Jordan y Hölder. En efecto, dadas las dos filtraciones del A -módulo V , el Lema 2.23 muestra que

$$\chi_{W_1} + \dots + \chi_{W_m} = \chi_V = \chi_{W'_1} + \dots + \chi_{W'_n}.$$

Si $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ es una enumeración de todos los caracteres de representaciones irreducibles de A , estas dos sumatorias son de la forma $\sum_{k=1}^r m_k \chi_k$ y $\sum_{k=1}^r n_k \chi_k$ respectivamente, donde m_k [respectivamente, n_k] es el número de los W_i [resp., de los W'_j] que son isomorfos al A -módulo irreducible con carácter χ_k . Por la independencia lineal de los χ_k , se obtiene $m_k = n_k$ para cada k ,⁷ así que los W'_j son una permutación de los W_i , hasta isomorfismo. En particular, vale $m = \sum_{k=1}^r m_k = \sum_{k=1}^r n_k = n$.

2.5 Ejercicios sobre álgebras semisimples

En estos ejercicios, A denota un álgebra finitodimensional sobre el cuerpo algebraicamente cerrado \mathbb{F} .

Ejercicio 2.1. Sea $A = M_n(\mathbb{F})$ un álgebra de matrices y sea V un A -módulo finitodimensional. Demostrar que hay $m \in \mathbb{N}$ tal que $V \simeq m \mathbb{F}^n$, es decir, $V \simeq \mathbb{F}^n \oplus \dots \oplus \mathbb{F}^n$ con m sumandos. \llbracket Indicación: si e_{ij} es la matriz con entrada (i, j) igual a 1 y las otras entradas 0, demostrar que $V \simeq e_{11}V \oplus e_{22}V \oplus \dots \oplus e_{nn}V$ como espacios vectoriales. Si $x \in e_{11}V$, sea $U_x \leq V$ el subespacio generado por los vectores $e_{i1}x$ para $i = 1, \dots, n$. \rrbracket

⁶En el caso en que $\operatorname{char} \mathbb{F} = p$ y $A = \mathbb{F}[G]$ donde G es un grupo finito tal que p divide $|G|$, se puede definir un carácter modificado sobre los elementos de G cuyos períodos son primos a p . Esta noción de “carácter regular”, debido a Richard Brauer, es de gran importancia en la teoría de grupos finitos. Véase el capítulo 18 del libro de Serre, *op. cit.*

⁷En más detalle: $m_k - n_k = 0$ para cada k ; esto implica que $m_k = n_k$ porque \mathbb{F} es de característica 0.

Ejercicio 2.2. El **producto tensorial de dos \mathbb{F} -álgebras** A y B es el espacio \mathbb{F} -vectorial $A \otimes B$ dotado con la multiplicación $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$.

- (a) Comprobar que $M_m(\mathbb{F}) \otimes M_n(\mathbb{F}) \simeq M_{mn}(\mathbb{F})$ como \mathbb{F} -álgebras.
- (b) Si A y B son álgebras finitodimensionales semisimples, demostrar que $A \otimes B$ también es semisimple.

Ejercicio 2.3. El **radical** de un álgebra A se define⁸ como la intersección $\underline{\text{rad}} A$ de los ideales a izquierda maximales de A . Denótese (provisionalmente) por $\underline{\text{rad}}' A$ la intersección de los ideales a derecha maximales de A . Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes, para un elemento $a \in A$:

- (a) $a \in \underline{\text{rad}}' A$;
- (b) $(1 - ab)$ tiene un inverso a derecha, para todo $b \in A$;
- (c) $(1 - ab)$ tiene un inverso (bilateral), para todo $b \in A$;
- (d) $(1 - ba)$ tiene un inverso (bilateral), para todo $b \in A$;
- (e) $(1 - ba)$ tiene un inverso a izquierda, para todo $b \in A$;
- (f) $a \in \underline{\text{rad}} A$.

Concluir que $\underline{\text{rad}} A$ es un ideal (bilateral) de A .

Ejercicio 2.4. Si $A = T(n, \mathbb{F})$ es el álgebra de matrices triangulares superiores $n \times n$, comprobar que $\underline{\text{rad}} A$ es el ideal de matrices triangulares con ceros en la diagonal.

Ejercicio 2.5. Si I es un ideal de A , sea I^n el ideal de sumas finitas de productos $c_1 c_2 \cdots c_n$ con cada $c_i \in I$. Dícese que el ideal I es **nilpotente** si $I^n = \{0\}$ para algún $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Si I es un ideal nilpotente de A , mostrar que $I \subseteq \underline{\text{rad}} A$.
- (b) Sea $\{0\} = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_m = A$ una filtración maximal de A -submódulos de A . Si $c \in \underline{\text{rad}} A$, mostrar que $c A_i \subseteq A_{i-1}$ para $i = 1, \dots, m$. Concluir que $\underline{\text{rad}} A$ es un ideal nilpotente de A .

⁸El núcleo de una representación irreducible es un ideal a izquierda maximal. Entonces $\underline{\text{rad}} A$ es también la intersección de los núcleos de las representaciones irreducibles.

Ejercicio 2.6. Si $Q = (N, F)$ es un carcaj finito sin ciclos (así que el álgebra $\mathbb{F}Q$ es finitodimensional), sea $R = R(Q)$ su *ideal de flechas*, generado por los elementos $\{a_u : u \in F\}$.

Demostrar que el ideal R es nilpotente, y que $\mathbb{F}Q/R \simeq \mathbb{F} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F} \equiv n\mathbb{F}$ para algún $n \in \mathbb{N}^*$. Concluir que R es un ideal nilpotente maximal y por ende $\text{rad}(\mathbb{F}Q) = R$.

Ejercicio 2.7. Si $\pi_i : A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V_i$, para $i = 1, \dots, r$, son representaciones irreducibles finitodimensionales de A , inequivalentes entre sí, demostrar que existen idempotentes $e_1, \dots, e_r \in A$ tales $\pi_i(e_i) = 1$ en $\text{End}_{\mathbb{F}} V_i$ para $i = 1, \dots, r$ y además $\pi_j(e_i) = 0$ en $\text{End}_{\mathbb{F}} V_j$ cuando $i \neq j$.

¿Bajo cuáles circunstancias es posible concluir que $e_i e_j = 0$ en A para $i \neq j$?

3 Representaciones de grupos finitos

La teoría de representaciones tiene su origen en los trabajos de Georg Frobenius, a finales del siglo XIX, sobre los grupos finitos. Si G es un grupo finito y \mathbb{F} es un cuerpo, entonces el álgebra de grupo $\mathbb{F}[G]$ es una \mathbb{F} -álgebra finitodimensional y la teoría del capítulo anterior es aplicable al caso. Sin embargo, las representaciones de grupos presentan unos rasgos distintos, debido al papel jugado por sus caracteres. También son notables las representaciones unitarias de un grupo finito G , al dotar el G -módulo V con un producto escalar, al menos en los casos $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Para aprovechar las propiedades de representaciones sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, se considerará mayormente el caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ en lo que sigue.

3.1 Semisimplicidad de las representaciones

Conviene recordar la Definición 1.21 de una **representación** de un grupo finito G sobre un espacio \mathbb{F} -vectorial V : esta es un homomorfismo de grupos $\pi: G \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{F}}(V)$. Este homomorfismo se extiende por \mathbb{F} -linealidad en una representación del álgebra $\mathbb{F}[G]$, que ahora será denotado por la misma letra π :

$$\pi(a) := \sum_{g \in G} a_g \pi(g) \quad \text{si} \quad a = \sum_{g \in G} a_g g. \quad (3.1)$$

De esta forma, V recibe la estructura de un $\mathbb{F}[G]$ -módulo; por un pequeño abuso de lenguaje, se dice que V es un **G -módulo** mediante la representación π .

Un subespacio vectorial $U \subseteq V$ que es invariante bajo cada $\pi(g)$, para $g \in G$, es también invariante bajo cada $\pi(a)$, para $a \in \mathbb{F}[G]$; y viceversa. Una representación π de G es **irreducible** (no hay subespacios invariantes no triviales) si y sólo si la representación extendida de $\mathbb{F}[G]$ es irreducible.

De esta manera, buena parte del vocabulario de representaciones de álgebras se transfiere a representaciones de grupos. Por ejemplo, dadas dos representaciones del mismo grupo, $\pi: G \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{F}}(W)$, una aplicación \mathbb{F} -lineal $T: V \rightarrow W$ **entrelaza** π y σ si

$$T(\pi(g)x) = \sigma(g)(Tx) \quad \text{para todo} \quad g \in G, x \in V, \quad (3.2)$$

lo cual es equivalente a (1.3) para $A = \mathbb{F}[G]$. El espacio \mathbb{F} -vectorial de tales T se puede denotar por $\underline{\mathrm{Hom}}_G(V, W)$. Si hay una T invertible con esta propiedad, dícese que π y σ son **representaciones equivalentes** de G , escrito $\pi \sim \sigma$; en cuyo caso, vale

$$\sigma(g) = T \circ \pi(g) \circ T^{-1} \quad \text{para todo} \quad g \in G. \quad (3.3)$$

El Lema de Schur, Proposición 1.15, sigue válido para representaciones de grupos, al tomar $T \in \text{Hom}_G(V, W) \setminus \{0\}$. En el caso de una representación de rango finito cuando \mathbb{F} es algebraicamente cerrado, el Corolario 1.16 ahora dice que cada $T \in \text{End}_G(V)$ es de la forma $\lambda 1_V$ con $\lambda \in \mathbb{F}$.

► Si \mathbb{F} es un cuerpo de característica finita p , y si p divide el orden del grupo G , la teoría de representaciones de G sobre espacios \mathbb{F} -vectoriales es complicada.¹ En este curso, se asumirá lo contrario; en cuyo caso, el siguiente *teorema de Maschke* presenta una gran simplificación.

Teorema 3.1 (Maschke). *Si G es un grupo finito y si \mathbb{F} es un cuerpo cuya característica no divide $|G|$, cada representación $\pi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ es completamente reducible.*

Demostración. Cabe recordar (Definición 2.3) que el G -módulo es completamente reducible si y solo si cada para G -submódulo $U \leq V$ existe otro G -submódulo $W \leq V$ tal que $V \simeq U \oplus W$.

Sea U , entonces, un subespacio $\pi(G)$ -invariante de V . Tómesese cualquier subespacio $W' \leq V$ tal que $V = U \oplus W'$ como espacios \mathbb{F} -vectoriales (por ejemplo, al completar una base de U en una base de V). Si $z \in V$, entonces $z = x + y$ de manera única, con $x \in U$, $y \in W'$. Sea $P' \in \text{End}_{\mathbb{F}} V$ el proyector sobre U a lo largo de W' , determinado por $P'(x + y) := x$. Defínase otro operador $P \in \text{End}_{\mathbb{F}} V$ por la fórmula:

$$P := \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \pi(h) \circ P' \circ \pi(h)^{-1}. \quad (3.4)$$

Fíjese que $|G| \neq 0$ en \mathbb{F} porque $\text{char } \mathbb{F} = 0$ o bien porque $\text{char } \mathbb{F} = p$ pero $|G| \not\equiv 0 \pmod{p}$ en \mathbb{Z} , por la hipótesis del enunciado. Entonces $1/|G| \in \mathbb{F}^\times$ es el recíproco de $|G| := 1 + \dots + 1 \in \mathbb{F}^\times$. Luego la fórmula (3.4) está bien definida en $\text{End}_{\mathbb{F}} V$.

Nótese que $Px = x$ para cada $x \in U$ porque $\pi(h)(U) = U$ para cada $h \in G$; además, $\text{im } P = P(V) \subseteq U$, así que $P^2 = P$. Esto muestra que P es un proyector en $\text{End}_{\mathbb{F}} V$. Defínase $W := \ker P$. Entonces $V = \text{im } P \oplus \ker P = U \oplus W$ como espacios \mathbb{F} -vectoriales.

Además, si $g \in G$, entonces

$$\pi(g) \circ P = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \pi(gh) \circ P' \circ \pi(h^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \pi(k) \circ P' \circ \pi(k^{-1}g) = P \circ \pi(g),$$

así que P conmuta con π . Esto implica que $\pi(g)(\ker P) \subseteq \ker P$ para cada $g \in G$, así que W es un G -submódulo de V . □

¹El libro de Serre es una buena introducción a dicha teoría.

En vista de la Proposición 2.5, este teorema tiene un corolario inmediato.

Corolario 3.2. *Si G es un grupo finito y si \mathbb{F} es un cuerpo cuya característica no divide $|G|$, cualquier G -módulo finitodimensional es semisimple.* \square

El álgebra de grupo $\mathbb{F}[G]$ es finitodimensional. De hecho, vale $\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[G]) = |G|$, porque los elementos del grupo $\{1, g_2, \dots, g_n\}$ forma una base \mathbb{F} -vectorial para $\mathbb{F}[G]$. Si el cuerpo \mathbb{F} es algebraicamente cerrado, de la Proposición 2.16 se obtiene la estructura del álgebra del grupo. Siempre bajo la hipótesis de que $\text{char } \mathbb{F}$ no divide $|G|$, se obtiene la descomposición siguiente:

$$\mathbb{F}[G] \simeq \bigoplus_{i=1}^r M_{d_i}(\mathbb{F}), \quad (3.5)$$

donde $d_1 = 1, d_2, \dots, d_r$ son los grados de las representaciones irreducibles inequivalentes de G (o si se quiere, de $\mathbb{F}[G]$). La primera de estas representaciones es la **representación trivial** del grupo: $\pi_1(g) := 1 \in \mathbb{F}$ para todo $g \in G$, la cual es obviamente irreducible. Del inciso (b) de la Proposición 2.16, se obtiene la fórmula importante:

$$d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_r^2 = |G|. \quad (3.6)$$

Ejemplo 3.3. Sea \mathbb{F}_p el cuerpo finito de orden p , con p primo; y sea C_p el grupo cíclico de orden p – el cual es isomorfo al grupo aditivo $(\mathbb{F}_p, +)$. Las hipótesis del teorema de Maschke no son satisfechos en este caso. Como C_p es abeliano (luego $\mathbb{F}_p[C_p]$ es conmutativo), cada representación irreducible π_j de C_p es de grado 1. Al escribir $C_p = \{1, g, g^2, \dots, g^{p-1}\}$, se obtiene $\pi_j(g) = \lambda_j \in \mathbb{F}_p$ con $\lambda_j^p = 1$.

Luego $\lambda_j \in \mathbb{F}_p$ es una raíz del polinomio $x^p - 1$. Pero resulta que $x^p - 1 = (x - 1)^p$ en $\mathbb{F}_p[x]$ – al expandir $(x - 1)^p$ con el teorema binomial – y luego $\lambda_j = 1$. Entonces la única representación irreducible de C_p sobre espacios \mathbb{F}_p -vectoriales es la trivial. Estas conclusiones no cambian si se reemplaza \mathbb{F}_p por su clausura algebraica $\overline{\mathbb{F}}_p$: luego el álgebra $A = \overline{\mathbb{F}}_p[C_p]$ no es semisimple.

De hecho, de la Proposición 2.13 se obtiene $A/\text{rad } A \simeq \overline{\mathbb{F}}_p$; el radical de $\overline{\mathbb{F}}_p[C_p]$ es un ideal de codimensión 1. \diamond

► En el resto de este capítulo, se supondrá que \mathbb{F} es un cuerpo de característica 0, así que el teorema de Maschke es aplicable y todas los G -módulos son semisimples.

Ejemplo 3.4. Con $\text{char } \mathbb{F} = 0$, considérese la representación del grupo cíclico C_n sobre \mathbb{F}^n dado por permutaciones cíclicas de la base usual de \mathbb{F}^n . En otras palabras, al escribir $C_n = \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$, basta definir $\pi(g) \in \text{GL}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n) \equiv \text{GL}(n, \mathbb{F})$ por:

$$\pi(g)e_j := e_{j-1} \quad \text{para } j = 2, \dots, n; \quad \pi(g)e_1 := e_n.$$

Por ejemplo, para $n = 4$, estas matrices 4×4 representan C_4 :

$$\pi(1) = 1_4, \quad \pi(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi(g^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi(g^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta representación es reducible sobre $\overline{\mathbb{F}}$, por el Corolario 1.17, porque C_n es abeliano.

El polinomio característico de $\pi(g)$ es $\det(x1_n - \pi(g)) = x^n - 1$, por expansión en la primera columna. Ahora $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F}$ pues $\text{char } \mathbb{F} = 0$, así que $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \overline{\mathbb{F}}$: el polinomio $(x^n - 1)$ tiene n raíces distintas en $\overline{\mathbb{Q}}$, de la forma $\{\zeta_n^k : k = 0, 1, \dots, n-1\}$; estas raíces de la unidad son números algebraicos.² Sin perder generalidad, se puede tomar $\zeta_n := e^{2\pi i/n} = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$. Entonces hay un cambio de base de $\overline{\mathbb{F}}^n$ que diagonaliza $\pi(g)$, en la forma $\pi(g) \sim \rho(g) \equiv \text{diag}[1, \zeta_n, \dots, \zeta_n^{n-1}]$. Para $n = 4$:

$$\pi(g) \sim \rho(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Las representaciones irreducibles π_1, \dots, π_n de C_n sobre $\overline{\mathbb{F}}$ están dadas por la asignación $\pi_k(g) := \zeta_n^k = e^{2\pi i k/n}$, para $k = 0, 1, \dots, n-1$. \diamond

Ejemplo 3.5. Considérese el grupo no abeliano S_3 (permutaciones de 3 objetos):

$$S_3 = \{ \underline{1}, (123), (132), (12), (13), (23) \}.$$

[[El símbolo $\underline{1}$ denota la permutación idéntica.]] Este grupo tiene una representación obvia sobre \mathbb{F}^3 por matrices 3×3 : defínase $\pi: S_3 \rightarrow \text{GL}(3, \mathbb{F})$ por

$$\begin{aligned} \underline{1} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & (123) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & (132) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (12) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & (13) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & (23) &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

La recta diagonal $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{F}^3 : x = y = z\}$ es un S_3 -submódulo de \mathbb{F}^3 . Luego, esta representación π de S_3 es reducible.

²Aquí $\overline{\mathbb{Q}}$ denota el cuerpo de los números algebraicos: las raíces complejas de polinomios en $\mathbb{Z}[x]$.

El plano $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{F}^3 : x + y + z = 0\}$ es otro S_3 -submódulo de \mathbb{F}^3 , el cual es simple: la restricción de π a W sí es irreducible. Entonces $\mathbb{F}^3 = U \oplus W$ es la descomposición de la representación semisimple π .

Los primeros tres de estas seis matrices determinan una representación del subgrupo cíclico $C_3 \leq S_3$. Entonces $\mathbb{F}^3 = U \oplus W$ como C_3 -módulos. Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, entonces W es reducible como C_3 -módulo.

En efecto, del Ejemplo anterior, se ve que $\pi|_W \sim \pi_2 \oplus \pi_3$. Escríbase

$$\omega := e^{2\pi i/3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \omega^2 := e^{-2\pi i/3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Entonces $W = W_1 \oplus W_2$ como C_3 -módulos, donde

$$\begin{aligned} W_1 &:= \{(x, y, z) \in W : x + \omega y + \omega^2 z = 0\}; \\ W_2 &:= \{(x, y, z) \in W : x + \omega^2 y + \omega z = 0\}. \end{aligned}$$

Luego $\mathbb{C}^3 = U \oplus W_1 \oplus W_2$ es una suma directa de C_3 -submódulos unidimensionales.

Obsérvese que para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, la descomposición $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ es una descomposición en irreducibles: el Corolario 1.17 no es aplicable cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. \diamond

Ejemplo 3.6. La **representación regular** (a izquierda) de un grupo finito G se define como sigue. Tómesese $V := \mathbb{F}[G]$, con base \mathbb{F} -vectorial $G = \{1, g_2, \dots, g_n\}$, donde $n = |G| = \dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[G])$. Defínase $\lambda: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[G])$ por

$$\lambda(g) : \sum_{h \in G} b_h h \mapsto \sum_{h \in G} b_h gh.$$

La representación correspondiente de $\mathbb{F}[G]$ sobre sí mismo está dada por el producto en el álgebra $\mathbb{F}[G]$; es decir, $\lambda(a): b \mapsto ab$.

Para evitar malentendidos, conviene denotar el elemento $g \in G$ por el símbolo x_g al considerarlo como vector básico en $\mathbb{F}[G]$. Con este convenio, la base natural de $\mathbb{F}[G]$ se escribe $\{x_g : g \in G\}$ y la representación regular de G asume la forma

$$\lambda(g) : \sum_{h \in G} b_h x_h \mapsto \sum_{h \in G} b_h x_{gh}.$$

En el caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, la representación regular es semisimple; y su descomposición en irreducibles está dada precisamente por la fórmula (3.5). Por la Proposición 2.16, hay exactamente r representaciones irreducibles inequivalentes π_1, \dots, π_r de G (o de $\mathbb{C}[G]$), de grados respectivos d_1, \dots, d_r ; y *todos aparecen como subrepresentaciones de la representación regular*. Al combinar (3.5) con la observación de que

$$M_{d_j}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{d_j} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{d_j} \quad \text{con } d_j \text{ sumandos,}$$

al considerar una matriz como el juego de sus columnas, cada representación irreducible π_j aparece d_j veces en la representación regular:

$$\lambda \sim d_1\pi_1 \oplus d_2\pi_2 \oplus \cdots \oplus d_r\pi_r, \quad (3.8)$$

en consonancia con la fórmula (3.6) para la suma de sus grados: $d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_r^2 = |G|$.

En particular, la representación trivial π_1 , con $d_1 = 1$, aparece una sola vez en la representación regular. \diamond

Ejemplo 3.7. En el Ejemplo 3.5, se exhibió una representación irreducible compleja del grupo S_3 , de grado 2: el plano $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x + y + z = 0\}$ es un S_3 -módulo simple. Contando también la representación trivial, de grado 1, la suma de cuadrados de grados es necesariamente

$$1 + 1 + 4 = 6 = |S_3|.$$

Entonces hay *otra* representación de grado 1, $\pi_2: S_3 \rightarrow \text{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$, la cual no es trivial (porque π_1 y π_2 son inequivalentes). ¿Cuál será? Se trata, pues, del **signo** de una permutación. Es decir, $\pi_2(s) := (-1)^s \in \{+1, -1\}$. Las permutaciones pares son $1, (123), (132)$, así que $\ker \pi_2 = C_3$; las reflexiones $(12), (13), (23)$ tienen signo (-1) . \diamond

Definición 3.8. Sean $\pi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(W)$ dos representaciones de un grupo finito G sobre espacios \mathbb{F} -vectoriales. Su **producto tensorial** es la representación $\pi \otimes \sigma: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(V \otimes_{\mathbb{F}} W)$ definido sobre tensores simples por

$$\pi \otimes \sigma(g)[x \otimes y] := \pi(g)x \otimes \sigma(g)y,$$

para todo $g \in G$, extendido por \mathbb{F} -linealidad al espacio \mathbb{F} -vectorial $V \otimes_{\mathbb{F}} W$. En la notación de la Definición 1.31, esto dice que $\pi \otimes \sigma(g) = \pi(g) \otimes \sigma(g)$ en $\text{GL}_{\mathbb{F}}(V \otimes_{\mathbb{F}} W)$. \diamond

Ejemplo 3.9. Si $\pi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ es una representación de G , su **cuadrado tensorial** es $\pi^{\otimes 2} \equiv \pi \otimes \pi$ sobre $V \otimes V$. Si $x, y \in V$, las fórmulas

$$x \vee y = \frac{1}{2}(x \otimes y + y \otimes x), \quad x \wedge y = \frac{1}{2}(x \otimes y - y \otimes x)$$

muestran que $x \otimes y = (x \vee y) + (x \wedge y)$ en $V \otimes V$. Por lo tanto, hay una suma directa de \mathbb{F} -espacios vectoriales:

$$V \otimes V \simeq S^2V \oplus \Lambda^2V.$$

Es evidente que tanto S^2V como Λ^2V son G -submódulos de $V \otimes V$. Se puede escribir $\pi^{\vee 2} := (\pi \otimes \pi)|_{S^2V}$ y $\pi^{\wedge 2} := (\pi \otimes \pi)|_{\Lambda^2V}$. Estas son, respectivamente, el **cuadrado simétrico** y el **cuadrado exterior** de la representación π .

La descomposición $\pi \otimes \pi \sim \pi^{\vee 2} \oplus \pi^{\wedge 2}$ muestra que, aunque π sea irreducible, su cuadrado tensorial es reducible, toda vez que el grado de π sea mayor que 1. \diamond

3.2 El carácter de una representación

Definición 3.10. Sea $\pi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ una representación de grado finito de un grupo finito G . El **carácter** de π es la función $\chi_{\pi}: G \rightarrow \mathbb{F}$ dada por

$$\chi_{\pi}(g) := \text{tr } \pi(g), \quad \text{para todo } g \in G. \quad (3.9)$$

Si π es irreducible, se dice – con un pequeño abuso de lenguaje – que χ_{π} es un *carácter irreducible* de G . \diamond

Observación: si $\dim V > 1$, el carácter χ_{π} *no es un homomorfismo* de G en \mathbb{F}^{\times} .

Definición 3.11. Una función $\psi: G \rightarrow \mathbb{F}$ se llama una **función de clase** sobre G si

$$\psi(ghg^{-1}) = \psi(h) \quad \text{para todo } g, h \in G.$$

Una función es de clase si y solo si es constante sobre cada una de las clases conjugadas de G . Al sustituir $h \mapsto hg$, la condición anterior es equivalente a $\psi(gh) = \psi(hg)$ para todo $g, h \in G$: las funciones de clase también se llaman *funciones centrales*.

El carácter de una representación es una función de clase, porque

$$\chi_{\pi}(ghg^{-1}) = \text{tr } \pi(ghg^{-1}) = \text{tr}(\pi(g)\pi(h)\pi(g)^{-1}) = \text{tr } \pi(h) = \chi_{\pi}(h). \quad \diamond$$

Lema 3.12. *El grado de una representación π es $\chi_{\pi}(1)$. Dos representaciones equivalentes tienen el mismo carácter.*

Demostración. El homomorfismo π cumple $\pi(1) = 1_V$; luego $\dim V = \text{tr } 1_V = \chi_{\pi}(1)$.

Si dos representaciones π y σ son equivalentes, hay un operador entrelazante T que es invertible y satisface (3.3). De ahí se obtiene

$$\chi_{\sigma}(g) = \text{tr } \sigma(g) = \text{tr}(T\pi(g)T^{-1}) = \text{tr } \pi(g) = \chi_{\pi}(g), \quad \text{para todo } g \in G. \quad \square$$

Lema 3.13. *El carácter de la representación regular $\lambda: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[G])$ está dado por*

$$\chi_{\lambda}(1) = |G|; \quad \chi_{\lambda}(g) = 0 \quad \text{para } g \neq 1.$$

Demostración. Es inmediato que $\chi_{\lambda}(1) = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[G] = |G|$. Por otro lado, si $g \neq 1$, entonces $\lambda(g)x_h = x_{gh}$ para $h \in G$. Por lo tanto, en la matriz de $\lambda(g)$ con respecto a la base $\{x_h : h \in G\}$ cada entrada diagonal es 0, así que su traza es 0. \square

Lema 3.14. *Sean π y σ dos representaciones de un grupo finito G . Los caracteres de $\pi \oplus \sigma$ y de $\pi \otimes \sigma$ son la suma y el producto, respectivamente, de los caracteres de π y σ :*

$$\chi_{\pi \oplus \sigma} = \chi_{\pi} + \chi_{\sigma}, \quad \chi_{\pi \otimes \sigma} = \chi_{\pi} \cdot \chi_{\sigma}.$$

Demostración. En notación matricial, se escribe la suma directa de matrices así:

$$\pi \oplus \sigma(g) := \begin{pmatrix} \pi(g) & 0 \\ 0 & \sigma(g) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{\mathbb{F}}(U \oplus W).$$

Su traza es la suma de las trazas individuales:

$$\chi_{\pi \oplus \sigma}(g) = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} \pi(g) & 0 \\ 0 & \sigma(g) \end{pmatrix} = \mathrm{tr} \pi(g) + \mathrm{tr} \sigma(g) = \chi_{\pi}(g) + \chi_{\sigma}(g).$$

Con respecto a bases $\{x_1, \dots, x_n\}$ de V y $\{y_1, \dots, y_m\}$ de W , las dos acciones lineales de G determinan matrices $A(g) \in M_n(\mathbb{F})$ y $B(g) \in M_m(\mathbb{F})$:

$$\pi(g)x_j =: \sum_{i=1}^n a_{ij}(g)x_i, \quad \sigma(g)y_l =: \sum_{k=1}^m b_{kl}(g)y_k.$$

Luego, la matriz de $\pi \otimes \sigma(g)$ es $A \otimes B(g) \in M_{nm}(\mathbb{F})$, cuya entrada (ik, jl) es $a_{ij}(g)b_{kl}(g)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \chi_{\pi \otimes \sigma}(g) &= \mathrm{tr}(A \otimes B(g)) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ii}(g)b_{kk}(g) \\ &= \mathrm{tr} A(g) \mathrm{tr} B(g) = \mathrm{tr} \pi(g) \mathrm{tr} \sigma(g) = \chi_{\pi}(g) \chi_{\sigma}(g). \quad \square \end{aligned}$$

Definición 3.15. A cada representación $\pi: G \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ sobre un espacio \mathbb{F} -vectorial V , le corresponde una **representación dual** $\underline{\pi}^*: G \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{F}}(V^*)$ sobre el espacio dual $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$, dada por

$$\pi^*(g) : \psi \mapsto \psi \circ \pi(g^{-1}).$$

Este π^* es un homomorfismo, porque si $g, h \in G$ y $\psi \in V^*$, entonces

$$\pi^*(g)\pi^*(h)\psi = \pi^*(h)\psi \circ \pi(g^{-1}) = \psi \circ \pi(h^{-1}) \circ \pi(g^{-1}) = \psi \circ \pi(h^{-1}g^{-1}) = \pi^*(gh)\psi.$$

Con respecto a una base de V y la base dual de V^* , la matriz de $\pi^*(g)$ es la **matriz contragrediente** de la matriz A de $\pi(g)$, esto es, la transpuesta de A^{-1} :

$$\pi(g) \leftrightarrow A \implies \pi^*(g) \leftrightarrow (A^{-1})^t = (A^t)^{-1} \equiv A^{-t}.$$

Nótese que $(AB)^{-t} = A^{-t}B^{-t}$, es decir, la operación $A \mapsto A^{-t}$ es un automorfismo del grupo de matrices $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$. \diamond

Si $\psi: G \rightarrow \mathbb{F}$ es una función, se denota por ψ^{\vee} la función $g \mapsto \chi(g^{-1})$.

Lema 3.16. El carácter de la representación dual π^* es $\chi_{\pi^*} = \chi_{\pi}^{\vee}$.

Demostración. Si A es una matriz de $\pi(g)$, entonces $\mathrm{tr}(A^{-t}) = \mathrm{tr}(A^{-1})$ porque la traza no cambia bajo transposición. Además, A^{-1} es la matriz de $\pi(g)^{-1} = \pi(g^{-1})$. \square

► Denótese por $F_c(G, \mathbb{F})$ la totalidad de *funciones de clase* $\psi: G \rightarrow \mathbb{F}$. Esta es una \mathbb{F} -álgebra conmutativa, en la cual $\psi \mapsto \psi^\vee$ es una *involución*.³

Como los elementos de G forman una base \mathbb{F} -vectorial de $\mathbb{F}[G]$, cualquier función de clase $\psi: G \rightarrow \mathbb{F}$ puede extenderse por \mathbb{F} -linealidad en una *forma \mathbb{F} -lineal central* $\psi: \mathbb{F}[G] \rightarrow \mathbb{F}$, esto es, $\psi(ab) = \psi(ba)$ para todo $a, b \in \mathbb{F}[G]$. (Nuevamente, se usa la misma letra ψ para la función extendida.)

Al comparar (3.9) con (2.8), es evidente que el carácter $\chi_\pi: G \rightarrow \mathbb{F}$ es la restricción a G del carácter $\chi_\pi: \mathbb{F}[G] \rightarrow \mathbb{F}$ de la representación extendida del álgebra $\mathbb{F}[G]$. En particular, los caracteres χ_1, \dots, χ_r de las representaciones irreducibles π_1, \dots, π_r de G (inequivalentes entre sí) se extienden a caracteres del álgebra de grupo $\mathbb{F}[G]$.

De ahí se deduce un corolario inmediato pero muy importante de la Proposición 2.24: si \mathbb{F} es algebraicamente cerrado, *los caracteres irreducibles χ_1, \dots, χ_r de G son linealmente independientes* en $F_c(G, \mathbb{F})$.

Ejemplo 3.17. El grupo S_3 tiene tres caracteres irreducibles χ_1, χ_2, χ_3 . Para describir- las, conviene usar la notación $S_3 = \{1, s, s^2, r, rs, rs^2\}$, donde $s = (123)$ y $r = (12)$. Fíjese que las clases conjugadas de S_3 son tres: $\{1\}$, $\{s, s^2\}$ y $\{r, rs, rs^2\}$.

Como cada χ_j es una función de clase, basta evaluarla en un representante de cada clase. Luego $\dim_{\mathbb{F}}(F_c(S_3, \mathbb{F})) = 3$.

La representación trivial π_1 tiene carácter constante: $\chi_1(g) = 1$ para todo $g \in S_3$. La representación de signo π_2 tiene carácter dado por $\chi_2(1) = \chi_2(s) = 1$ y $\chi_2(r) = -1$.

Para obtener el carácter χ_3 , considérese la representación π del Ejemplo 3.5, de grado 3. La descomposición $\mathbb{F}^3 = U \oplus W$ de ese Ejemplo muestra que $\pi \sim \pi_1 \oplus \pi_3$, donde π_3 es la representación irreducible de grado 2 del grupo S_3 . Luego $\chi_\pi = \chi_1 + \chi_3$, por los Lemas 3.12 y 3.14. Al tomar trazas en (3.7), se obtiene $\chi_\pi(1) = 3$, $\chi_2(r) = 1$, $\chi_2(s) = 0$. Por tanto, la relación $\chi_3 = \chi_\pi - \chi_1$ implica que

$$\chi_\pi(1) = 2, \quad \chi_2(r) = 0, \quad \chi_2(s) = -1.$$

La siguiente **tabla de caracteres**:

S_3	1	r	s	(3.10)
χ_1	1	1	1	
χ_2	1	-1	1	
χ_3	2	0	-1	

entonces describe completamente el álgebra tridimensional $F_c(S_3, \mathbb{F})$. ◇

³Una **involución** en una álgebra A es una biyección aditiva $a \mapsto a^\dagger$ tal que $(ab)^\dagger = b^\dagger a^\dagger$ y $(a^\dagger)^\dagger = a$. Fíjese que una involución es un automorfismo de A si y solo si A es conmutativa.

3.3 Relaciones de ortogonalidad de Schur

En esta sección, \mathbb{C} será el cuerpo de los escalares. Por un lado, el cuerpo \mathbb{C} es algebraicamente cerrado, así que todos los resultados del Capítulo 2 son aplicables (en particular, la independencia lineal de caracteres debida a la Proposición 2.24). Por otro lado, las funciones complejas poseen una involución bien conocida, la conjugación compleja de funciones, $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$. Para compaginar esta con la involución mencionada sobre funciones de clase, se requiere un ingrediente más: dotar un espacio vectorial complejo con un *producto escalar* conveniente.

Definición 3.18. Si V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita, un **producto escalar** (o *producto interno*) sobre V es una aplicación $V \times V \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto \langle y | x \rangle$ que cumple:

- ◊ $\langle y | x \rangle$ es \mathbb{C} -lineal en la *segunda* variable;
- ◊ $\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$ para todo $x, y \in V$;
- ◊ $\langle x | x \rangle \geq 0$, con igualdad solo si $x = 0$ en V . ◊

Dado un producto escalar, cada forma \mathbb{C} -lineal $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ está dada por $x \mapsto \langle y | x \rangle$ para algún vector $y \in V$ (este es el *lema de Riesz*). Fíjese bien que $\langle \alpha y | x \rangle = \bar{\alpha} \langle y | x \rangle$, así que la multiplicación escalar se modifica por una conjugación compleja, es decir, $\alpha \cdot y := \bar{\alpha} y$. Se escribe $y \in \bar{V}$, donde \bar{V} denota el espacio \mathbb{C} -vectorial con el mismo grupo aditivo, $(\bar{V}, +) = (V, +)$, pero con la multiplicación escalar modificada. Entonces hay un isomorfismo \mathbb{C} -lineal $V^* \simeq \bar{V}$.

[[Aquí se usa el *convenio de Dirac* al tomar el producto escalar \mathbb{C} -lineal en la segunda variable pero antilineal en la primera variable. Dirac escribía $|x\rangle$ para denotar un vector $x \in V$, pero $\langle y|$ para denotar la forma lineal dada por $y \in \bar{V}$; la evaluación de la forma $\langle y|$ en el vector $|x\rangle$ entonces es simplemente la yuxtaposición $\langle y | x \rangle$.]]

Un espacio \mathbb{C} -vectorial finitodimensional admite muchos productos escalares. En efecto, si $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de V , existe un único producto escalar $(\cdot | \cdot)$ tal que esta base es *ortonormal*: $(u_j | u_k) = \llbracket j = k \rrbracket$. Si $x = \sum_{j=1}^n b_j u_j$, $y = \sum_{k=1}^n c_k u_k$ son dos vectores en V , el producto escalar correspondiente es $(y | x) := \sum_{j=1}^n \bar{c}_j b_j$.

Definición 3.19. Dada una representación de grupo $\pi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$, dicese que un producto escalar sobre V es **G-invariante** y que π es una **representación unitaria** si

$$\langle \pi(g)y | \pi(g)x \rangle = \langle y | x \rangle \quad \text{para todo } x, y \in V, g \in G.$$

Si G es un grupo finito, siempre es posible hallar un producto escalar G -invariante. De hecho, $(\cdot | \cdot)$ es un producto escalar arbitrario sobre V , el siguiente promedio proporciona un producto escalar G -invariante:

$$\langle y | x \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} (\pi(h)y | \pi(h)x). \quad (3.11)$$

En adelante, sin perder generalidad, se asumirá que cada representación compleja π es unitaria. \diamond

Dada una representación unitaria $\pi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$, cada $\pi(g) \in \text{End}_{\mathbb{C}} V$ posee una matriz $A(g) \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ con entradas

$$a_{ij}(g) := \langle u_i | \pi(g)u_j \rangle \quad (3.12)$$

donde $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una *base ortonormal* de V , con respecto a un producto escalar G -invariante. Esta $A(g)$ es una **matriz unitaria**, es decir, $A(g)^* A(g) = 1_n$, por cuanto

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ji}(g) a_{jk}(g) &= \sum_{j=1}^n \langle \pi(g)u_i | u_j \rangle \langle u_j | \pi(g)u_k \rangle \\ &= \langle \pi(g)u_i | \pi(g)u_k \rangle = \langle u_i | u_k \rangle = \llbracket i = k \rrbracket. \end{aligned}$$

Denótese por $U(n)$ el grupo de matrices unitarias, el cual es un subgrupo de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$; se ha comprobado que $A(g) \in U(n)$.

Cada matriz en $U(n)$ es diagonalizable, por un cambio de bases ortonormales, así que $A(g) \sim \text{diag}[\lambda_1(g), \dots, \lambda_n(g)]$ y esta matriz diagonal también es unitaria, lo cual significa que $|\lambda_j(g)| = 1$ para $j = 1, \dots, n$. Estos $\lambda_j(g)$ son los autovalores de $A(g)$, contados con multiplicidad. El carácter χ_{π} entonces satisface

$$\bar{\chi}_{\pi}(g) = \overline{\text{tr } \pi(g)} = \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_j(g)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j(g)} = \text{tr}(\pi(g)^{-1}) = \text{tr } \pi(g^{-1}) = \chi_{\pi}(g^{-1}).$$

Esto muestra que $\bar{\chi}_{\pi} = \chi_{\pi}^{\vee} = \chi_{\pi^*}$ cuando π es unitaria.

En el espacio \mathbb{C} -vectorial finitodimensional $F_c(G, \mathbb{C})$, la siguiente receta define un *producto escalar*:

$$\langle \psi | \varphi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \overline{\psi(h)} \varphi(h). \quad (3.13a)$$

Si $\psi = \chi_{\pi}$ es el carácter de una representación unitaria, entonces también vale:

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi(h^{-1}) \varphi(h). \quad (3.13b)$$

Proposición 3.20 (Schur). Sean $\pi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(W)$ dos representaciones unitarias irreducibles de un grupo finito G . Entonces:

- (a) Si π y σ no son equivalentes, sus caracteres son ortogonales, $\langle \chi_{\sigma} | \chi_{\pi} \rangle = 0$.
 (b) En el caso $V = W$ y $\pi = \sigma$, vale $\langle \chi_{\pi} | \chi_{\pi} \rangle = 1$.

Demostración. Si $T: V \rightarrow W$ es una aplicación \mathbb{C} -lineal cualquiera, defínase

$$\tilde{T} := \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \sigma(h^{-1}) T \pi(h).$$

Entonces $\sigma(g)\tilde{T} = \tilde{T}\pi(g)$ para $g \in G$, es decir, \tilde{T} entrelaza π y σ .

Sean $A(g)$ la matriz de $\pi(g)$ con respecto a una base ortonormal de V , dada por (3.12); y sea $B(g)$ la matriz análoga de $\sigma(g)$. Las matrices $[t_{kj}]$ de T y $[\tilde{t}_{kj}]$ de \tilde{T} obedecen:

$$\tilde{t}_{kj} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \sum_{i,l} b_{kl}(h^{-1}) t_{li} a_{ij}(h).$$

Ad (a): Si π y σ no son equivalentes, el lema de Schur (Proposición 1.15) muestra que $\tilde{T} = 0$. Al tomar para T la aplicación lineal $|u_l\rangle\langle u_i|$ con matriz elemental E_{li} , se concluye que⁴

$$\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} b_{kl}(h^{-1}) a_{ij}(h) = 0 \quad \text{para todo } i, j, k, l.$$

Como $\chi_{\pi}(h) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(h)$ y $\chi_{\sigma}(h) = \sum_{k=1}^m b_{kk}(h)$, se deduce que $\langle \chi_{\sigma} | \chi_{\pi} \rangle = 0$.

Ad (b): En el caso de que $V = W$ y $\pi = \sigma$, el lema de Schur (Corolario 1.16) implica que $\tilde{T} = \lambda 1_V$ con $\lambda = (\text{tr } T)/n$.

Nuevamente, al tomar para T la matriz elemental E_{li} , cuya traza es $\delta_{li} = \llbracket l = i \rrbracket$, se obtiene

$$\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} a_{kl}(h^{-1}) a_{ij}(h) = \frac{1}{n} \delta_{li} \delta_{kj}.$$

Entonces es inmediato que

$$\langle \chi_{\pi} | \chi_{\pi} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \sum_{i,k=1}^n a_{kk}(h^{-1}) a_{ii}(h) = \frac{1}{n} \sum_{i,k=1}^n \delta_{ki} = \frac{n}{n} = 1. \quad \square$$

Estas **relaciones de ortogonalidad de Schur** ofrecen, en el caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, una segunda demostración de que los caracteres irreducibles χ_1, \dots, χ_r de G son linealmente independientes. Además, permiten establecer mejor el Lema 3.12 en el siguiente criterio de equivalencia de representaciones unitarias.

⁴La notación $|x\rangle\langle y|$ se refiere a la aplicación \mathbb{C} -lineal de rango uno, $z \mapsto x \langle y | z \rangle = \langle y | z \rangle x$. La traza de esta aplicación es $\text{tr}(|x\rangle\langle y|) = \langle y | x \rangle$.

Teorema 3.21. *Dos representaciones unitarias (de grados finitos) de un grupo finito G son equivalentes si y sólo si sus caracteres son iguales.*

Demostración. Si $\pi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ es una representación unitaria, el teorema de Maschke garantiza que

$$\pi \sim n_1\pi_1 \oplus n_2\pi_2 \oplus \cdots \oplus n_r\pi_r$$

donde π_1, \dots, π_r son las representaciones irreducibles de G . Cada copia de π_j en esta descomposición actúa sobre un subespacio G -invariante de V , dotado con un producto escalar G -invariante (la restricción del producto escalar original sobre V). Luego estas subrepresentaciones π_j son también unitarias.

El Lema 3.14 y la Proposición 3.20 ahora implican que

$$\chi_{\pi} = n_1\chi_1 + \cdots + n_r\chi_r, \quad \text{con } n_j = \langle \chi_j | \chi_{\pi} \rangle \quad \text{para } j = 1, \dots, r. \quad (3.14)$$

Si $\sigma: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(W)$ es otra representación unitaria, con $\sigma \sim m_1\pi_1 \oplus \cdots \oplus m_r\pi_r$, el teorema de Krull y Schmidt implica que $\pi \sim \sigma$ si y solo si $n_j = m_j$ para $j = 1, \dots, r$; si y solo si $\chi_{\pi} = \chi_{\sigma}$. \square

El número $n_j = \langle \chi_j | \chi_{\pi} \rangle$ de sumandos de π_j en la descomposición de π en irreducibles se llama la **multiplicidad** de π_j en π .

Ejemplo 3.22. El Ejemplo 3.5 introdujo dos representaciones irreducibles del grupo S_3 , como subrepresentaciones de la representación π de S_3 sobre \mathbb{C}^3 por permutación de las coordenadas. Nótese que el producto escalar usual sobre \mathbb{C}^3 es invariante bajo estas permutaciones, así que $\pi: S_3 \rightarrow \text{U}(3)$ es unitaria.

La recta diagonal $x = y = z$ de \mathbb{C}^3 lleva la representación trivial π_1 , como subrepresentación de π .

El plano $x + y + z = 0$ en \mathbb{C}^3 – el complemento ortogonal de la recta diagonal – lleva otra representación σ de S_3 . Una base de este plano está formada por los dos vectores $x_1 := (1, \omega, \omega^2)$ y $x_2 := (1, \omega^2, \omega)$. Con respecto a esta base, las matrices (unitarias!) de los $\sigma(g)$ están dadas por:

$$\begin{aligned} \underline{1} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & (123) &\mapsto \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, & (132) &\mapsto \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \\ (12) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, & (13) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}, & (23) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Entonces $\chi_{\sigma}: S_3 \rightarrow \mathbb{C}$ toma los seis valores 2, -1 , -1 , 0, 0, 0 sobre estos elementos (es una función de clase), al notar que $1 + \omega + \omega^2 = 0$. Por lo tanto, vale

$$\langle \chi_{\sigma} | \chi_{\sigma} \rangle = \frac{1}{6}(4 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0) = 1,$$

lo cual comprueba que σ es irreducible. Su grado es $\chi_\sigma(1) = 2$, desde luego. También, se obtiene $\sigma \sim \pi_3$ porque $\chi_\sigma = \chi_3$, al examinar la tabla de caracteres (3.10). \diamond

► Si $\psi \in F_c(G, \mathbb{C})$ y si $\pi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ es una representación unitaria de G de grado finito, considérese el operador siguiente en $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$:

$$\Pi_\psi := \sum_{h \in G} \psi(h) \pi(h). \quad (3.16)$$

Para todo $g \in G$, vale

$$\begin{aligned} \pi(g) \Pi_\psi \pi(g)^{-1} &= \sum_{h \in G} \psi(h) \pi(g) \pi(h) \pi(g^{-1}) = \sum_{h \in G} \psi(h) \pi(ghg^{-1}) \\ &= \sum_{k \in G} \psi(g^{-1}kg) \pi(k) = \sum_{k \in G} \psi(k) \pi(k) = \Pi_\psi \end{aligned}$$

así que Π_ψ conmuta con la representación π . Si π es irreducible, el lema de Schur muestra que $\Pi_\psi = c_\psi 1_V$. Al tomar trazas, se obtiene

$$c_\psi \dim V = \sum_{h \in G} \psi(h) \chi_\pi(h) = |G| \langle \bar{\psi} \mid \chi_\pi \rangle. \quad (3.17)$$

Proposición 3.23. *Si G es un grupo finito, sus caracteres irreducibles $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ son una base ortonormal para el espacio vectorial $F_c(G, \mathbb{C})$ de funciones de clase complejas.*

Demostración. La Proposición 3.20 muestra que χ_1, \dots, χ_r forman una familia ortonormal en $F_c(G, \mathbb{C})$, con respecto al producto escalar (3.13).

Falta mostrar cualquier $\varphi \in F_c(G, \mathbb{C})$ es una combinación \mathbb{C} -lineal de estos caracteres. Basta comprobar que esta familia ortonormal es **total**, es decir, que la única φ ortogonal a todo χ_j es $\varphi = 0$.

Supóngase, entonces, que $\varphi \in F_c(G, \mathbb{C})$ satisface $\langle \chi_j \mid \varphi \rangle = 0$ para $j = 1, \dots, r$. Escribáse $\psi := \bar{\varphi} \in F_c(G, \mathbb{C})$. Sea π una representación unitaria de G sobre un espacio \mathbb{C} -vectorial finitodimensional V , y considérese el operador Π_ψ dado por (3.16). Al escribir $\pi \sim n_1 \pi_1 \oplus \dots \oplus n_r \pi_r$, se obtiene

$$c_\psi \dim V = |G| \langle \varphi \mid \chi_\pi \rangle = |G| \sum_{j=1}^r n_j \langle \varphi \mid \chi_j \rangle = |G| \sum_{j=1}^r n_j \overline{\langle \chi_j \mid \varphi \rangle} = 0,$$

así que $c_\psi = 0$ y por ende $\Pi_\psi = 0$.

En particular, si $\pi = \lambda$ es la representación regular de G sobre $V = \mathbb{C}[G]$, la fórmula (3.16) define un operador L_ψ que cumple $L_\psi = 0$. Entonces

$$\sum_{h \in G} \psi(h) x_h = \sum_{h \in G} \psi(h) \lambda(h) x_1 = L_\psi x_1 = 0 \quad \text{en } \mathbb{C}[G].$$

Como los x_h son linealmente independientes, se concluye que cada $\psi(h) = 0$; es decir, $\psi = 0$ y también $\varphi = 0$ en el espacio $F_c(G, \mathbb{C})$. Luego, la familia ortonormal $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ es total. \square

Corolario 3.24. *El número de representaciones unitarias irreducibles inequivalentes de un grupo finito G coincide con el número de sus clases conjugadas.*

Demostración. Las funciones que valen 1 en alguna clase conjugada y 0 en las demás forman una base para $F_c(G, \mathbb{C})$. Luego $\dim_{\mathbb{C}} F_c(G, \mathbb{C})$ es el número de clases conjugadas.

Por otro lado, como $F_c(G, \mathbb{C})$ admite el producto escalar (3.13), su dimensión es la cardinalidad r de la base ortonormal $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$. \square

Por ejemplo, el grupo S_3 posee tres representaciones unitarias irreducibles y tiene tres clases conjugadas (la identidad, las transposiciones, los 3-ciclos).

Ejemplo 3.25. Si el grupo finito G es *abeliano*, las clases conjugadas son los singuletes $\{g\} \subset G$. Entonces G posee un total de $|G|$ representaciones irreducibles complejas inequivalentes, todos de grado uno, en consonancia con la fórmula (3.6).

Una representación irreducible π del grupo cíclico $C_n = \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ está determinado por $\xi := \pi(g) \in \mathbb{C}^\times$ y se verifica $\xi^n = \pi(g^n) = \pi(1) = 1$. Entonces $\xi \in U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y $\pi(C_n) = \{1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}\} \subset U(1)$. Como ξ es una n -ésima raíz de 1, las únicas posibilidades son $\xi = \xi_k \equiv e^{2\pi i k/n}$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$. Al tomar $\pi_j(g) := \xi_{j-1}$, las únicas representaciones unitarias irreducibles de C_n son π_1, \dots, π_n . Ellos son (necesariamente) inequivalentes entre sí. \diamond

► La coincidencia del número de clases conjugadas de un grupo finito G con el número de sus caracteres irreducibles hace factible ilustrar las representaciones irreducibles mediante una **tabla de caracteres**. Esta es un arreglo cuadrado, cuyas filas corresponden con los caracteres irreducibles χ_1, \dots, χ_r y cuyas columnas corresponden con las clases conjugadas. Tómese un conjunto $\{h_1, h_2, \dots, h_r\}$ de elementos de G , con $h_1 = 1$, que tiene un representante de cada clase conjugada. La entrada (j, k) de la tabla de caracteres es el valor $\chi_j(h_k) \in \mathbb{C}$. Convencionalmente, se reserva la primera fila para el carácter de la representación trivial y la primera columna para las evaluaciones en 1, que dan los grados respectivos de las representaciones irreducibles.

En el grupo S_3 , por ejemplo, el juego de elementos $\{1, r, s\}$ contiene una transposición r y un 3-ciclo s ; en el Ejemplo 3.17 se tomó $r = (12)$ y $s = (123)$. El arreglo 3×3 de la fórmula (3.10) es la tabla de caracteres correspondiente.

Nótese que las *filas* de (3.10) son ortonormales para el producto escalar (3.13):

$$\begin{aligned}\langle \chi_1 | \chi_1 \rangle &= \langle \chi_2 | \chi_2 \rangle = \frac{1+3+2}{6} = 1, & \langle \chi_3 | \chi_3 \rangle &= \frac{4+0+2}{6} = 1, \\ \langle \chi_1 | \chi_3 \rangle &= \langle \chi_2 | \chi_3 \rangle = \frac{2+0-2}{6} = 0, & \langle \chi_1 | \chi_2 \rangle &= \frac{1-3+2}{6} = 0.\end{aligned}$$

Este es simplemente un caso concreto de la Proposición 3.20.

En el cálculo anterior, se ha empleado una forma compacto del producto escalar (3.13a) de las filas, al notar que los sumandos $\overline{\psi(h)} \varphi(h)$ se repiten varias veces, porque ψ y φ son funciones de clase. Para $k = 1, \dots, r$, sea m_k la cardinalidad de la clase conjugada de h_k , es decir,

$$m_k := \#\{gh_kg^{-1} : g \in G\} = [G : Z_G(h_k)].$$

El lado derecho es el índice del subgrupo $Z_G(h_k) := \{g \in G : gh_kg^{-1} = h_k\}$; en particular, $|G|/m_k = |Z_G(h_k)|$ es un entero positivo, por el teorema de Lagrange. Entonces se puede reescribir (3.13) así:

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \overline{\psi(h)} \varphi(h) \equiv \frac{1}{|G|} \sum_{k=1}^r m_k \overline{\psi(h_k)} \varphi(h_k). \quad (3.18)$$

En otras palabras, las *filas* de una tabla de caracteres son ortogonales, con respecto al siguiente *producto escalar* sobre \mathbb{C}^r :

$$\langle z | w \rangle := \sum_{k=1}^r \frac{m_k}{n} \bar{z}_k w_k. \quad (3.19)$$

Resulta que las *columnas* de una tabla de caracteres son a su vez ortogonales (aunque no normalizadas), con respecto al *producto escalar usual* sobre \mathbb{C}^r ,

$$(z | w) := \sum_{k=1}^r \bar{z}_k w_k,$$

como afirma el lema siguiente (también debido a Schur).

Lema 3.26. *Si $\{h_1, h_2, \dots, h_r\}$ es un juego de representantes de las clases conjugadas de un grupo finito G , entonces se cumplen las siguientes relaciones de ortogonalidad:*

$$\sum_{j=1}^r \chi_j(h_k) \overline{\chi_j(h_l)} = \frac{|G|}{m_k} \delta_{kl}. \quad (3.20)$$

Demostración. Considérese la matriz diagonal $M := \text{diag}[m_1, \dots, m_r] \in M_r(\mathbb{C})$. La ortonormalidad de las filas de la tabla de caracteres dice que

$$\delta_{ij} = \langle \chi_i | \chi_j \rangle \frac{1}{|G|} \sum_{k=1}^r m_k \overline{\chi_i(h_k)} \chi_j(h_k).$$

Sea $C = [c_{kj}]$ la *transpuesta* de la matriz de las entradas $c_{kj} := \chi_j(h_k)$ de la tabla de caracteres. Las relaciones de ortogonalidad anteriores pueden resumirse en la siguiente igualdad matricial en $M_r(\mathbb{C})$:

$$C^* M C = |G| 1_r.$$

[[La entrada (i, l) de la matriz C^* es $\bar{c}_{li} = \overline{\chi_i(h_l)}$.]] Si $B = \text{diag}[b_1, \dots, b_r]$ es la matriz diagonal real con entradas $b_k := \sqrt{m_k/|G|}$, entonces la matriz $U := BC \in M_r(\mathbb{C})$ es unitaria; es decir, $U^*U = 1_r$.

Una matriz unitaria es invertible, porque $|\det U|^2 = \det(U^*U) = 1$. Luego $U^{-1} = U^*$ y por ende $UU^* = 1_r$. Esto implica que $BCC^*B = 1_r$ (fíjese que $B^* = B$ por ser B diagonal y real), y en consecuencia $CC^* = B^{-2}$. Esto comprueba (3.20):

$$\sum_{j=1}^r c_{kj} \bar{c}_{lj} = \frac{1}{b_k^2} \delta_{kl} = \frac{|G|}{m_k} \delta_{kl}. \quad \square$$

Ejemplo 3.27. Considérese el **grupo diedral** D_4 de las simetrías de un cuadrado, generado por una rotación $r = \rho_{\pi/2}$ de período 4 y una reflexión $s = \mu_0$ perpendicular a un par de lados. Nótese que $rs = \mu_{\pi/2}$ es una reflexión en una diagonal del cuadrado. La notación se refiere a las siguientes isometrías del plano euclidiano \mathbb{R}^2 :

$$\rho_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mu_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}; \quad (3.21)$$

las ρ_θ son rotaciones y las μ_θ son reflexiones. Entonces, resulta que

$$D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\}, \quad \text{con } sr = r^3s.$$

El subgrupo de rotaciones es $C_4 = \{1, r, r^2, r^3\}$. Nótese que $sr s^{-1} = r^3$, así que $\{r, r^3\}$ es una clase conjugada; además, $rsr^{-1} = r s r^3 = r r^9 s = r^2 s$ porque $r^4 = 1$, y $\{s, r^2s\}$ es otra clase conjugada; también, $r(rs)r^{-1} = r^3s$ así que $\{rs, r^3s\}$ es una clase conjugada. Junto con los singuletes $\{1\}$ y $\{r^2\}$, hay cinco clases conjugadas en total, con representantes $1, m := r^2, r, s$ y $t := rs$.

Debe haber, entonces, cinco representaciones unitarias irreducibles inequivalentes de D_4 . El centro del grupo es $Z(D_4) = \{1, m\} \simeq C_2$, y resulta que $D_4/Z(D_4) \simeq V$,

el grupo no cíclico de orden 4. Si $\eta: D_4 \rightarrow V$ es el homomorfismo cociente y si $\sigma_j: V \rightarrow U(1)$, para $j = 1, 2, 3, 4$, son las cuatro representaciones irreducibles del grupo abeliano V , entonces las $\pi_j := \sigma_j \circ \eta$ definen cuatro representaciones unitarias irreducibles del grupo D_4 (inequivalentes entre sí), todos de grado 1.

Falta otra representación, π_5 , que debe ser de grado 2, puesto que $1 + 1 + 1 + 1 + 4 = 8$.

El grupo V tiene la forma $V = \{1, a, b, ab\}$, con $a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1$, así que las σ_j toman valores en $\{1, -1\}$, necesariamente. Esta circunstancia da las primeras cuatro filas de la tabla de caracteres de D_4 :

D_4	1	m	r	s	t
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

La última fila empieza con $2 = \chi_5(1)$. Si esta fila es $(2, q, j, k, l) \in \mathbb{C}^5$, la ortogonalidad de filas muestra que $2 + q + 2(\pm j \pm k \pm l) = 0$ para cuatro patrones de signo diferentes. Luego $j = k = l = 0$ y luego también $q = -2$.

¿Cuál sería, entonces, esta representación $\pi_5: D_4 \rightarrow U(2)$? No es otra cosa que la presentación original (3.21) de los elementos de D_4 en términos de matrices 2×2 ! De hecho, una matriz ortogonal real es también unitaria; y al calcular las trazas de la matrices $1_2, \rho_\pi, \rho_{\pi/2}, \mu_0, \mu_{\pi/2}$, se obtiene los valores $2, -2, 0, 0, 0$. El carácter correspondiente es χ_5 ; luego esta representación es irreducible y es equivalente a π_5 . \diamond

Ejemplo 3.28. Considérese el **grupo alternante** A_4 de permutaciones pares de cuatro objetos. Es evidente que $|A_4| = 4!/2 = 12$ y que A_4 tiene cuatro clases conjugadas, representadas por los elementos típicos $1 = \underline{1}, r = (12)(34), s = (123), t = (132)$.

Los pares de transposiciones y la identidad forman un subgrupo normal $N = \{1, r, sr s^{-1}, tr t^{-1}\}$. (Este es el único 2-subgrupo de Sylow de A_4 , porque los otros ocho elementos son 3-ciclos.) Nótese que $A_4/N = \{N, sN, tN\} \simeq C_3$. Las tres representaciones irreducibles del grupo abeliano C_3 , compuestas con el homomorfismo cociente $\eta: A_4 \rightarrow C_3$, dan tres representaciones irreducibles π_1, π_2, π_3 de A_4 , todos de rango 1.

La cuarta representación irreducible π_4 (solo hay cuatro inequivalentes, porque solo hay 4 clases conjugadas) debe tener rango 3 porque $|A_4| = 12 = 1 + 1 + 1 + 9$. La tabla

de caracteres de A_4 es la siguiente:

A_4	1	r	s	t
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

Las primeras tres filas se obtienen directamente de la tabla de caracteres del grupo cociente C_3 ; en ellas, la columna bajo r duplica la primera columna porque $rN = N$ en A_4/N .

La última fila empieza con $3 = \chi_4(1)$. Si esta fila es $(3, q, j, k) \in \mathbb{C}^4$, la ortogonalidad de las filas con respecto al producto escalar (3.19) implica que

$$3 + 3q + 4(j + k) = 3 + 3q + 4(j\omega + k\omega^2) = 3 + 3q + 4(j\omega^2 + k\omega) = 0,$$

así que $j = k = 0$ y además $q = -1$.

Se sabe que A_4 actúa en \mathbb{R}^3 , y de igual manera en \mathbb{C}^3 , por rotaciones de un tetraedro regular centrado en el origen. Por ejemplo, se puede tomar cuatro de las ocho esquinas de un cubo como vértices del tetraedro: $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$ y $(1, 1, 1)$. La acción de los 3-ciclos s y t deja fijo el cuarto vértice y permuta los primeros tres; ellos actúan por rotaciones de ángulos $\pm 2\pi/3$ alrededor de la recta que pasa por el origen y $(1, 1, 1)$. El elemento r y sus conjugados actúan por rotaciones de π (pues $r^2 = 1$) alrededor de los ejes coordenados. Si $\sigma: A_4 \rightarrow \text{SO}(3)$ denota esta representación, entonces

$$\sigma(r) = R := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma(s) = S := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma(t) = T := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La acción de s y t deja fijo únicamente la recta $x = y = z$ y el plano $x + y + z = 0$, pero la acción de r no los conserva; luego esta acción de A_4 es irreducible en \mathbb{R}^3 o \mathbb{C}^3 . Al calcular las trazas de las matrices exhibidas, se ve que esta acción σ de A_4 es equivalente a la representación π_4 . En efecto, se ve que $\chi_\sigma(r) = \text{tr } R = -1$, $\chi_\sigma(s) = \text{tr } S = 0$ y $\chi_\sigma(t) = \text{tr } T = 0$; así que $\chi_\sigma = \chi_4$. ◊

► La tabla de caracteres de un grupo finito G ofrece un resumen concreto de la naturaleza de sus representaciones irreducibles. Como se ve en los ejemplos anteriores, su determinación de esa tabla requiere información detallada acerca del grupo.

Es posible aprovechar la tabla de caracteres para determinar la descomposición de un producto tensorial de representaciones.

Definición 3.29. Sean $\pi_i: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(V_i)$ y $\pi_j: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(V_j)$ dos representaciones irreducibles del mismo grupo finito G . Su producto tensorial $\pi_i \otimes \pi_j: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(V_i \otimes V_j)$ en general no es irreducible, sino que admite una descomposición:

$$\pi_i \otimes \pi_j \sim \bigoplus_{k=1}^r n_{ij}^k \pi_k \quad \text{sobre} \quad V_i \otimes_{\mathbb{C}} V_j \simeq \bigoplus_{k=1}^r n_{ij}^k V_k, \quad (3.22a)$$

para ciertos coeficientes $n_{ij}^k \in \mathbb{N}$. Esta **fórmula de Clebsch y Gordan** asocia a cada grupo finito G un juego de enteros n_{ij}^k . La determinación de estos enteros se llama el *problema de Clebsch y Gordan*. Al aplicar el Lema 3.14 a esta fórmula, se obtiene una relación análoga entre los caracteres irreducibles:

$$\chi_i \chi_j = \sum_{k=1}^r n_{ij}^k \chi_k, \quad (3.22b)$$

que permite hallar los $n_{ij}^k = \langle \chi_k \mid \chi_i \chi_j \rangle$. \diamond

Ejemplo 3.30. Considérese la representación irreducible π_3 de S_3 , de grado 2; entonces el grado de $\pi_3 \otimes \pi_3$ es 4, así que esta representación no es irreducible. De la tabla de caracteres (3.10), donde $\chi_3 \leftrightarrow (\chi_3(1), \chi_3(r), \chi_3(s)) = (2, 0, -1)$, se obtiene $\chi_3^2 \leftrightarrow (4, 0, 1)$. La relación $\chi_3^2 = n_{33}^1 \chi_1 + n_{33}^2 \chi_2 + n_{33}^3 \chi_3$ se puede resolver de modo elemental, al evaluarlo en 1, r , s sucesivamente:

$$4 = n_{33}^1 + n_{33}^2 + 2n_{33}^3, \quad 0 = n_{33}^1 - n_{33}^2, \quad 1 = n_{33}^1 + n_{33}^2 - n_{33}^3,$$

para obtener $n_{33}^1 = n_{33}^2 = n_{33}^3 = 1$.

Alternativamente, se puede usar la ortogonalidad de filas bajo el producto escalar (3.19):

$$n_{33}^1 = \langle \chi_1 \mid \chi_3^2 \rangle = n_{33}^2 = \langle \chi_2 \mid \chi_3^2 \rangle = \frac{4 + 0 + 2}{6} = 1, \quad n_{33}^3 = \langle \chi_3 \mid \chi_3^2 \rangle = \frac{8 + 0 - 2}{6} = 1.$$

En todo caso, se obtiene $\pi_3 \otimes \pi_3 \sim \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \pi_3$.

En el Ejemplo 3.9, hay otra descomposición $\pi_3 \otimes \pi_3 \sim S^2 \pi_3 \oplus \Lambda^2 \pi_3$ (con un pequeño abuso de notación), sobre el espacio vectorial

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \simeq S^2 \mathbb{C}^2 \oplus \Lambda^2 \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}$$

por conteo de dimensiones. Resulta que $\Lambda^2 \pi_3$ no es trivial, así que $\Lambda^2 \pi_3 \sim \pi_2$ y por lo tanto $S^2 \pi_3 \sim \pi_1 \oplus \pi_3$. \diamond

3.4 Representaciones inducidas

En esta sección, se supone inicialmente que G es un grupo finito y que \mathbb{F} es un cuerpo cualquiera cuya característica no divide $|G|$, y así $\mathbb{F}[G]$ es semisimple.

Si $\pi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ es una representación de un grupo G , su **restricción a un subgrupo** $H \leq G$ define una representación de H sobre el mismo espacio \mathbb{C} -vectorial V . Esta restricción puede denotarse por $\text{Res}_H^G(\pi) \equiv \pi_H: H \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$; por definición, $\pi_H(h) := \pi(h)$ para todo $h \in H$.

Si π es irreducible, la restricción π_H generalmente no es irreducible como representación de H . Por ejemplo, si H es un subgrupo abeliano, entonces π_H es una suma directa de subrepresentaciones de rango 1. En el Ejemplo 3.5 se exhibe la representación irreducible π_3 de grupo S_3 , cuyo rango es 2, pero su restricción al subgrupo abeliano C_3 es reducible, como evidencian las primeras tres matrices diagonales en el despliegue (3.7).

Otro ejemplo de restricción de representaciones ocurre con la *representación regular* $\lambda: G \rightarrow \text{GL}(\mathbb{F}[G])$ de un grupo finito, dado por $\lambda(g)x_k := x_{gk}$ para $k \in G$, según el Ejemplo 3.6. Entonces $\lambda_H(h)x_k = x_{hk}$ para $h \in H$ y $k \in G$. Sea $W = \text{lin}\langle x_h : h \in H \rangle$ el subespacio \mathbb{F} -vectorial de $V = \mathbb{F}[G]$ generado por la parte de la base correspondiente al subgrupo H . Entonces W es invariante bajo λ_H ; y $\lambda_H|_W$ coincide con la representación regular de H . Sea $\{1, g_2, \dots, g_m\}$, con $m = [G:H]$, una familia de representantes de las coclases gH en G/H . Hay una suma directa de espacios \mathbb{F} -vectoriales

$$V = W \oplus \lambda(g_2)W \oplus \dots \oplus \lambda(g_m)W. \quad (3.23)$$

En esta suma directa, el primer sumando es un H -módulo (bajo la acción λ_H de H), pero *los otros sumandos no son H -módulos*, sino que los operadores $\lambda(h) \in \text{End}_{\mathbb{F}} V$ los permutan entre sí. Nótese que el sumando $\lambda(g_i)W$ solo depende de la coclase g_iH , porque $\lambda(g_i h)W = \lambda(g_i)\lambda(h)W = \lambda(g_i)W$ si $h \in H$.

► En la dirección opuesta, dada una representación $\sigma: H \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(W)$ de un subgrupo $H \leq G$, se puede construir una representación de G por el método siguiente.

Definición 3.31. Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G con $[G:H] = m$; Sea $G/H = \{H, g_2H, \dots, g_mH\}$ el conjunto de coclases (a izquierda) de H . Escríbase $g \triangleright i = j$ cuando $gg_iH = g_jH$. Dícese que una representación $\sigma: H \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(W)$ **induce** una representación $\pi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ con $W \leq V$ si

$$V = W \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_m, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \pi(h)|_W = \sigma(h) & \text{para } h \in H, \\ \pi(g)W_i = W_{g \triangleright i} & \text{para } g \in G. \end{cases} \quad (3.24)$$

Fíjese que $\dim W_i = \dim W$ para cada i ; además, vale $\dim V = m \dim W$ porque la suma de subespacios es directa. \diamond

Es evidente de la definición que la representación regular λ de G es inducida por su restricción λ_H a un subgrupo H , en vista de (3.23). Es menos evidente que cualquier representación σ de H induce alguna representación de G . A continuación se ofrece una prueba de existencia y unicidad (hasta equivalencia) de dicha representación inducida, y luego una receta explícita que la exhibe.

Proposición 3.32. *Sea G un grupo finito y $H \leq G$; sea $\pi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ una representación de G inducida por una representación $\sigma: H \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(W)$. Si $\tau: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(U)$ es otra representación de G , y si $S \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(W, U)$ cumple $S \circ \sigma(h) = \tau(h) \circ S$ para todo $h \in H$, entonces existe una única $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, U)$ tal que $T|_W = S$ y $T \circ \pi(g) = \tau(g) \circ T$ para todo $g \in G$.*

Demostración. La conclusión puede reformularse como el siguiente enunciado: *cada aplicación que entrelaza σ y τ_H puede extenderse (de manera única) a una aplicación que entrelaza π y τ .*

Para la *unicidad* de T , fíjese que si $y \in W_i$, entonces $\pi(g_i^{-1})y \in W$, así que

$$Ty = T\pi(g_i)[\pi(g_i^{-1})y] = \tau(g_i)T[\pi(g_i^{-1})y] = \tau(g_i)S[\pi(g_i^{-1})y].$$

Entonces T queda determinada sobre cada W_i y por ende sobre su suma directa V .

Para la *existencia* de T , el resultado del cálculo anterior sirve como una definición:

$$Ty := \tau(g_i)S[\pi(g_i^{-1})y] \quad \text{para } y \in W_i.$$

Para que sea una *buena* definición, se debe asegurar que Ty no depende del representante g_i de la coclase g_iH . Si $h \in H$, nótese que

$$\begin{aligned} \tau(g_i h)S[\pi((g_i h)^{-1})y] &= \tau(g_i)\tau(h)S[\sigma(h^{-1})\pi(g_i^{-1})y] \\ &= \tau(g_i)S\sigma(h)[\sigma(h^{-1})\pi(g_i^{-1})y] = \tau(g_i)S[\pi(g_i^{-1})y]. \end{aligned}$$

Luego T está bien definida sobre cada W_i ; y $Ty = Sy$ para $y \in W$ (en el caso $i = 1$). Si $x \in V$, entonces $x = y_1 + \cdots + y_m$ de manera única porque la suma (3.24) es directa, así que $Tx := Ty_1 + \cdots + Ty_m$ determina $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, U)$.

Si $g \in G$, $y \in W_i$, se puede suponer que $gg_i = g_j$ para algún j . Luego $\pi(g)y \in W_j$, así que

$$T\pi(g)y = \tau(g_j)S[\pi(g_j^{-1})\pi(g)y] = \tau(g)\tau(g_i)S[\pi(g_i^{-1})y] = \tau(g)Ty.$$

Esto verifica que $T \circ \pi(g) = \tau(g) \circ T$ para todo $g \in G$. □

Corolario 3.33. *Sea H un subgrupo de un grupo finito G y sea $\sigma: H \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(W)$ una representación de H . Entonces existe una representación $\pi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ inducida por σ , la cual es única hasta equivalencia.*

Demostración. Si dos representaciones σ_1 y σ_2 de H inducen representaciones π_1 y π_2 de G , es fácil chequear que $\sigma_1 \oplus \sigma_2$ de H induce la representación $\pi_1 \oplus \pi_2$ de G . Basta suponer, entonces, que σ es irreducible; en cuyo caso, es equivalente a una subrepresentación de la representación regular de H . Con subespacios apropiados de la suma directa (3.23), se puede fabricar una representación inducida π de G .

Si $\tau: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(U)$ es otra representación inducida por la misma σ , la propiedad $\tau(h)|_W = \sigma(h)$ para $h \in H$ dice que la inclusión $S: W \hookrightarrow U$ cumple $S \circ \sigma(h) = \tau(h) \circ S$ para $h \in H$. La Proposición 3.32 muestra que S se extiende a $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, U)$ que entrelaza π y τ .

La relación $T \circ \pi(g) = \tau(g) \circ T$ implica que la imagen de T incluye cada $\tau(g)W$; luego, T es sobreyectiva. Como $\dim U = [G:H] \dim W = \dim V$, entonces T es también inyectiva. El operador entrelazante invertible T establece la equivalencia $\pi \sim \tau$. \square

Si $H \leq G$ y σ es una representación de H , se denota por $\text{Ind}_H^G(\sigma) \equiv \sigma^G$ la representación de G inducida por σ . Con esta notación, la Proposición 3.32 puede reformularse como sigue.

Proposición 3.34. *Sea H un subgrupo de un grupo finito G ; si $\sigma: H \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(W)$ es una representación de H , sea $\sigma^G: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ la representación de G inducida por σ . Entonces, dada otra representación $\tau: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(U)$, hay un isomorfismo \mathbb{F} -lineal*

$$\text{Hom}_H(W, U) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_G(V, U) \quad (3.25)$$

cuyo isomorfismo inverso es la restricción $T \mapsto T|_W$. \square

Para grupos finitos de bajo orden, la construcción de σ^G a partir de σ está implícita en la fórmula (3.24). Si $[G:H] = m$, sean W_2, \dots, W_m unos espacios vectoriales isomorfos a W y sea $V := W \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_m$ su suma directa \mathbb{F} -vectorial. Dado una familia $\{1, g_2, \dots, g_m\}$ de representantes de coclases en G/H , tómesese un isomorfismo fijo de $T_i: W \rightarrow W_i$, con $T_1 := 1_W$. Para $g \in G$, la relación $gg_i = g_j h$ determina $h \in H$; defínase $\sigma^G(g)$ sobre W_i por $\sigma^G(g) \circ T_i := T_j \circ \sigma(h)$. Es fácil chequear que σ^G es un homomorfismo de G en $\text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ que cumple (3.24).

► Hay una forma alternativa de definir la representación σ^G mediante una fórmula explícita, que admite una generalización directa a grupos infinitos. Antes de abordarla, conviene reformular la representación regular (a izquierda) de un grupo finito G .

Denótese por $F(G, \mathbb{F})$ la totalidad de funciones $\xi: G \rightarrow \mathbb{F}$, sin condición alguna. Este es obviamente un espacio \mathbb{F} -vectorial de dimensión $|G|$; una base es la familia de funciones $\{ \delta_h : h \in G \}$, donde

$$\delta_h(g) := \begin{cases} 1 & \text{si } g = h, \\ 0 & \text{si } g \neq h, \end{cases}$$

o más brevemente, $\delta_h(g) := \llbracket g = h \rrbracket$. Defínase una representación ℓ de G sobre este espacio por

$$\underline{\ell}(g)\xi(x) := \xi(g^{-1}x), \quad \text{para } g \in G. \quad (3.26)$$

En particular,

$$\ell(g)\delta_h(x) = \delta_h(g^{-1}x) = 1 \iff g^{-1}x = h \iff x = gh.$$

Entonces está claro que $\ell(g)\delta_h = \delta_{gh}$, para todo $g, h \in G$. Entonces el isomorfismo \mathbb{F} -lineal $\mathbb{F}[G] \rightarrow F(G, \mathbb{F})$ dado por la correspondencia de bases $x_h \mapsto \delta_h$, para $h \in G$, entrelaza la representación regular λ con ℓ . En breve, $\lambda \sim \ell$, y la representación definida por (3.26) también puede llamarse la **representación regular** (a izquierda) de G .

Ahora sea $\sigma: H \rightarrow \text{GL}(W)$ una representación (de rango finito) de un subgrupo $H \leq G$. Considérese el siguiente espacio \mathbb{F} -vectorial de funciones con valores en W :

$$V := \{ \psi: G \rightarrow W : \psi(xh) = \sigma(h^{-1})(\psi(x)) \text{ si } h \in H \}. \quad (3.27a)$$

Defínase $\pi: G \rightarrow \text{GL}(V)$ por

$$\underline{\pi}(g)\psi(x) := \psi(g^{-1}x) \quad \text{para } g \in G. \quad (3.27b)$$

Es evidente que $\pi(g)\psi \in V$ porque $\psi(g^{-1}xh) = \sigma(h^{-1})(\psi(g^{-1}x))$ para $g, x \in G, h \in H$.

Nótese que V es finitodimensional porque $|G|$ y $\dim W$ son finitos. Además, por su definición, cada $\psi \in V$ está determinado por sus valores $\psi(g_i)$ sobre unos representantes $1, g_2, \dots, g_m$ de las coclases $g_i H$ en G/H . Al identificar $\psi \leftrightarrow (\psi(1), \psi(g_2), \dots, \psi(g_m))$, se obtiene un isomorfismo \mathbb{F} -lineal $V \simeq W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_m$, donde cada W_i es una copia isomorfa de W .

Bajo este isomorfismo, se ve que la relación $gg_i = g_j h$ implica

$$\pi(g)\psi(g_j) = \psi(g^{-1}g_j) = \psi(g_i h^{-1}) = \sigma(h)(\psi(g_i)),$$

así que $\pi(g)$ lleva W_i en W_j y que $\pi(h)$ coincide con $\sigma(h)$ sobre $W_1 \simeq W$. Luego $\pi \sim \sigma^G$. De hecho, se puede tomar (3.27) como la *definición* concreta de $\text{Ind}_H^G(\sigma)$.

► El carácter de una representación inducida σ^G está relacionado con el carácter de la representación original σ , mediante una fórmula explícita obtenida por Frobenius.

Proposición 3.35. *Sea G un grupo finito tal que $\text{char } \mathbb{F}$ no divide $|G|$; para $H \leq G$, escribáse $G/H = \{H, g_2H, \dots, g_mH\}$. Si $\sigma: H \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(W)$ es una representación de H , el carácter de la representación inducida $\pi = \sigma^G$ de G está dado por*

$$\chi_{\pi}(k) = \sum_{i: g_i^{-1}kg_i \in H} \chi_{\sigma}(g_i^{-1}kg_i) = \frac{1}{|H|} \sum_{g: g^{-1}kg \in H} \chi_{\sigma}(g^{-1}kg). \quad (3.28)$$

Demostración. En primer lugar, nótese que las dos sumas son iguales, porque χ_{σ} es una función de clase sobre H ; en efecto, si $g^{-1}kg \in H$ con $g = g_ih$, entonces $\chi_{\sigma}(g^{-1}kg) = \chi_{\sigma}(h^{-1}g_i^{-1}kg_ih) = \chi_{\sigma}(g_i^{-1}kg_i)$; por eso, en la segunda sumatoria los términos $\chi_{\sigma}(g_i^{-1}kg_i)$ aparecen repetidos $|H|$ veces cada uno. (Es legítimo dividir por $|H|$ porque $|H| \neq 0$ en \mathbb{F} , por hipótesis.)

Sea $W_j = \pi(g_j)W$ para $j = 1, \dots, m$. Si $k \in G$, entonces $\pi(k) \in \text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ donde $V = \bigoplus_{i=1}^m W_i$ y el operador $\pi(k)$ permuta los subespacios W_i de V . De hecho, $kg_j \in g_iH$ si y solo si $\pi(k)(W_j) = W_i$.

Para calcular la traza $\chi_{\pi}(k) = \text{tr } \pi(k)$, se puede usar una base de V formado por una unión de bases de los W_i . La matriz de $\pi(k)$ con respecto a esta base es un arreglo $m \times m$ de bloques de lado $|H|$ cada uno. En la fila i de este arreglo, hay un solo bloque no nulo, el cual queda en la columna j tal que $\pi(k)(W_j) = W_i$. Entonces $\text{tr } \pi(k)$ es la suma de las trazas de los *bloques diagonales*, con $i = j$. Ahora bien, la relación $kg_i \in g_iH$ si y sólo si $g_i^{-1}kg_i \in H$: esta es la condición para tener un bloque diagonal en la matriz de $\pi(k)$.

Si $g_i^{-1}kg_i = h \in H$, entonces $\pi(g_i)|_W$ es un isomorfismo \mathbb{F} -lineal de W en W_i , que entrelaza el bloque diagonal $\pi(k)|_{W_i}$ con $\pi(h)|_W = \sigma(h)$: la traza de este bloque es $\text{tr } \sigma(h) = \chi_{\sigma}(h) = \chi_{\sigma}(g_i^{-1}kg_i)$. Ahora $\chi_{\pi}(k) = \text{tr } \pi(k)$ es la suma de estas trazas parciales, lo cual comprueba (3.28). \square

Ejemplo 3.36. Considérese el caso de $C_3 \leq S_3$, con $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Las representaciones irreducibles σ_k del grupo abeliano C_3 , todas de grado 1, inducen representaciones de S_3 de grado 2. En la notación del Ejemplo 3.17, $C_3 = \{1, s, s^2\}$ y $\{1, r\}$ representan las dos coclases. Fíjese que $r^{-1}sr = rsr = s^2 \in C_3$ pero $r^{-1}rr = r \notin C_3$.

Denótese por $\tilde{\chi}_k$ el carácter de S_3 inducido por el carácter irreducible χ_k de C_3 , para $k = 1, 2, 3$. De la fórmula de Frobenius se obtienen los siguientes valores:

	1	r	s
$\tilde{\chi}_1$	2	0	2
$\tilde{\chi}_2$	2	0	-1
$\tilde{\chi}_3$	2	0	-1

En detalle: $\tilde{\chi}_k(1) = 1 + 1 = 2$ para cada k ; y $\tilde{\chi}_k(r) = 0$ para cada k porque la sumas en (3.28) son vacías. También $\tilde{\chi}_k(s) = \chi_k(s) + \chi_k(s^2)$ da lugar a tres casos, $1 + 1 = 2$ y $\omega + \omega^2 = \omega^2 + \omega = -1$.

Al comparar esta tabla de los $\tilde{\chi}_k$ con la tabla de caracteres (3.10) de S_3 , se concluye que $(\sigma_1)^{S_3} \sim \pi_1 \oplus \pi_2$ mientras $(\sigma_2)^{S_3} \sim (\sigma_3)^{S_3} \sim \pi_3$. \diamond

Ejemplo 3.37. Considérese nuevamente el grupo alternante A_4 del Ejemplo (3.28) y su subgrupo $N \simeq C_2 \times C_2$. Este N es abeliano y tiene cuatro representaciones de grado 1. Una de ellas es σ , definida por $\sigma(1) = \sigma(r) := 1$, $\sigma(srs^{-1}) = \sigma(trt^{-1}) := -1$.

Sea $\pi = \sigma^{A_4}$ la representación inducida de A_4 . Su grado es $12/4 = 3$, el número de coclases en A_4/N , así que $\chi_\pi = 3$. Al tomar $A_4/N = \{N, sN, tN\}$, la fórmula (3.28) permite calcular

$$\chi_\pi(r) = \sigma(r) + \sigma(s^{-1}rs) + \sigma(t^{-1}rt) = \sigma(r) + \sigma(trt^{-1}) + \sigma(srs^{-1}) = 1 - 1 - 1 = -1,$$

porque $t = s^{-1}$ en A_4 . Como $s^{-1}ss = t^{-1}st = s \notin N$ y $s^{-1}ts = t^{-1}tt = t \notin N$, las sumas en (3.28) para los casos $k = s$ y $k = t$ son vacías, así que $\chi_\pi(s) = \chi_\pi(t) = 0$. Ahora se puede calcular

$$\langle \chi_\pi | \chi_\pi \rangle = \frac{1}{12}(|\chi_\pi(1)|^2 + 3|\chi_\pi(r)|^2 + 4|\chi_\pi(s)|^2 + 4|\chi_\pi(t)|^2) = \frac{9 + 3 + 0 + 0}{12} = 1,$$

y se concluye que π es irreducible. (Una mirada a la tabla de caracteres en el Ejemplo (3.28) confirma que $\pi \sim \pi_4$.) \diamond

► Del Ejemplo 3.36, se puede notar que si σ es una representación irreducible de un subgrupo H , la representación inducida σ^G de G puede ser reducible o irreducible, según el caso. Esto da lugar a una construcción interesante: es posible fabricar representaciones irreducibles de un grupo G al inducir las representaciones irreducibles de alguno de sus subgrupos, aunque se requiere algún criterio extra para decidir si una representación inducida es irreducible o no.⁵

Es interesante comparar una representación inducida de G con otras de sus representaciones. La clave para tal comparación es el siguiente teorema de **reciprocidad de Frobenius**. Para simplificar el argumento, conviene tomar $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y suponer que todas las representaciones son unitarias.⁶ Sin embargo, al emplear la versión alternativa (3.13b)

⁵Hay un criterio general, debido a George Mackey, que dice que σ^G es irreducible si y solo si σ es irreducible y para cada $s \in G \setminus H$, las representaciones $h \mapsto \sigma(k)$ y $k \mapsto \sigma(sks^{-1})$ del subgrupo $H \cap sHs^{-1}$ tienen caracteres ortogonales. Véase la sección 7.4 del libro de Serre.

⁶Se debe recordar que cualquier representación compleja de un grupo finito G puede considerarse unitaria, al dotar el espacio de la representación con un producto escalar G -invariante.

del producto escalar, se puede verificar fácilmente que la demostración es válida con cualquier cuerpo \mathbb{F} tal que $\text{char } \mathbb{F}$ no divide $|G|$, sin imponer la condición de unitariedad.

Teorema 3.38 (Frobenius). *Sean $\pi : G \rightarrow \text{U}(V)$ y $\sigma : H \rightarrow \text{U}(W)$ dos representaciones unitarias de un grupo finito G y de un subgrupo $H \leq G$, respectivamente. Entonces*

$$\langle \chi_{\sigma^G} \mid \chi_\pi \rangle_G = \langle \chi_\sigma \mid \chi_{\pi_H} \rangle_H \quad (3.29)$$

donde $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_G$ y $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_H$ son los respectivos productos escalares en $F_c(G, \mathbb{C})$ y $F_c(H, \mathbb{C})$.

Demostración. Sean $\{1, g_2, \dots, g_m\}$ unos representantes de las coclases en G/H . La igualdad (3.29) se verifica por un cálculo directo, a partir de la definición (3.13a) del producto escalar y la fórmula (3.28) para χ_{σ^G} :

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\sigma^G} \mid \chi_\pi \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \overline{\chi_{\sigma^G}(k)} \chi_\pi(k) = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \sum_{i: g_i^{-1}kg_i \in H} \overline{\chi_\sigma(g_i^{-1}kg_i)} \chi_\pi(k) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^m \sum_{k \in g_i H g_i^{-1}} \overline{\chi_\sigma(g_i^{-1}kg_i)} \chi_\pi(k) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^m \sum_{h \in H} \overline{\chi_\sigma(h)} \chi_\pi(g_i h g_i^{-1}) \\ &= \frac{m}{|G|} \sum_{h \in H} \overline{\chi_\sigma(h)} \chi_\pi(h) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \overline{\chi_\sigma(h)} \chi_\pi(h) = \langle \chi_\sigma \mid \chi_{\pi_H} \rangle_H. \end{aligned}$$

La cuarta igualdad es válida porque χ_π es una función de clase sobre H . En los primeros cuatro sumatorias,⁷ el número de términos es $|G| = m|H|$ y en las dos últimas el número de términos es $|G|/m = |H|$, así que en ningún caso hay sobreconteo de términos. \square

La fórmula (3.29) tiene relevancia inmediata con la determinación de las representaciones del grupo G . Si $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ son las representaciones irreducibles inequivalentes del subgrupo H , se sabe por (3.14) que $\pi_H \sim k_1\sigma_1 \oplus k_2\sigma_2 \oplus \dots \oplus k_s\sigma_s$, donde $k_i := \langle \chi_{\sigma_i} \mid \chi_{\pi_H} \rangle_H$ para $i = 1, \dots, s$. En consecuencia, vale

$$\langle \chi_{\sigma_i^G} \mid \chi_\pi \rangle_G = \langle \chi_{\sigma_i} \mid \chi_{\pi_H} \rangle_H = k_i \quad \text{para } i = 1, \dots, s.$$

Por lo tanto, si σ_i es una subrepresentación de π_H con multiplicidad k_i , entonces σ_i^G es una subrepresentación de π , con la misma multiplicidad k_i .

► Una segunda demostración del Teorema 3.38 es la siguiente. Si $\sigma \sim j_1\sigma_1 \oplus \dots \oplus j_s\sigma_s$ y $\pi_H \sim k_1\sigma_1 \oplus \dots \oplus k_s\sigma_s$ son descomposiciones de σ y π_H en representaciones irreducibles de H , entonces $\langle \chi_\sigma \mid \chi_{\pi_H} \rangle_H = j_1k_1 + \dots + j_s k_s$. En vista del Lema de Schur, esta es

⁷Fíjese que $g_i H g_i^{-1}$ es un subgrupo de G , conjugado de H , así que $|g_i H g_i^{-1}| = |H|$.

la dimensión del espacio \mathbb{F} -vectorial $\text{Hom}_H(W, \text{Res}_H^G V)$, donde W es un H -módulo mediante la representación σ y $\text{Res}_H^G V$ denota el espacio vectorial V considerado como H -módulo bajo la representación π_H .

Denótese también $\text{Ind}_H^G W := W \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$ el espacio vectorial de la representación inducida σ^G , considerado como un G -módulo. Si $\sigma^G \sim m_1\pi_1 \oplus \cdots \oplus m_r\pi_r$ y $\pi \sim n_1\pi_1 \oplus \cdots \oplus n_r\pi_r$ son las descomposiciones respectivas de σ^G y π en irreducibles de G , entonces $\langle \chi_{\sigma^G} | \chi_\pi \rangle_G = m_1n_1 + \cdots + n_r m_r = \dim \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G W, V)$. Para mostrar la igualdad de estas dimensiones son iguales, basta comprobar la existencia de un isomorfismo \mathbb{F} -lineal:

$$\text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G W, V) \simeq \text{Hom}_H(W, \text{Res}_H^G V). \quad (3.30)$$

Pero esto es una consecuencia inmediata de la Proposición 3.34, al reemplazar π por σ^G y V por $\text{Ind}_H^G W$; y al reemplazar τ y U por π y $\text{Res}_H^G V$, respectivamente.

[[El isomorfismo (3.30) tiene una interpretación categórica. Si $G\text{-Mod}$ denota la categoría de G -módulos (es decir, módulos a izquierda para el álgebra de grupo $\mathbb{F}[G]$), cuyos morfismos son aplicaciones entrelazantes para dos representaciones de G , y si $H\text{-Mod}$ es la categoría análoga de H -módulos, entonces la restricción y la inducción son dos *funtores* $\text{Res}_H^G: G\text{-Mod} \rightarrow H\text{-Mod}$ e $\text{Ind}_H^G: H\text{-Mod} \rightarrow G\text{-Mod}$. El isomorfismo (3.30) indica que estos son *funtores adjuntos* – más precisamente, Ind_H^G es un “adjunto a izquierda” de Res_H^G ; y Res_H^G es un “adjunto a derecha” de Ind_H^G .]]

► La representaciones inducidas tienen una interpretación alternativa desde el punto de vista de módulos sobre \mathbb{F} -álgebras. Se debe recordar el concepto de un módulo a izquierda M sobre una anillo R , en la Definición 1.10. Esta es una función $R \times M \rightarrow M : (a, x) \mapsto ax$ tal que $a(bx) = (ab)x$, $1x = x$ que satisface dos leyes distributivas: Si M es un espacio \mathbb{F} -vectorial y R es una \mathbb{F} -álgebra, las leyes distributivas dicen que $(a, x) \mapsto ax$ es \mathbb{F} -bilineal.

De modo similar, se puede definir un *R-módulo a derecha*: un grupo abeliano N (un espacio \mathbb{F} -vectorial si R es una \mathbb{F} -álgebra) con una función $N \times R \rightarrow N : (y, b) \mapsto yb$ tal que, para $b, c \in R$ y $y, z \in N$:

$$\begin{aligned} (y + z)b &= yb + zb, & (yb)c &= y(bc), \\ y(b + c) &= yb + yc, & y1 &= y. \end{aligned}$$

Definición 3.39. Si R y S son dos anillos, un **R - S -bimódulo** es un grupo abeliano M que es simultáneamente un R -módulo a izquierda y un S -módulo a derecha, en donde las dos acciones cumplen la siguiente condición de compatibilidad:

$$(ax)b = a(xb) \quad \text{para todo } x \in M, a \in R, b \in S.$$

Luego se puede escribir $axb := (ax)b = a(xb)$, sin ambigüedad.

Si A y B son \mathbb{F} -álgebras, un **A - B -bimódulo** es un espacio \mathbb{F} -vectorial V en donde se exige además⁸ que las aplicaciones $(a, x) \mapsto ax$ y $(x, b) \mapsto xb$ sean \mathbb{F} -bilineales. \diamond

Definición 3.40. Sean A y B dos \mathbb{F} -álgebras, V un A - B -bimódulo y W un B - C -bimódulo. Sea Z el subespacio \mathbb{F} -vectorial de $V \otimes_{\mathbb{F}} W$ generado por los tensores $(xb \otimes y - x \otimes by)$ para todo $X \in V$, $y \in W$, $b \in B$; y denótese por $x \bar{\otimes} y$ la coclase de $x \otimes y$ en el espacio vectorial cociente.

El espacio \mathbb{F} -vectorial $V \otimes_B W := (V \otimes_{\mathbb{F}} W)/Z$ es un A - C -bimódulo, con las siguientes operaciones e igualdades:

$$a(x \bar{\otimes} y) := ax \bar{\otimes} y, \quad (x \bar{\otimes} y)c := x \bar{\otimes} yc, \quad xb \bar{\otimes} y = x \bar{\otimes} by.$$

Dícese que $V \otimes_B W$ es el **producto tensorial sobre B** de V y W . \diamond

[[Por un abuso de notación, se suele escribir $x \otimes y$ simplemente, en vez de $x \bar{\otimes} y$, para denotar elementos de $V \otimes_B W$; la última igualdad se transcribe en $xb \otimes y = x \otimes by$, la cual se entiende como una regla de compatibilidad de las dos acciones internas de B .]]

Hay diversos casos particulares de esta construcción, al tomar A , B o C igual a \mathbb{F} :

- \diamond si $A = \mathbb{F}$, V es un B -módulo a derecha y $V \otimes_B W$ es un C -módulo a derecha;
- \diamond si $B = \mathbb{F}$, entonces el producto tensorial ordinario $V \otimes_{\mathbb{F}} W$ de un A -módulo a izquierda V con un C -módulo a derecha W es un A - C -bimódulo;
- \diamond si $C = \mathbb{F}$, W es un C -módulo a izquierda y $V \otimes_B W$ es un A -módulo a izquierda.

Ahora bien, sea G un grupo finito y H un subgrupo de G . Las álgebras de grupo $A = \mathbb{F}[G]$ y $B = \mathbb{F}[H]$ cumplen $B \subset A$ con $\dim_{\mathbb{F}}(A/B) = m = [G:H]$. Además $\mathbb{F}[G]$ es obviamente un $\mathbb{F}[G]$ - $\mathbb{F}[H]$ -bimódulo, por la extensión lineal del producto (*¡asociativo!*) gxh de dos elementos de G y uno de h . De modo similar, $\mathbb{F}[G]$ es también un $\mathbb{F}[H]$ - $\mathbb{F}[G]$ -bimódulo. Con este lenguaje, es un ejercicio de notaciones comprobar las siguientes isomorfismos:

- (a) si V es un G -módulo, entonces $\text{Res}_H^G V \simeq \mathbb{F}[H] \otimes_{\mathbb{F}[G]} V$ como H -módulos;
- (b) si W es un H -módulo, entonces $\text{Ind}_H^G W \simeq \mathbb{F}[G] \otimes_{\mathbb{F}[H]} W$ como G -módulos.

Esta observación permite transferir el concepto de representación inducida a la categoría de \mathbb{F} -álgebras más generales.

⁸La distinción entre estas dos nociones de bimódulos es simplemente la elección de una categoría apropiada: la de bimódulos sobre anillos o la de bimódulos sobre \mathbb{F} -álgebras.

3.5 Ejercicios de representaciones de grupos

En estos ejercicios, G denota un grupo finito; \mathbb{F} es un cuerpo tal que $\text{char } \mathbb{F}$ no divide $|G|$; U, V, W son espacios \mathbb{F} -vectoriales de dimensión finita. En general, $\pi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ es una representación de G y χ_{π} es su carácter. Los caracteres de las representaciones unitarias irreducibles de G se denotan por $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r$.

Cuando $H \leq G$ es un subgrupo, se escribe $G/H = \{g_1H, g_2H, \dots, g_mH\}$ con $g_1 = 1$. En tal caso, $\pi_H = \text{Res}_H^G(\pi)$ denota la restricción de π a una representación de H ; y si $\sigma: H \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(W)$ es una representación de H , $\sigma^G = \text{Ind}_H^G(\sigma)$ denota su inducción a una representación de G .

Ejercicio 3.1. Si $\pi: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ y $\sigma: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(W)$ son dos representaciones de G , defínase $\rho(g)T := \sigma(g) \circ T \circ \pi(g^{-1})$ para $g \in G$ y $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. Comprobar que ρ es una representación de G sobre $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Tomando en cuenta el isomorfismo $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \simeq V^* \otimes W$ de espacios \mathbb{F} -vectoriales, demostrar que hay una equivalencia de representaciones $\rho \sim \pi^* \otimes \sigma$.

Ejercicio 3.2. Si π y σ son dos representaciones de G sobre V y W , respectivamente, comprobar que $\pi \otimes \sigma \sim \sigma \otimes \pi$.

Ejercicio 3.3. Si $\pi: G \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ es una representación compleja unidimensional, demostrar que $\pi(g) \in \text{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ para todo $g \in G$.

Ejercicio 3.4. Mostrar que existe una representación $\pi: S_3 \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$ dado por

$$(12) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (123) \mapsto \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

[[Indicación: como $S_3 \simeq \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, ba = a^2b \rangle$, solo es necesario comprobar que $\pi(a)$ y $\pi(b)$ cumplen las mismas relaciones que a y b .]]

Comprobar que esta representación es equivalente a la representación irreducible π_2 de S_3 sobre el plano $x + y + z = 0$ en \mathbb{R}^3 .

Ejercicio 3.5. Si $C_n = \{1, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ es el grupo cíclico de n elementos, considérese las dos representaciones complejas λ y π de C_n sobre \mathbb{C}^n determinadas por

$$\begin{aligned} \lambda(g) &:= E_{21} + E_{32} + \dots + E_{n,n-1} + E_{1n} \in M_n(\mathbb{C}), \\ \pi(g) &:= \text{diag}[1, e^{2\pi i/n}, e^{4\pi i/n}, \dots, e^{2(n-1)\pi i/n}]. \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $n = 4$,

$$\lambda(g) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi(g) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Encontrar una matriz invertible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tal que $P \lambda(g^k) P^{-1} = \pi(g^k)$ para cada $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Concluir que las representaciones λ y π son equivalentes.

Ejercicio 3.6. Si N es un subgrupo normal de G y si $\eta: G \rightarrow G/N$ es el homomorfismo cociente, comprobar que la correspondencia $\sigma \mapsto \sigma \circ \eta$ es una biyección entre representaciones σ de G/N y representaciones de G cuyas restricciones a N son triviales.

Si $N = G' := \langle ghg^{-1}h^{-1} : g, h \in G \rangle$ es el subgrupo conmutador, el grupo cociente G/G' es abeliana. Concluir que hay una biyección entre las representaciones de rango uno $\pi: G \rightarrow \mathbb{F}^\times$ y los homomorfismos $\varphi: G/G' \rightarrow \mathbb{F}^\times$.

Ejercicio 3.7. Sea $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ el grupo de cuaterniones (véase el Ejercicio 1.2). Hallar el subgrupo conmutador Q' y mostrar que $Q/Q' \simeq C_2 \times C_2$. Deducir, si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, que Q tiene exactamente cinco representaciones irreducibles inequivalentes.

Exhibir una representación irreducible compleja de Q , de rango 2.

Ejercicio 3.8 (Representación por permutaciones). Si G actúa sobre un conjunto finito X , sea V el espacio \mathbb{F} -vectorial con una base $\{v_x : x \in X\}$, de modo que $\dim V = |X|$, y defínase una representación $\sigma: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ por $\sigma(g): v_x \mapsto v_{g \cdot x}$.

Comprobar que el vector $u := \sum_{x \in X} v_x \in V$ genera un subespacio G -invariante de dimensión 1. Concluir que σ no es irreducible si $|X| > 1$.

Ejercicio 3.9. Hallar la tabla de caracteres para el grupo abeliano $V \simeq C_2 \times C_2$, de 4 elementos.

Ejercicio 3.10. Demostrar que g y g^{-1} son conjugados en G si y sólo si $\chi_j(g) \in \mathbb{R}$ para todo carácter χ_j de una representación unitaria irreducible de G .

Ejercicio 3.11. Si π y σ son representaciones irreducibles de G , su producto tensorial $\pi \otimes \sigma$ generalmente es reducible. Si π_3 es la representación estándar de S_3 (irreducible de grado 2), demostrar que $\pi_3 \otimes \pi_3 \sim \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \pi_3$. [Indicación: examinar sus caracteres.]

Ejercicio 3.12. Sea π una representación por permutaciones (Ejercicio 3.8) de G definido por una acción de G sobre un conjunto finito X , esto es, $\pi(g): v_x \mapsto v_{g \cdot x}$.

- (a) Comprobar que $\chi_\pi(g)$ es el número de puntos fijos en X bajo la acción de $g \in G$.
- (b) Demostrar que $n_1 = \langle \chi_1 | \chi_\pi \rangle$ es el número de órbitas de esta acción sobre X .

Ejercicio 3.13. Sean C_1, \dots, C_r las clases conjugadas del grupo finito G . Defínase $z_k := \sum_{h \in C_k} h \in \mathbb{C}[G]$; esta es la suma de todos los elementos de la clase C_k . Mostrar que $gz_k = z_k g$ en $\mathbb{C}[G]$ para todo $g \in G$.

Por otro lado, si $c \in \mathbb{C}[G]$ satisface $gc = cg$ para todo $g \in G$, demostrar que hay escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ tales que $c = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_r z_r$. Concluir que el centro $Z(\mathbb{C}[G])$ del álgebra de grupo es un espacio \mathbb{C} -vectorial con base $\{z_1, \dots, z_r\}$.

Ejercicio 3.14. Sea Q el grupo de cuaterniones (Ejercicio 3.7) y sea D_4 el grupo diedral de 8 elementos (Ejemplo 3.27).

- (a) Hallar todas las clases conjugadas de Q . Explicar por qué los grupos Q y D_4 no son isomorfos, aunque tengan igual número de clases conjugadas con los mismos tamaños.
- (b) Construir las tablas de caracteres de Q , mostrando que tiene las mismas entradas que la tabla de D_4 . (Por lo tanto, los caracteres no determinan el grupo hasta isomorfismo, en general.)

Ejercicio 3.15. Sea $\zeta := e^{2\pi i/n} = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$, una raíz n -ésima de 1. Usar las relaciones de ortogonalidad de Schur para mostrar que

$$1 + \zeta^k + \zeta^{2k} + \dots + \zeta^{(n-1)k} = \begin{cases} n & \text{si } k \equiv 0 \pmod{n}, \\ 0 & \text{si } k \not\equiv 0 \pmod{n}. \end{cases}$$

Ejercicio 3.16. Considérese las siguientes dos representaciones reales irreducibles de S_4 sobre \mathbb{R}^3 :

- (a) S_4 actúa *por rotaciones* del cubo con vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Nótese que S_4 permuta las cuatro diagonales largas del cubo.
- (b) S_4 actúa *por rotaciones y reflexiones* del tetraedro regular con vértices $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$ y $(1, 1, 1)$; el subgrupo A_4 actúa por rotaciones solamente. Por ejemplo, la reflexión $x \leftrightarrow y$ en el plano vertical $x = y$ transpone los primeros dos vértices. Nótese que S_4 permuta los cuatro vértices del tetraedro.

Demostrar que estas dos representaciones no son equivalentes. [[Indicación: Basta calcular $\chi_\pi(g)$ para una transposición $g = (ij) \in S_4$ en los dos casos.]]

Ejercicio 3.17. Un k -ciclo en S_n permuta cíclicamente k números en $\{1, 2, \dots, n\}$ y deja fijos los demás. El k -ciclo $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_k \rightarrow a_1$ se denota por $(a_1 a_2 \dots a_k)$. Cada elemento de S_n es un producto de ciclos disjuntos.

- (a) Si $s \in S_n$, mostrar que $s(a_1 a_2 \dots a_k)s^{-1} = (b_1 b_2 \dots b_k)$ donde cada $b_i = s(a_i)$.
- (b) Concluir que dos elementos de S_n son conjugados si y solo si son productos de igual número de ciclos de las mismas longitudes.
- (c) Describir todas las clases conjugadas de los grupos S_4 y S_5 . En cada caso, basta encontrar un elemento en cada clase y calcular la cardinalidad de la clase.

Ejercicio 3.18. El grupo G permuta las coclases en G/H por $g \cdot g_i H := g g_i H$. Sea $\pi(g) \in \text{GL}(m, \mathbb{F}) = \text{GL}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^m)$ la matriz de esta permutación. Comprobar que π es una representación de G y que $\pi \sim (\sigma_1)^G$, donde σ_1 es la representación trivial de H .

Ejercicio 3.19. Lo que sigue es una descripción matricial de la representación σ^G .

Sea $B(h) \in M_n(\mathbb{F})$ la matriz de $\sigma(h)$ con respecto a una base $\{y_1, \dots, y_n\}$ de W . Sea $A(k) \in M_{mn}(\mathbb{F})$, para $k \in G$, una matriz de $m \times m$ bloques, cada bloque de tamaño $n \times n$, donde el bloque $A_{ij}(k) \in M_n(\mathbb{F})$ se define por

$$A_{ij}(k) := \begin{cases} B(g_i^{-1} k g_j) & \text{si } g_i^{-1} k g_j \in H, \\ 0 & \text{si } g_i^{-1} k g_j \notin H. \end{cases}$$

Verificar que $\pi: k \mapsto A(k) : G \rightarrow \text{GL}(mn, \mathbb{F})$ es una representación de G sobre \mathbb{F}^{mn} y demostrar que $\pi \sim \sigma^G$.

Ejercicio 3.20. Usar la descripción matricial de σ^G en el Ejercicio 3.19 para verificar la fórmula de Frobenius para el carácter de una representación inducida.

Ejercicio 3.21. Hallar la tabla de caracteres de S_4 , mediante los pasos que siguen:

- (a) Hallar representantes para las clases conjugadas de S_4 , usando el Ejercicio 3.17.
- (b) Verificar que S_4 tiene un subgrupo normal V tal que $S_4/V \simeq S_3$. Concluir que S_4 tiene tres representaciones irreducibles π_1 (trivial), π_2 (signo), y π_3 , de grados respectivos 1, 1, 2.
- (c) Mostrar que S_4 tiene otras dos representaciones irreducibles, π_4 y π_5 , ambos de grado 3; y que $\pi_5 \sim \pi_4 \otimes \pi_2$.
- (d) Usar la ortogonalidad de filas y/o columnas para rellenar la tabla de S_4 .

Ejercicio 3.22. Supóngase que H sea un subgrupo *abeliano* de G , con $[G:H] = m$.

- (a) Si π es una representación irreducible de G , demostrar que el grado de π no puede ser mayor que m . [Indicación: usar la reciprocidad de Frobenius.]
- (b) Concluir que todas las representaciones irreducibles del grupo diédrico de orden $2n$, $D_n := \langle a, b : a^n = b^2 = 1, ba = a^{-1}b \rangle$, tienen grado 1 o 2.
- (c) Calcular los caracteres de las representaciones de D_7 de grado 2 inducidas por representaciones del subgrupo C_7 y determinar así la tabla de caracteres de D_7 .

Ejercicio 3.23. En el caso $G = S_4$ y $H = S_3$, se sabe que las tres representaciones inducidas $\sigma_1^G, \sigma_2^G, \sigma_3^G$ tienen grados 4, 4 y 8 respectivamente y por tanto no son irreducibles de S_4 . En términos de las representaciones unitarias irreducibles π_j de S_4 ya identificadas en el Ejercicio 3.21, usar la reciprocidad de Frobenius para comprobar estas equivalencias:

$$\sigma_1^G \sim \pi_1 \oplus \pi_5, \quad \sigma_2^G \sim \pi_2 \oplus \pi_4, \quad \sigma_3^G \sim \pi_3 \oplus \pi_4 \oplus \pi_5.$$

Una acción de un grupo finito G sobre un conjunto finito X es **transitiva** si tiene una sola órbita: para $x, y \in X$, hay algún $h \in G$ tal que $h \cdot x = y$. Sea $\sigma_X: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(V_X)$ la representación por permutaciones de G determinado por una acción de G sobre X (Ejercicios 3.8 y 3.12).

G también actúa sobre $Z := \{(x, y) \in X \times X : x \neq y\}$ por $g \triangleright (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y)$; si esta acción de G sobre Z es transitiva, se dice que la acción original sobre X es **doblemente transitiva**.

Ejercicio 3.24. Si H es un subgrupo de G , sea $X = G/H$ con la acción $g \cdot (kH) := gkH$. Demostrar que la representación $\pi = \sigma_{G/H}$ está inducida por la representación trivial σ_1 de H ; es decir, $\pi = \text{Ind}_H^G(\sigma_1)$.

Ejercicio 3.25. Sea $\pi = \sigma_X$ y $\rho = \sigma_Z$ las representaciones por permutaciones que corresponde a las acción de G sobre X y Z .

- (a) Si la acción sobre X es transitiva, demostrar que $\langle \chi_\pi | \chi_\pi \rangle = 1 + \langle \chi_1 | \chi_\rho \rangle$, donde χ_1 denota el carácter de la representación trivial. Concluir que $\langle \chi_\pi | \chi_\pi \rangle = 2$ si y solo si la acción de G sobre X es doblemente transitiva.
- (b) Defínase $\tau: G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{F}}(U)$ por $\tau(g) := \pi(g)|_U$ donde el hiperplano $U \leq V_X$ se define por $\sum_{x \in X} \alpha_x v_x \in U$ si y solo si $\sum_{x \in X} \alpha_x = 0$. Si la acción de G sobre X es doblemente transitiva, demostrar que τ es irreducible.

Ejercicio 3.26. Sea G el **grupo de Heisenberg** sobre el cuerpo finito \mathbb{F}_p , con p primo. Sus elementos son las matrices triangulares

$$[a, b, c] \equiv \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_p), \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{F}_p.$$

- (a) Mostrar que las clases conjugadas de G son los singuletes $\{[0, 0, c]\}$ y las partes $C_{a,b} := \{[a, b, c] : c \in \mathbb{F}_p\}$.
- (b) Demostrar que $G/Z(G) \simeq C_p \times C_p$. Si ψ_1, \dots, ψ_p son los caracteres irreducibles de C_p , mostrar que $\chi_{ij}([a, b, c]) := \psi_i(a)\psi_j(b)$ son p^2 caracteres irreducibles de G .
- (c) Si $H := \{[0, b, c] : b, c \in \mathbb{F}_p\}$, comprobar $H \simeq C_p \times C_p$. Sea $\sigma_k([0, b, c]) := \psi_k(c)$ para $k = 2, \dots, p$; y sea $\pi_k := \text{Ind}_H^G(\sigma_k)$ la representación inducida de G . Verificar que el carácter $\tilde{\chi}_k$ de π_k está dado por $\tilde{\chi}_k([a, b, c]) = p \psi_k(c) \llbracket a = b = 0 \rrbracket$. Concluir que los χ_{ij} y los $\tilde{\chi}_k$ son todos los caracteres irreducibles de G .

4 Representaciones del grupo S_n

La teoría general de representaciones de grupos finitos y la construcción de tablas de caracteres son suficientes para obtener todas las representaciones irreducibles de grupos de bajo orden, como ya fue ejemplificado en el capítulo anterior y sus ejercicios. Sin embargo, el estudio de las representaciones de familias de grupos finitos, o bien de grupos infinitos de matrices, exige el empleo de técnicas algebraicas más extensas y sofisticadas. En este capítulo se concentra el esfuerzo en la familia de los grupos de permutaciones S_n , para cualquier $n \in \mathbb{N}^*$. Salvo mención explícita de lo contrario, el cuerpo de base será \mathbb{C} .

En la construcción de las tablas de caracteres para un grupo finito G cualquiera, se ha visto que estas tablas son arreglos cuadrados porque (Corolario 3.24) la cantidad de representaciones irreducibles inequivalentes coincide con el número de sus clases conjugadas. Desafortunadamente, no se conoce una correspondencia biunívoca entre representaciones y clases, aplicable a todos los grupos finitos. Los grupos de permutaciones forman una excepción importante: para ellos las clases conjugadas y las representaciones irreducibles están etiquetadas por un mismo objeto combinatorio: el número de particiones $p(n)$ del entero positivo n .

La primera tarea, entonces, es describir las clases conjugadas del grupo S_n .

Definición 4.1. Sea $n \in \mathbb{N}^*$ un número entero positivo. Denótese por $[n]$ el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Al expresar $[n]$ como unión disjunta de partes no vacías, sus cardinalidades quedan entre 1 y n . Una **partición de n** es una lista ordenada $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ de enteros positivos tales que:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n, \quad \text{con} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k. \quad (4.1)$$

Se escribe $\underline{\lambda} \vdash n$ para decir que λ es una partición de n . La cantidad $p(n)$ de tales λ es el *número de particiones de n* .¹ \diamond

Así, por ejemplo, $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$, por lo que $p(3) = 3$. También,

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

$$6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 4 + 1 + 1 = 3 + 3 = 3 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 + 1$$

$$= 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

¹No se conoce una “forma cerrada” para expresar $p(n)$, pero sí se conoce su función generatriz, $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty} 1/(1 - q^k)$. Véase, por ejemplo, el capítulo 11 del libro: George E. Andrews, Richard Askey y Ranjan Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

Luego, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$, $p(6) = 11$. El número $p(n)$ crece rápidamente con n ; por ejemplo, $p(20) = 627$. Esta es una función destacada en la teoría de números.

Las tres particiones de 3 son $\lambda = (3)$, $(2, 1)$ y $(1, 1, 1)$.

Las cinco particiones de 4 son $\lambda = (4)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 1, 1)$ y $(1, 1, 1, 1)$.

Las particiones de 3, 4, 5 y 6 están desplegadas **en orden lexicográfico**: Si $\lambda \vdash n$ y $\mu \vdash n$, se toma $\lambda > \mu$ si es primer valor no cero de $\lambda_i - \mu_i$ es positivo. Este es obviamente una orden total entre las $p(n)$ particiones de n .

► Una permutación $\sigma \in S_n$ puede expresarse, de manera única, como un *producto de ciclos disjuntos*:

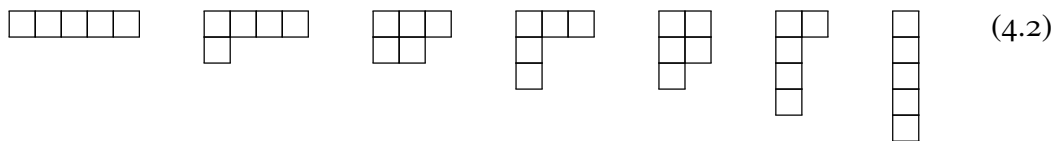
$$\sigma = (i_1 i_2 \dots i_r)(j_1 j_2 \dots i_s) \cdots (l_1 l_2 \dots l_u).$$

Estos ciclos conmutan entre sí, por ende su orden de composición es irrelevante. Si $\tau \in S_n$, entonces $\tau(i_1 i_2 \dots i_r)\tau^{-1} = (i'_1 i'_2 \dots i'_r)$ donde $i'_1 = \tau(i_1)$, \dots , $i'_r = \tau(i_r)$. En consecuencia, $\tau\sigma\tau^{-1}$ es otro producto de ciclos, con las mismas longitudes que los ciclos de σ . La *clase conjugada* de σ se caracteriza, entonces, por el número y las cardinalidades de los ciclos que lo componen. Si se ordena el producto tal que $r \geq s \geq \dots \geq u$, este dato es una partición $\lambda = (r, s, \dots, u) \vdash n$.

En resumen: *las clases conjugadas de S_n están en correspondencia biunívoca con las particiones $\lambda \vdash n$.*

Definición 4.2. Es posible desplegar una partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ de n , por un artificio combinatorio llamado su **diagrama de Young**.² Este es un arreglo rectangular incompleta de casillas cuadradas, con k filas, que tiene λ_i casillas en la fila i , justificadas a la izquierda. Las filas se ordenan de arriba hacia abajo (el convenio inglés). Alternativamente, se pueden ordenar de abajo hacia arriba (el convenio francés), en cuya caso se llaman *diagramas de Ferrers*. ◇

Estas son los diagramas de Young para las siete particiones de 5:



Se puede notar que la reflexión en la diagonal principal (de noroeste hacia sureste) aplicada a cualquier diagrama para λ produce otro diagrama para λ' , la llamada **partición dual** de λ . (Se puede notar que cada λ'_i es el número de términos λ_j con $\lambda_j \geq i$, así que la correspondencia $\lambda \leftrightarrow \lambda'$ no requiere el apoyo visual de los diagramas.)

²Los diagramas de Young fueron introducidos al inicio del siglo XX en el artículo: Alfred Young, “On quantitative substitutional analysis”, *Proceedings of the London Mathematical Society* **33** (1900), 97–145.

A veces se adopta una notación abreviada para denotar las particiones:

$$\lambda = (m_1^{a_1}, m_2^{a_2}, \dots, m_r^{a_r}), \quad \text{con } m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r,$$

donde $a_1 m_1 + \dots + a_r m_r = n$ en vista de (4.1), se refiere a la partición de n con a_1 copias de m_1 , a_2 instancias de m_2 , etcétera. Así, las particiones de 5 ilustradas en (4.2) se denotan por (5), (4, 1), (3, 2), (3, 1²), (2², 1), (2, 1³), (1⁵), en orden lexicográfico.

► Las particiones $\lambda \vdash n$ corresponden a las $p(n)$ columnas de la tabla de caracteres del grupo S_n . Por el Corolario 3.24, ya se sabe que esta tabla tiene $p(n)$ filas. La tarea por delante es obtener un algoritmo que asocia a cada partición λ un S_n -módulo V_λ . Antes de abordar ese algoritmo, conviene examinar con más detalle el álgebra de grupo $\mathbb{C}[S_n]$.

4.1 La dualidad de Schur y Weyl

Definición 4.3. Sea V un espacio \mathbb{C} -vectorial finitodimensional. Para cualquier parte $A \subseteq \text{End}_{\mathbb{C}} V$, el conjunto

$$A' := \{ b \in \text{End}_{\mathbb{C}} V : ba = ab \text{ para todo } a \in A \}$$

es una \mathbb{C} -subálgebra de $\text{End}_{\mathbb{C}} V$ (cuya identidad es 1_V); este es el **conmutante** de A en $\text{End}_{\mathbb{C}} V$.

El **biconmutante** de A en $\text{End}_{\mathbb{C}} V$ es

$$A'' := (A')' = \{ c \in \text{End}_{\mathbb{C}} V : bc = cb \text{ para todo } b \in A' \},$$

la cual es una \mathbb{C} -subálgebra tal que $A \subseteq A''$.

Si A y B son dos partes de $\text{End}_{\mathbb{C}} V$, entonces $A \subseteq B$ implica $B' \subseteq A'$ y $A'' \subseteq B''$.
 [[Nótese que $(A'')' = (A')'' = A'$: no hace falta definir un “triconmutante”.]]

Proposición 4.4. Sea V un espacio \mathbb{C} -vectorial finitodimensional y sea $A \subseteq \text{End}_{\mathbb{C}} V$ una \mathbb{C} -subálgebra con identidad 1_V . Si el A -módulo V es semisimple, entonces $A'' = A$.

Demostración. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V . Si $c \in A''$, basta encontrar $a \in A$ tal que $ae_i = ce_i$ para $i = 1, \dots, n$, pues esto implica $a = c$. Considérese el vector

$$e := (e_1, e_2, \dots, e_n) \in V \oplus V \oplus \dots \oplus V = V^{\oplus n} \cong nV,$$

en la notación de la Sección 2.1. Si $V \simeq V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ como suma directa de A -módulos simples, entonces $nV \simeq nV_1 \oplus \dots \oplus nV_k$ es también semisimple, bajo la acción “diagonal” $a \cdot (x_1, \dots, x_n) := (ax_1, \dots, ax_n)$.

Sea $U := A \cdot e = \{a \cdot e : a \in A\}$, un subespacio A -invariante de nV . Como nV es completamente reducible por la Proposición 2.5, hay otro subespacio A -invariante $W \leq nV$ tal que $nV \simeq U \oplus W$ como A -módulos. La proyección $P \in \text{End}_{\mathbb{C}}(nV)$ dada por $P(x + y) := x$ con imagen U y núcleo W conmuta con la acción diagonal de A . Al expresar P como matriz $P = [p_{ij}] \in \text{End}_{\mathbb{C}}(nV) = M_n(\text{End}_{\mathbb{C}} V)$, esto dice que $p_{ij} \in A'$ para cada i, j .

Luego, si $c \in A''$, entonces $c p_{ij} = p_{ij} c$ para cada i, j . La propiedad $P(e) = e$ entonces implica que

$$P(ce_1, \dots, ce_n) = (ce_1, \dots, ce_n),$$

así que $(ce_1, \dots, ce_n) \in \text{im } P = A \cdot e$. Esto dice que existe un elemento $a \in A$ tal que $(ae_1, \dots, ae_n) = (ce_1, \dots, ce_n)$, lo que había que demostrar. \square

Ahora sea A un álgebra finitodimensional *semisimple*, y sea V un A -módulo finitodimensional tal que $1 \in A$ actúa como 1_V sobre V ; dicho de otro modo, la representación $\pi: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} V$ es **fiel**, esto es, $\ker \pi = \{0\}$. Entonces el A -módulo V es también semisimple (por la Proposición 2.16) y el resultado anterior es aplicable al caso. Escribábase $B := A'$, así que $A = B'$ también. Sea

$$V \simeq \bigoplus_{j=1}^r U_j \otimes V_j \quad (4.3)$$

la descomposición de V en componentes isotípicos, dada por el Lema 2.6, donde V_1, \dots, V_r son los diversos A -módulos simples de A ; y cada U_j es el espacio \mathbb{C} -vectorial $U_j \equiv \text{Hom}_A(V_j, V)$. Nótese que $U_j = \{0\}$ si V_j no es isomorfo a un A -submódulo de V . \llbracket Esta es la fórmula (2.1) con algunos cambios de notación. \rrbracket El teorema de densidad (Teorema 2.10) y la fidelidad de π entonces dice que

$$A \simeq \bigoplus_{j=1}^r 1_{U_j} \otimes \text{End}_{\mathbb{C}} V_j. \quad (4.4)$$

Proposición 4.5. *El conmutante $B = A'$ en $\text{End}_{\mathbb{C}} V$ de la subálgebra semisimple A dada por (4.4) tiene la descomposición*

$$B \simeq \bigoplus_{j=1}^r \text{End}_{\mathbb{C}} U_j \otimes 1_{V_j} \quad (4.5)$$

y en consecuencia B es también semisimple.

Además, V es un módulo (a izquierda) para el álgebra $A \otimes B$, de tal manera que la fórmula (4.3) es su descomposición en $(A \otimes B)$ -submódulos simples no isomorfos.

Demostración. Dada la descomposición (4.4) del álgebra A , es evidente que el lado derecho de (4.5) es una subálgebra de A' ; y por simetría, el lado derecho de (4.4) es entonces una subálgebra de A'' . La igualdad $A = A''$, debido a la Proposición 4.4, muestra que el lado derecho de (4.5) es todo A' .

La semisimplicidad de B es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.16.

Las acciones de A y B sobre V conmutan, por lo tanto la receta $(a \otimes b)x := abx = bax$ se extiende por \mathbb{C} -linealidad a una representación del producto tensorial de \mathbb{C} -álgebras $A \otimes B$ sobre V . Bajo esta acción, los subespacios $U_j \otimes V_j$ son invariantes, en vista de (4.4) y (4.5). Fíjese que

$$\text{End}_{\mathbb{C}}(U_j \otimes V_j) \simeq \text{End}_{\mathbb{C}} U_j \otimes \text{End}_{\mathbb{C}} V_j = (\text{End}_{\mathbb{C}} U_j \otimes 1_{V_j})(1_{U_j} \otimes \text{End}_{\mathbb{C}} V_j),$$

así que estos $(A \otimes B)$ -submódulos son simples. Como los V_j son A -módulos no isomorfos entre sí, el resultado análogo es válido para los $U_j \otimes V_j$. \square

La fórmula (4.5) se puede simplificar en $B \simeq \bigoplus_{j=1}^r \text{End}_{\mathbb{C}} U_j$. Apelando nuevamente a la Proposición 2.16, se concluye que U_1, \dots, U_r son todos los B -módulos simples (hasta isomorfía) y que ellos son mutuamente no isomorfos. En consecuencia, la simetría entre las acciones de A y B no admite distinciones. Es evidente que $V_j \simeq \text{Hom}_B(U_j, V)$ también.

► Para obtener consecuencias para el grupo S_n de las consideraciones anteriores, se introducen a continuación dos acciones de grupo sobre un mismo espacio vectorial que conmutan entre sí. Una de ellas es una acción de S_n ; el otro es una acción de un grupo de matrices $\text{GL}(m, \mathbb{C})$ para algún $m \in \mathbb{N}^*$. Este no es un grupo finito, pero las proposiciones anteriores evitan la necesidad de obtener para este grupo un análogo al teorema de Maschke.³

Definición 4.6. Sea V un espacio \mathbb{C} -vectorial de dimensión finita m . Denótese el producto tensorial de n copias de V por $V^{\otimes n} \equiv V \otimes \dots \otimes V$ (n veces). El grupo $G = \text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ y el grupo finito S_n se representan sobre $V^{\otimes n}$ por estas dos acciones sobre tensores simples:

$$g \triangleright (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n) := gx_1 \otimes gx_2 \otimes \dots \otimes gx_n \quad \text{para } g \in G, \quad (4.6a)$$

$$s \cdot (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n) := x_{s^{-1}(1)} \otimes x_{s^{-1}(2)} \otimes \dots \otimes x_{s^{-1}(n)} \quad \text{para } s \in S_n. \quad (4.6b)$$

³El grupo de matrices $\text{GL}(m, \mathbb{C})$ es un **grupo algebraico**, es decir, puede ser definido mediante ecuaciones polinomiales. Una representación de un grupo algebraico G que también puede ser definido mediante ecuaciones polinomiales se llama *racional*. El grupo $\text{GL}(m, \mathbb{C})$ es **reductivo**, lo que significa que todos sus representaciones racionales son semisimples. Para la geometría algebraica que sustenta estas afirmaciones, véase el capítulo 7 del libro de Procesi.

Es evidente que estas representaciones conmutan: vale $s \cdot (g \triangleright \mathbf{x}) = g \triangleright (s \cdot \mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in V^{\otimes n}$, por linealidad. \diamond

Denótese por A el subespacio \mathbb{C} -vectorial de $\text{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n})$ generado por los operadores $\mathbf{x} \mapsto s \cdot \mathbf{x}$ con $s \in S_n$; de igual manera, sea B el subespacio generado por los operadores $\mathbf{x} \mapsto g \triangleright \mathbf{x}$ con $g \in \text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$. Entonces A y B son subálgebras de $\text{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n})$.

Además, $A = \pi(\mathbb{C}[S_n])$ donde $\pi: \mathbb{C}[S_n] \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n})$ es una representación fiel del álgebra de grupo $\mathbb{C}[S_n]$. Por el teorema de Maschke, el álgebra A es semisimple.

Teorema 4.7 (Schur y Weyl). $B = A'$ y $A = B'$ como subálgebras de $\text{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n})$.

Demostración. Está claro que $B \subseteq A'$ y $A \subseteq B'$ por (4.6); además, la Proposición 4.4 muestra que $A = A''$. Basta mostrar, entonces, que $A' \subseteq B$.

Sea $\{e_1, \dots, e_m\}$ una base vectorial de V . Si $I = (i_1, \dots, i_n) \in [m] \times \dots \times [m] \equiv [m]^n$ es un multiíndice, llámese $e_I := e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}$ al tensor simple correspondiente. Entonces $\{e_I : I \in [m]^n\}$ es una base vectorial de $V^{\otimes n}$, de cardinalidad m^n . Nótese que S_n permuta multiíndices mediante la acción

$$s \cdot (i_1, \dots, i_n) := (i_{s^{-1}(1)}, \dots, i_{s^{-1}(n)}), \quad \text{así que} \quad s \cdot e_I = e_{s \cdot I} \quad \text{para} \quad s \in S_n.$$

Cualquier operador $R \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n})$ tiene la matriz $[a_{I,J}]$ dada por $R(e_J) =: \sum_I a_{I,J} e_I$. Para $s \in S_n$, vale

$$s \cdot R(e_J) = \sum_{I \in [m]^n} a_{I,J} s \cdot e_I = \sum_{I \in [m]^n} a_{I,J} e_{s \cdot I}$$

mientras

$$R(s \cdot e_J) = R(e_{s \cdot J}) = \sum_{K \in [m]^n} a_{K,s \cdot J} e_K = \sum_{I \in [m]^n} a_{s \cdot I, s \cdot J} e_{s \cdot I}.$$

Por lo tanto, $R \in A'$ si y sólo si $a_{s \cdot I, s \cdot J} = a_{I,J}$ para todo $I, J \in [m]^n$, $s \in S_n$.

La forma \mathbb{C} -bilineal $(R, S) := \text{tr}(RS)$ sobre $\text{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n})$ es no degenerada. Es menos obvio que su restricción al subespacio A' es no degenerada. Para comprobarlo, escríbase $\pi(s) : \mathbf{x} \mapsto s \cdot \mathbf{x}$ y nótese que $R \in A'$ si y solo si $R\pi(s) = \pi(s)R$ para cada $s \in S_n$. Defínase el promedio de un operador bajo la acción de S_n por conjugación:

$$T^{\natural} := \frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} \pi(s) T \pi(s)^{-1}.$$

Nótese que $T^{\natural} \in A'$ y que $R^{\natural} = R$ para $R \in A'$; en otras palabras, $T \mapsto T^{\natural}$ es una proyección lineal de $\text{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n})$ sobre A' . Si $R \in A'$, entonces

$$(R, T^{\natural}) = \frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} \text{tr}(R \pi(s) T \pi(s)^{-1}) = \text{tr}(RT) = (R, T).$$

En consecuencia, si $(R, S) = 0$ para todo $S = T^q$ en A' , entonces $(R, T) = 0$ para todo $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n})$, lo cual implica que $R = 0$. Se ha comprobado que la forma bilineal simétrica $(R, S) \mapsto \text{tr}(RS)$ es no degenerada sobre A' .

Se sabe que $B \subseteq A'$; si fuera $B \neq A'$, entonces habría un operador $R \neq 0$ en A' tal que $\text{tr}(RS) = 0$ para todo $S \in B$; se debe mostrar que eso es imposible. Escribáse $\sigma(g) : x \mapsto g \triangleright x$; basta tomar $S = \sigma(g)$ para algún $g \in \text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$. La matriz $[b_{I,J}]$ de S , dada por $S(e_J) =: \sum_I b_{I,J} e_I$, tiene la forma

$$b_{I,J} = g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_n j_n}$$

en vista de (4.6a), donde $g = [g_{ij}]$ es una matriz invertible en $r\text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$.

La condición “ $\text{tr}(RS) = 0$ para todo g ” entonces se reduce a un sistema de ecuaciones para las entradas de la matriz de R :

$$\sum_{I,J} a_{J,I} g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_n j_n} = 0. \tag{4.7}$$

Esta es una ecuación polinomial de grado n en las m^2 entradas de la matriz g ; el polinomio se anula en el conjunto de matrices $\{g = [g_{ij}] \in M_m(\mathbb{C}) : \det[g_{ij}] \neq 0\}$, el cual es abierto y denso en $M_m(\mathbb{C})$, así que el polinomio se anula para g_{ij} cualesquiera.⁴

Ahora $b_{I,J}$ cumple la condición necesaria para que $S \in A'$, es decir, $b_{s \cdot I, s \cdot J} = b_{I,J}$ para todo I, J, s . Luego el sistema (4.7) tiene muchos términos repetidos. Para evitar repeticiones, llámese X al conjunto de órbitas de $[m]^n \times [m]^n$ bajo la acción de S_n dada por $s * (I, J) := (s \cdot I, s \cdot J)$; entonces la ecuación polinomial (4.7) se puede reorganizar como

$$\sum_x |S_n * x| \tilde{a}_x \tilde{b}_x = 0,$$

donde $|S_n * x|$ es la cardinalidad de la órbita x , $\tilde{a}_x := a_{J,I}$ y $\tilde{b}_x := b_{I,J}$ para $(I, J) \in S_n * x$; pero ahora los \tilde{b}_x son linealmente independientes. Se concluye que $\tilde{a}_x = 0$ para todo x , es decir, $a_{J,I} = 0$ para todo (I, J) , con lo cual $R = 0$. Se ha demostrado que $B = A'$. \square

Corolario 4.8. *Si V es un espacio \mathbb{C} -vectorial de dimensión finita, entonces*

$$V^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} U_{\lambda} \otimes V_{\lambda} \tag{4.8}$$

donde los V_{λ} no nulos son S_n -módulo irreducibles e inequivalentes; y los U_{λ} no nulos son $\text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ -módulo irreducibles e inequivalentes. Cada V_{λ} determina U_{λ} hasta isomorfismo y viceversa. \square

⁴Es posible evitar el uso de la topología del espacio euclidiano $M_m(\mathbb{C})$ mediante un poco de geometría algebraica: la clave es que $\text{GL}(m, \mathbb{C})$ es un “abierto de Zariski” en $M_m(\mathbb{C})$.

4.2 Los tableaux de Young

Las representaciones irreducibles V_λ del grupo simétrico S_n aparecen, con multiplicidades $d_\lambda = \dim V_\lambda$ cada una, en la representación regular de S_n . Para construirlas explícitamente, se debe examinar de cerca esa representación regular, es decir, se debe analizar en detalle el álgebra de grupo $\mathbb{C}[S_n]$.

Definición 4.9. Considérese el diagrama de Young para una partición fija λ de un entero positivo n . Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, el diagrama tiene n casillas, dispuestas en k filas de longitudes λ_j , con $j = 1, \dots, k$; estas casillas forman λ_1 columnas. Un **relleno** del diagrama coloca números enteros positivos en estas casillas.

Un **tableau** de Young, de forma λ , es un relleno del diagrama de Young para λ con los números $1, 2, \dots, n$, con entradas distintas. Este es un **tableau estándar** si las entradas en cada fila son crecientes (de izquierda a derecha) y las entradas en cada columna son crecientes (de arriba hacia abajo). Por ejemplo, la partición $(2, 1) \vdash 3$ da lugar a $3! = 6$ tableaux:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}$$

pero solo los primeros dos son estándares. Nótese que el grupo S_n actúa sobre los tableaux de forma λ de manera obvia, permutando sus entradas. \diamond

Definición 4.10. Dada una partición $\lambda \vdash n$, sea T un tableau de forma λ . Se definen dos subgrupos de S_n asociados a T :

- $\diamond P_T$ es el grupo de permutaciones de T que conservan cada fila;
- $\diamond Q_T$ es el grupo de permutaciones de T que conservan cada columna.

La única permutación que conserva filas y columnas a la vez es la identidad; luego, $P_T \cap Q_T = \{1\}$.

Fíjese que $|P_T| = \lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_k!$ y que $|Q_T| = \lambda'_1! \lambda'_2! \cdots \lambda'_l!$ donde $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_l)$.

Si sT es el tableau obtenido de T al aplicar la permutación s a sus entradas, los subgrupos asociados a sT son conjugados a los originales:

$$P_{sT} = s P_T s^{-1}, \quad Q_{sT} = s Q_T s^{-1}. \quad \diamond$$

Definición 4.11. A cada tableau de Young T con n casillas, se definen tres elementos del álgebra de grupo $\mathbb{C}[S_n]$:

$$a_T := \sum_{p \in P_T} p, \quad b_T := \sum_{q \in Q_T} (-1)^q q, \quad c_T := a_T b_T. \quad (4.9)$$

El elemento c_T se llama el **simetrizador de Young** asociado a T . Nótese que

$$a_T^2 = |P_T| a_T, \quad b_T^2 = |Q_T| b_T.$$

La primera igualdad es obvia, la segunda sigue al recordar que el signo es un homomorfismo: $(-1)^{rs} = (-1)^r(-1)^s$ para $r, s \in S_n$. Luego, $|P_T|^{-1}a_T$ y $|Q_T|^{-1}b_T$ son *elementos idempotentes*⁵ en el álgebra $\mathbb{C}[S_n]$. \diamond

Las siguientes igualdades siguen inmediatamente de (4.9):

$$\begin{aligned} p a_T &= a_T p = a_T \quad \text{para } p \in P_T, \\ q b_T &= b_T q = (-1)^q b_T \quad \text{para } q \in Q_T. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Entonces $p c_T = c_T$ y $c_T q = (-1)^q c_T$ para $p \in P_T$ y $q \in Q_T$.

Como $P_T \cap Q_T = \{1\}$, el coeficiente de 1 en la combinación lineal $c_T = \sum_{p,q} (-1)^q p q$ en $\mathbb{C}[S_n]$ es 1, porque $p q = 1$ si y sólo si $p = q = 1$. En particular, se ve que $c_T \neq 0$ para cualquier tableau T .

► El orden lexicográfico de las particiones de n permite establecer el lema siguiente, que resulta ser la clave para obtener las propiedades esenciales de los elementos $c_T \in \mathbb{C}[S_n]$.

Lema 4.12. *Sean T y R dos tableaux de formas respectivas $\lambda \vdash n$ y $\mu \vdash n$, con $\lambda \geq \mu$ (en orden lexicográfico). Entonces se cumple una y solo una de estas dos posibilidades:*

- (i) *hay dos entradas distintas $i, j \in [n]$ en la misma fila de T y en la misma columna de R ; o bien*
- (ii) *$\lambda = \mu$, y existen $p \in P_T$ y $q \in Q_R$ con $pT = qR$.*

Demostración. Considérese la primera fila del tableau T , con λ_1 elementos. Fíjese que $\lambda_1 \geq \mu_1$ por hipótesis. Si $\lambda_1 > \mu_1$, las λ_1 entradas de la primera fila de T se reparten entre las μ_1 columnas de R de tal manera que dos de ellas están en una misma columna de R : este es el caso (i).

En cambio, si $\lambda_1 = \mu_1$, hay una permutación $q_1 \in Q_R$ tal que las primeras filas de T y $q_1 R$ tengan los mismos elementos. Nótese que $Q_R = Q_{q_1 R}$.

En seguida, se puede remover las primeras filas de T y $q_1 R$, obteniendo dos tableaux con $n - \lambda_1$ entradas. Como $\lambda_2 \geq \mu_2$, el mismo argumento conduce al caso (i) si $\lambda_2 > \mu_2$; o bien, si $\lambda_2 = \mu_2$, a una permutación $q_2 \in Q_R$ tal que las primeras dos filas de T y $q_2 q_1 R$ tengan los mismos elementos.

⁵Un elemento de álgebra $e \in A$ es **idempotente** si $e^2 = e$. Si π es una representación de A sobre V , entonces $\pi(e) \in \text{End}_{\mathbb{F}} V$ es un proyector.

Continuando así, se llega eventualmente al caso (i); o de lo contrario, se obtiene $\lambda = \mu$ y se produce $q = q_k \cdots q_2 q_1 \in Q_R$ tal que todas las filas de T y qR tienen los mismos elementos, luego hay $p \in P_T$ tal que los tableaux pT y qR coinciden: el caso (ii).

Nótese también que los dos casos son exclusivos: como las filas de T y pT tienen los mismos elementos, y las columnas de R y qR tienen los mismos elementos, dos entradas en la misma fila y la misma columna de $pT = qR$ están en la misma posición: no pueden ser distintas. \square

Corolario 4.13. Sean T, R dos tableaux de formas respectivas $\lambda \vdash n$ y $\mu \vdash n$, con $\lambda \geq \mu$.

- (a) Si $\lambda > \mu$, entonces para todo $s \in S_n$ hay transposiciones $u \in P_T, v \in Q_R$ tales que $us = sv$.
- (b) Si $s \in S_n$ con $s \notin P_T Q_T$, entonces hay transposiciones $u \in P_T, v \in Q_T$ tales que $us = sv$.

Demostración. Ad (a): Se cumple el caso (i) del Lema 4.12 para los tableaux T y sR : hay dos entradas distintas i, j en la misma fila de T y la misma columna de sR . Sea u la transposición ($i \leftrightarrow j$) y sea $v := s^{-1}us$, para que $us = sv$. Entonces $u \in P_T$ y $v \in s^{-1}Q_{sRs} = Q_R$.

Ad (b): Si se cumpliera el caso (ii) del Lema para los tableaux $s^{-1}T$ y T , existirían $p_1 \in P_{s^{-1}T}$ y $q \in Q_T$ tales que $p_1 s^{-1}T = qT$. Al poner $p := s p_1 s^{-1} \in P_T$, se obtendría $s^{-1}pT = qT$, de modo que $s^{-1}p = q$ en S_n , así que $s = pq^{-1} \in P_T Q_T$.

Por lo tanto, la hipótesis de que $s \notin P_T Q_T$ demanda el caso (i) del Lema. Por la parte (a), hay una transposición $v \in Q_T \cap P_{s^{-1}T}$ y se pone $u := s v s^{-1} \in P_T$. \square

Lema 4.14. (a) Sean T, R dos tableaux de formas respectivas λ, μ con $\lambda > \mu$. El único $a \in \mathbb{C}[S_n]$ con $pa = a, aq = (-1)^q a$ para todo $p \in P_T, q \in Q_R$, es $a = 0$.

- (b) Si T es un tableau de n entradas y si $a \in \mathbb{C}[S_n]$ cumple $pa = a, aq = (-1)^q a$ para todo $p \in P_T, q \in Q_T$, entonces $a = \alpha c_T$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$.

Demostración. Ad (a): Escribese $a = \sum_{t \in S_n} a(t)t$ en $\mathbb{C}[S_n]$. Entonces, para todo $s \in S_n$, resultan $sa = \sum_t a(t)st = \sum_t a(s^{-1}t)t$ y $as = \sum_t a(t)ts = \sum_t a(ts^{-1})t$.

Dado un elemento $s \in S_n$, el Corolario 4.13(a) produce $u = u^{-1} \in P_T, v = v^{-1} \in Q_R$ con $us = sv$. Entonces las propiedades $ua = a, av = -a$ muestran que

$$a(s) = (ua)(s) = a(us) = a(sv) = (av)(s) = -a(s),$$

así que $a(s) = 0$ en \mathbb{C} para todo $s \in S_n$; luego $a = 0$.

Ad(b): El mismo argumento y el Corolario 4.13(b) muestra que $a(s) = 0$ para $s \notin P_T Q_T$. Si $s = pq$ con $p \in P_T$, $q \in Q_T$, entonces $a(pq) = a(q) = (-1)^q a(1)$, así que

$$a = \sum_{p \in P_T} \sum_{q \in Q_T} (-1)^q a(1) pq = a(1) c_T. \quad \square$$

Considérese el elemento $c_T^2 \in \mathbb{C}[S_n]$. Como $c_T^2 = a_T b_T a_T b_T$, es evidente de (4.10) que $pc_T^2 = c_T^2$, $c_T^2 q = (-1)^q c_T^2$ para $p \in P_T$, $q \in Q_T$. El Lema 4.14(b) entonces implica que $c_T^2 = m_T c_T$ para algún $m_T \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si $s \in S_n$, entonces

$$m_{sT} c_{sT} = (c_{sT})^2 = s c_T^2 s^{-1} = m_T s c_T s^{-1} = m_T c_{sT},$$

así que m_T solo depende de la forma λ del tableau T : se puede escribir $c_T^2 = m_\lambda c_T$. Como el coeficiente de 1 en c_T es 1, el coeficiente de c_T^2 respecto de la base usual de $\mathbb{C}[S_n]$ es m_λ . Esto dice que $m_\lambda = \sum_{p,p',q,q'} (-1)^{qq'} \llbracket pqp'q' = 1 \rrbracket$ es un número entero no cero.

Ahora bien, el coeficiente de s en $s c_T$ es 1, para todo $s \in S_n$. Esto muestra que la *traza* de $\rho(c_T)$ en la representación regular a derecha del álgebra $A = \mathbb{C}[S_n]$ es $\sum_{s \in S_n} 1 = n!$.

El elemento $e_T := c_T / m_\lambda$ es *idempotente* en el álgebra A , es decir, $e_T^2 = e_T$. Luego $\rho(e_T)$ es idempotente en $\text{End}_{\mathbb{C}} A$ y su traza es la dimensión de su imagen $A e_T = A c_T$. En resumen,

$$\text{tr } \rho(e_T) = \frac{\text{tr } \rho(c_T)}{m_\lambda} = \frac{n!}{m_\lambda} \quad \text{así que} \quad m_\lambda = \frac{n!}{\dim(A e_T)}$$

y en particular m_λ es un entero *positivo*.

Definición 4.15. Para cada partición λ de un entero n fijo, elíjase un tableau estándar T (por ejemplo, al colocar $1, \dots, n$ de izquierda a derecha en filas consecutivos.) Sea⁶

$$V_\lambda := \mathbb{C}[S_n] e_T = \mathbb{C}[S_n] c_T \quad (4.11)$$

el ideal a izquierda del álgebra $\mathbb{C}[S_n]$ generado por el simetrizador de Young c_T . Los V_λ son S_n -módulos, etiquetadas explícitamente por las particiones $\lambda \vdash n$. \diamond

Proposición 4.16. *Los ideales a izquierda V_λ dados por (4.11), para $\lambda \vdash n$, son unos S_n -módulos irreducibles, no isomorfos entre sí; y hasta isomorfismo, no hay otros. La representación regular a izquierda del grupo S_n se descompone así:*

$$\mathbb{C}[S_n] \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} U_\lambda \otimes V_\lambda \quad (4.12)$$

donde $U_\lambda \simeq \text{Hom}_{S_n}(V_\lambda, \mathbb{C}[S_n])$ cumple $\dim U_\lambda = \dim V_\lambda = n! / m_\lambda$.

⁶Hay un procedimiento que define los V_λ de modo más intrínseco, al reemplazar los tableaux por *tabloides*: el tabloide $\{T\}$ es la órbita de T bajo la acción del subgrupo P_T . La variante de (4.11) obtenida de esta manera se llama un **módulo de Specht**: véase la sección 7.2 del libro de Fulton.

Demostración. Escribáse $A = \mathbb{C}[S_n]$. Si $e \in A$ es un idempotente, $e^2 = e$, y si V es un A -módulo cualquiera, defínase $\psi_e : eV \rightarrow \text{Hom}_A(Ae, V)$ por $\psi_e(ex) : ae \mapsto ae \cdot ex = aex$ para $ex \in eV$, $ae \in Ae$. Es fácil ver que ψ_e es \mathbb{C} -lineal y está bien definida. Como $1 - e$ es otro idempotente en A , considérese la suma directa

$$\psi := \psi_e \oplus \psi_{1-e} : V = eV \oplus (1 - e)V \rightarrow \text{Hom}_A(Ae \oplus A(1 - e), V) = \text{Hom}_A(A, V) \simeq V.$$

Ahora $\psi(x)(a) = (ae + a(1 - e))(ex + (1 - e)x) = aex + a(1 - e)x = ax$, lo cual implica que $\psi = 1_V$ bajo la identificación $\text{Hom}_A(A, V) \simeq V$. Se concluye que ψ_e y ψ_{1-e} son biyecciones; en particular, que $\text{Hom}(Ae, V) \simeq eV$ como espacios \mathbb{C} -vectoriales.

Considérese dos particiones $\lambda, \mu \vdash n$ con $\lambda > \mu$. Sean T y R los tableaux estándares asociados a ellas. Entonces

$$\text{Hom}_A(V_\lambda, V_\mu) = \text{Hom}_A(Ae_T, Ae_R) \simeq e_T Ae_R = c_T Ac_R \subseteq a_T Ab_R$$

y el Lema 4.14(a) implica que $a_T Ab_R = \{0\}$. Luego $\text{Hom}_A(V_\lambda, V_\mu) = \{0\}$ también: los A -módulos V_λ y V_μ no son isomorfos.

En el caso $\lambda = \mu$, el Lema 4.14(b) implica que

$$\text{End}_A(V_\lambda) = \text{Hom}_A(Ae_T, Ae_T) \simeq e_T Ae_T = c_T Ac_T = \mathbb{C} c_T$$

así que $\dim_{\mathbb{C}} \text{End}_A(V_\lambda) = 1$, lo que significa que el A -módulo V_λ es *irreducible*.

Se ha construido una familia de representaciones irreducibles inequivalentes de S_n , de igual número que las clases conjugadas de S_n : por el Corolario 3.24, no hay otras.

Si sT es otro tableau de la misma forma λ , entonces $c_{sT} = s c_T s^{-1}$: luego $V_\lambda s^{-1} = Ac_{sT}$ es un A -módulo isomorfo a V_λ . En otras palabras, la representación *regular a derecha* del grupo S_n permuta los S_n -submódulos de $\mathbb{C}[S_n]$ isomorfos a V_λ dentro del mismo sector isotópico.

La igualdad $\dim U_\lambda = d_\lambda \equiv \dim V_\lambda$ es la propiedad (3.8) de la representación regular (a izquierda) del grupo S_n : la multiplicidad d_λ del A -submódulo V_λ es igual a su dimensión. Un argumento alternativo usa la observación al inicio de esta demostración: $U_\lambda \simeq \text{Hom}_A(Ae_T, A) \simeq e_T A = e_T \mathbb{C}[S_n]$; este es un A -módulo *a derecha*, el cual, por simetría, es \mathbb{C} -linealmente isomorfo a Ae_T . \square

Ejemplo 4.17. La partición $\lambda = (n)$ tiene un solo tableau estándar $N = \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\cdots\boxed{n}$. Sus subgrupos de permutaciones son $P_N = S_n$ y $Q_N = \{1\}$, así que $b_N = 1$ mientras $a_N = c_N = \sum_{p \in S_n} p$. Nótese que $sc_N = c_N$ para todo $s \in S_n$ y por lo tanto $V_{(n)} = \mathbb{C}[S_n] c_N$ es unidimensional. La misma fórmula $sc_N = c_N$ evidencia que la representación correspondiente es la representación *trivial*, $\pi_1 : S_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} V_{(n)}$. \diamond

Ejemplo 4.18. La partición $\lambda = (1^n)$ también tiene un solo tableau estándar M . En este caso los subgrupos son $P_M = \{1\}$ y $Q_M = S_n$, así que $a_M = 1$ mientras $b_M = c_M = \sum_{q \in S_n} (-1)^q q$. Es inmediato que $s c_M = (-1)^s c_M$ para todo $s \in S_n$ y por tanto $V_{(1^n)} = \mathbb{C}[S_n] c_M$ es unidimensional; la representación correspondiente es la representación *signo*, $\pi_2: S_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} V_{(1^n)}$. \diamond

Ejemplo 4.19. La partición $\lambda = (n-1, 1)$ tiene $(n-1)$ tableaux estándares; la entrada única de la segunda fila puede ser $2, 3, \dots, n$. Sea T el tableau estándar con segunda fila \boxed{n} . Entonces $P_T \simeq S_{n-1}$ y $Q_T = \{1, r\}$ donde r es la transposición $(1n)$. Ahora $c_T = \sum_{p \in S_{n-1}} (p - pr)$. Al calcular $c_T^2 = m_\lambda c_T$ se obtiene

$$c_T^2 = \sum_{p, p' \in S_{n-1}} (p - pr)(p' - p'r) = \sum_{p, p' \in S_{n-1}} (pp' - pp'r) + (prp'r - prp'). \quad (4.13)$$

Antes de simplificar esta sumatoria, considérese la representación “usual” π de S_n sobre \mathbb{C}^n por permutación de la base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Si $p' \in P_T$ es tal que $p' \cdot e_1 = e_j$ con $j \in \{2, \dots, n-1\}$, entonces $(rp'r - rp') \cdot e_n = e_j - e_1$, $(rp'r - rp') \cdot e_1 = e_1 - e_j$, $(rp'r - rp') \cdot e_k = 0$ para otros k . Luego, los únicos términos de la segunda suma al lado derecho de (4.13) que contribuyen a c_T^2 son los que cumplen $p' \cdot e_1 = e_1$; tales p' permutan el conjunto $\{2, \dots, n-1\}$, formando así un subgrupo isomorfo a S_{n-2} .

La primera suma al lado derecho es $(n-1)! c_T$ porque la suma sobre p' sobrecuenta el subgrupo P_T unas $(n-1)!$ veces. En la segunda suma, los términos que no cancelan son también de la forma $(pp' - pp'r)$ con $p' \in S_{n-2}$, por lo tanto la segunda suma es igual a $(n-2)! c_T$. En fin,

$$m_{(n-1,1)} = (n-1)! + (n-2)! = n(n-2)! \quad \text{así que} \quad \dim V_{(n-1,1)} = \frac{n!}{n(n-2)!} = n-1.$$

Esta $V_{(n-1,1)}$ se llama la **representación estándar** de S_n . Resulta ser equivalente a la subrepresentación de π sobre el hiperplano $V = \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 + \dots + x_n = 0\}$. \diamond

En el caso $n = 3$, las tres representaciones anteriores dan todas las representaciones irreducibles de S_3 . Las tres particiones (3) , $(2, 1)$ y $(1, 1, 1)$ corresponden a los S_3 -módulos $V_{(3)} \simeq \mathbb{C}$ (trivial), $V_{(2,1)} \simeq \mathbb{C}^2$ (estándar) y $V_{(1,1,1)} \simeq \mathbb{C}$ (signo).

Lema 4.20. Si T es un tableau de forma $\lambda \vdash n$, sean $c'_T := b_T a_T$ y $W_\lambda := \mathbb{C}[S_n] c'_T$. Entonces los S_n -módulos V_λ y W_λ son isomorfos.

Demostración. Con $A = \mathbb{C}[S_n]$, nótese que $V_\lambda = A a_T b_T$ y $W_\lambda = A b_T a_T$. Considérese los operadores de multiplicación a la derecha sobre A dados por $x \mapsto x a_T$, $y \mapsto y b_T$.

Es evidente que $(Aa_T b_T)a_T \subseteq Ab_T a_T$ y que $(Ab_T a_T)b_T \subseteq Aa_T b_T$. Además, estas aplicaciones lineales conmutan con multiplicaciones a la izquierda por elementos de A . Las restricciones de estos operadores a los subespacios vectoriales respectivos V_λ y W_λ definen operadores entrelazantes $R_a \in \text{Hom}_A(V_\lambda, W_\lambda)$ y $R_b \in \text{Hom}_A(W_\lambda, V_\lambda)$.

Su composición $R_b \circ R_a \in \text{End}_A(V_\lambda) = \text{End}_A(Ac_T)$ está dada por multiplicación a derecha por c_T , la cual es el operador escalar no nulo $x \mapsto m_\lambda x$, porque $c_T^2 = m_\lambda c_T$. Luego R_a es biyectivo, con inverso $R_a^{-1} = (1/m_\lambda)R_b$; y por ende R_a es un isomorfismo de A -módulos entre V_λ y W_λ . □

4.3 Polinomios de Schur

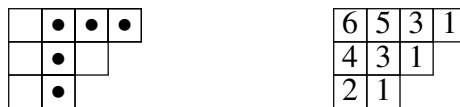
La literatura sobre las representaciones de S_n es muy extenso. Para analizar las representaciones en detalle, se requiere una fuerte dosis de análisis combinatorio. Se recomienda la lectura de los dos libros de Fulton y los libros de Procesi y de Simon citados en la bibliografía para examinar este asunto en más detalle. A continuación, se enuncian – sin demostraciones – algunos teoremas relevantes.

Proposición 4.21. *El grado $d_\lambda = \dim V_\lambda$ de la representación irreducible de S_n que corresponde a la partición $\lambda \vdash n$ está dado por*

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_c h_c} \tag{4.14}$$

donde cada \underline{c} denota una casilla del diagrama de Young para λ y $h_{\underline{c}}$ es la longitud del gancho de c , es decir, el número de casillas a la derecha y por debajo de c , incluyendo la propia c . □

Tómese, por ejemplo, la partición $\lambda = (4, 3, 2) \vdash 9$; se muestra el diagrama de Young correspondiente y un *relleno* (que no es un *tableau*) donde en cada casilla c se coloca el número h_c correspondiente:



El *gancho* para la casilla $c = (1, 2)$ queda ilustrado; se ve que $h_{(2,1)} = 5$ en este caso. La fórmula de dimensiones muestra que

$$d_{(4,3,2)} = \frac{9!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 1^3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3} = 168.$$

Lema 4.22. *La dimensión $d_\lambda = \dim V_\lambda$ coincide con el número de *tableaux* estándares de la forma λ .* □

Por ejemplo, hay dos tableaux estándares de la forma $(2, 1)$:

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad R = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

y la fórmula $d_{(2,1)} = 3!/(3 \cdot 1^2) = 2$ asegura que no hay otros. (Es inmediato, por inspección, que los otros 4 tableaux de esta forma no son estándares.) El sumando correspondiente de $\mathbb{C}[S_3]$ en la descomposición (4.12) es

$$U_{(2,1)} \otimes V_{(2,1)} \simeq \mathbb{C}^2 \otimes V_{(2,1)} = \mathbb{C}[S_3] c_T \oplus \mathbb{C}[S_3] c_R.$$

Corolario 4.23. Las dimensiones $d_\lambda = \dim V_\lambda$ cumplen $\sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2 = n!$. □

► Hay una famosa fórmula, descubierta por Frobenius, que describe completamente el carácter de la representación irreducible $\pi_\lambda: S_n \rightarrow \text{GL}(V_\lambda)$. Su expresión involucra ciertos polinomios simétricos y alternantes de varias variables. Es oportuno hacer una pausa para examinar algunas propiedades de estos polinomios.

Definición 4.24. Un elemento $p \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_m]$ es un **polinomio simétrico** de m variables si

$$p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = p(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{para todo } \sigma \in S_m.$$

Las **sumas de potencias** $p_k(x_1, \dots, x_m) := x_1^k + \dots + x_m^k$ son simétricos (y además homogéneas de grado k).

Se definen otras dos familias de polinomios simétricos homogéneas mediante funciones generatrices. Si t es una variable suplementaria, las fórmulas

$$\prod_{i=1}^m (1 + x_i t) =: 1 + \sum_{k=1}^m e_k t^k, \tag{4.15a}$$

$$\prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - x_i t} =: 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k t^k, \tag{4.15b}$$

definen los **polinomios simétricos elementales** e_k y los **polinomios simétricos completos** h_k , ambos de grado k (con $k \leq m$ en el primer caso). Explícitamente, al abreviar $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$:

$$e_k(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \quad h_k(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq m} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}. \quad \diamond$$

Por ejemplo, si $m = 3$, se ve que

$$e_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3, \quad e_2(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad e_3(\mathbf{x}) = x_1x_2x_3,$$

mientras

$$h_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3, \quad h_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2.$$

Fíjese que $h_2 = e_1^2 - e_2$ y que $e_2 = h_1^2 - h_2$. En general, un polinomio en los h_k puede expresarse como un polinomio en los e_k y viceversa.

Un teorema conocido de álgebra polinomial dice que cualquier polinomio simétrico es un polinomio en los e_k y que éstos son algebraicamente independientes.⁷ En símbolos:

$$\mathbb{F}[x_1, \dots, x_m]^{S_m} = \mathbb{F}[e_1, \dots, e_m].$$

Un elemento $q \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_m]$ es un **polinomio alternante** de m variables si

$$q(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = (-1)^\sigma q(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{para todo } \sigma \in S_m.$$

Al sustituir x_j por x_i en $q(\mathbf{x})$, se obtiene $q(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_m) = 0$ porque la transposición (ij) cambia su signo pero lo deja igual. Luego, $(x_i - x_j)$ divide $q(\mathbf{x})$, toda vez que $i \neq j$ en $\{1, \dots, m\}$. Un ejemplo de un polinomio alternante es el **determinante de Vandermonde**:

$$\Delta(\mathbf{x}) := \begin{vmatrix} x_1^{m-1} & \dots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^{m-1} & \dots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^{m-1} & \dots & x_3^2 & x_3 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m^{m-1} & \dots & x_m^2 & x_m & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j).$$

(El intercambio de dos filas de esta matriz cambia el signo del determinante.) Por lo dicho anteriormente, $\Delta(\mathbf{x})$ divide $q(\mathbf{x})$, así que $q(\mathbf{x}) = \Delta(\mathbf{x}) p(\mathbf{x})$; y el cociente $p(\mathbf{x})$ es obviamente un polinomio *simétrico* de m variables.

► Considérese el monomio $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_m^{\lambda_m}$ y sus imágenes bajo permutaciones de las variables; sin perder generalidad, se puede suponer que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$. Si algún $\lambda_i = \lambda_{i+1}$, el polinomio alternante generado por este monomio es nulo.

Nótese que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ es una *partición* de n , donde $n = \lambda_1 + \dots + \lambda_m$. Para poder tratar con n fijo, se permite rellenar las partes de una partición con ceros.

⁷Véase, por ejemplo, el Teorema 2.20 del libro: Nathan Jacobson, *Basic Algebra I*, Dover, Mineola, NY, 1985.

Así, por ejemplo, se escribe las particiones de 3 como $(3, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ en orden lexicográfico. El número de partes positivas, $\ell(\lambda) \leq m$, se llama la **longitud** de la partición λ ; este es el número de filas en el diagrama de Young correspondiente.

Para obtener exponentes distintos en monomios, se puede modificar λ al sumarle la sucesión fija $\rho := (m-1, m-2, \dots, 2, 1, 0) \in \mathbb{N}^m$. La correspondencia

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \longleftrightarrow \lambda + \rho = (\lambda_1 + m - 1, \lambda_2 + m - 2, \dots, \lambda_m)$$

es una biyección entre sucesiones *decrecientes* $\lambda \in \mathbb{N}^m$ y sucesiones *estrictamente decrecientes* $\lambda + \rho \in \mathbb{N}^m$.

Escríbese $l_j := \lambda_j + m - j$, de modo que $\lambda + \rho = (l_1, \dots, l_m)$. Entonces los polinomios

$$A_{\lambda+\rho}(\mathbf{x}) := \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}^{l_1} x_{\sigma(2)}^{l_2} \cdots x_{\sigma(m)}^{l_m} = \det[x_i^{l_j}]$$

forman una *base vectorial* de los polinomios alternantes de m variables.⁸ Fíjese que $A_{\lambda+\rho}(\mathbf{x})$ es un polinomio homogéneo, de grado $n + \frac{1}{2}(m^2 - m)$.

Definición 4.25. Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \vdash n$ es una partición de n con $n \geq m$, el **polinomio de Schur** s_λ se define como

$$s_\lambda(\mathbf{x}) := \frac{A_{\lambda+\rho}(\mathbf{x})}{\Delta(\mathbf{x})}, \quad (4.16)$$

el cual es un polinomio *simétrico* y homogéneo de grado n . De las consideraciones anteriores, se ve que $\{s_\lambda : \lambda \vdash n, \ell(\lambda) \leq m\}$ es una base vectorial para los polinomios simétricos homogéneos de grado n en m variables. \diamond

Nótese que $A_\rho(\mathbf{x}) = \Delta(\mathbf{x})$, así que $s_0(\mathbf{x}) \equiv 1$: La “partición” nula $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^m$, de longitud cero, corresponde con un polinomio constante, de grado cero.

Vale la pena examinar el efecto de colocar $x_m = 0$ en (4.16). Si $\lambda_m > 0$, defínase $\mu = (\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_m - 1) = \lambda - (1^m)$; entonces $A_{\lambda+\rho}(\mathbf{x}) = x_1 \cdots x_m A_{\mu+\rho}(\mathbf{x})$ y por ende $s_\lambda(\mathbf{x}) = x_1 \cdots x_m s_\mu(\mathbf{x})$. Luego $s_\lambda(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) = 0$.

Si $\lambda_m = 0$, de modo que $\ell(\lambda) \leq m - 1$, es fácil comprobar que

$$A_{\lambda+\rho}(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) = x_1 \cdots x_{m-1} A_{\lambda+\rho}(x_1, \dots, x_{m-1}),$$

y también $\Delta(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) = x_1 \cdots x_{m-1} \Delta(x_1, \dots, x_{m-1})$ en el caso $\lambda = 0$. En consecuencia,

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) = s_\lambda(x_1, \dots, x_{m-1}) \quad \text{toda vez que } \lambda_m = 0.$$

⁸De hecho, al reemplazar el anillo de coeficientes \mathbb{F} por \mathbb{Z} , esta es una *base integral* para los polinomios alternantes con coeficientes enteros.

La conclusión es que $s_\lambda(x_1, \dots, x_m) = 0$ si $m < \ell(\lambda)$, mientras que $s_\lambda(x_1, \dots, x_m)$ no depende del número de variables m toda vez que $m \geq \ell(\lambda)$. Por esta razón, se puede considerar s_λ como un polinomio simétrico en una cantidad infinita de variables.⁹

Ejemplo 4.26. Si $\lambda = (1, \dots, 1) = (1^n) \vdash n$, entonces $l_j = n - j + 1$ para $j = 1, \dots, n$ y por ende $A_{(1, \dots, 1) + \rho}(\mathbf{x}) = x_1 \cdots x_n \Delta(x)$. Es inmediato que

$$s_{(1, \dots, 1)}(\mathbf{x}) = x_1 \cdots x_n = e_n(\mathbf{x}), \quad \text{donde } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Es posible mostrar, por un cálculo combinatorio, que a la partición dual $\lambda' = (n)$ le corresponde el polinomio simétrico completo: $s_{(n)}(\mathbf{x}) = h_n(\mathbf{x})$. \diamond

Ejemplo 4.27. Algunos polinomios de Schur se obtienen por cálculo directo. Por ejemplo, para la partición $\lambda = (2, 1) \equiv (2, 1, 0) \vdash 3$ se calcula, con $\Delta = \Delta(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$, por expansión en la última fila:

$$\begin{aligned} s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^2 & 1 \\ x_2^4 & x_2^2 & 1 \\ x_3^4 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_1^4 - x_3^4 & x_1^2 - x_3^2 \\ x_2^4 - x_3^4 & x_2^2 - x_3^2 \\ x_3^4 & x_3^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{(x_1^2 - x_3^2)(x_2^2 - x_3^2)}{\Delta} \begin{vmatrix} x_1^2 + x_3^2 & 1 \\ x_2^2 + x_3^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)}{x_1 - x_2} (x_1^2 - x_2^2) \\ &= (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3). \end{aligned}$$

Se verifica directamente que $s_{(2,1)} = e_1 e_2 - e_3$.

Fíjese que $s_{(2,1)}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} x_1^3 & x_1 \\ x_2^3 & x_2 \end{vmatrix} = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = s_{(2,1,0)}(x_1, x_2, 0)$. \diamond

► Cabe recordar que la clase conjugada de $s \in S_n$ se identifica por el número y la cantidad de sus ciclos. Si s es el producto de m_1 elementos fijos (1-ciclos), m_2 transposiciones (2-ciclos), m_3 3-ciclos, etc., hasta m_r r -ciclos, entonces $m_1 + 2m_2 + \cdots + rm_r = n$. La partición correspondiente es $\mu = (r^{m_r}, \dots, 2^{m_2}, 1^{m_1})$, donde se omiten términos con $m_k = 0$. La cardinalidad de esta clase conjugada C_μ es el índice $[S_n : Z_{S_n}(s)]$ donde el *centralizador* $Z_{S_n}(s)$ es el subgrupo $\{p \in S_n : psp^{-1} = s\}$. Tales elementos p permutan ciclos de la misma longitud y además permutan cíclicamente los índices de cada ciclo individual:

$$Z_{S_n}(s) \simeq S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_r} \times C_1^{m_1} \times \cdots \times C_r^{m_r}; \quad \text{y} \quad |C_\mu| = \frac{n!}{1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2! \cdots r^{m_r} m_r!}.$$

⁹De manera menos informal, se define $\Lambda_m := \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]^{S_m}$, el anillo de polinomios simétricos en m variables; y se considera el homomorfismo $\phi_m : \Lambda_m \rightarrow \Lambda_{m-1}$ dado por evaluación en $x_m = 0$. Los s_λ (sin restricción sobre λ) pertenecen al límite proyectivo $\Lambda := \varprojlim \Lambda^m$ y forman una base integral para Λ .

Para cada partición $\lambda \vdash n$, sea χ_λ el carácter del S_n -módulo irreducible V_λ . Si $\mu \vdash n$ es otra partición, sea $\chi_\lambda(\mu) := \chi_\lambda(s)$ para cada $s \in C_\mu$.

Si $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, sea $p_\mu(\mathbf{x}) := p_{\mu_1}(\mathbf{x}) \cdots p_{\mu_m}(\mathbf{x})$ una **suma de potencias generalizada**, donde $p_k(\mathbf{x}) = x_1^k + \cdots + x_n^k$ para $k \in \mathbb{N}$. Cada $p_\mu(\mathbf{x})$ es un polinomio simétrico homogéneo de grado n en las variables $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

De manera análoga, al escribir $\mu = (r^{m_r}, \dots, 2^{m_2}, 1^{m_1})$, se define el *polinomio simétrico completo generalizado* $h_\mu(\mathbf{x}) := h_1(\mathbf{x})^{m_1} \cdots h_r(\mathbf{x})^{m_r}$.

Teorema 4.28 (Fórmula de caracteres de Frobenius). *Las entradas $\chi_\lambda(\mu)$ de la tabla de caracteres de S_n son los coeficientes del polinomio simétrico $p_\mu(\mathbf{x})$ con respecto de la base de los polinomios de Schur de grado homogéneo n :*

$$p_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda \vdash n} \chi_\lambda(\mu) s_\lambda(\mathbf{x}). \quad (4.17)$$

Alternativamente, $\chi_\lambda(\mu)$ es el coeficiente de $\mathbf{x}^{\lambda+\rho} = x_1^{\ell_1} \cdots x_n^{\ell_n}$ en el polinomio alternante $\Delta(\mathbf{x}) p_\mu(\mathbf{x})$. □

Aquí se omite la demostración de este teorema, incluyendo la equivalencia de las dos recetas para los coeficientes $\chi_\lambda(\mu)$. El lector puede consultar el libro de Fulton y Harris, sección 4.3 y apéndice A; o bien el libro de Procesi, sección 9.4.1. Para demostrar (4.17) o alguna fórmula equivalente, es necesario hacer un estudio detallado de las propiedades de polinomios simétricos e identidades combinatorias entre ellos.

► En el estudio del grupo S_n se destacan ciertas representaciones reducibles obtenidas por inducción desde sus subgrupos. Conviene identificar el grupo S_{n-1} con el subgrupo de las permutaciones en S_n que dejan n fijo:

$$S_{n-1} \simeq \{g \in S_n : g(n) = n\}.$$

Más generalmente, si $\lambda \vdash n$, sea $S_\lambda := S_{\lambda_1} \times \cdots \times S_{\lambda_m}$ el subgrupo de S_n que deja invariante las partes $\{1, \dots, \lambda_1\}$, $\{\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_1 + \lambda_2\}$, \dots , de $\{1, \dots, n\}$. En particular, la identificación anterior dice que $S_{n-1} \simeq S_{(n-1,1)}$.

Sea $\sigma_\lambda: S_n \rightarrow \text{GL}(Y_\lambda)$ la representación inducida por la representación trivial del subgrupo S_λ . Si T es un tableau de forma λ , el subgrupo S_λ coincide con el grupo P_T . En vista de (4.10), que dice que $pa_T = a_T$ para $p \in S_\lambda$, resulta que el espacio de la representación inducida puede ser realizada como $Y_\lambda = \mathbb{C}[S_n]a_T$. (En otras palabras, con $A = \mathbb{C}[S_n]$ como antes, Y_λ es el A -módulo Aa_T .) En efecto, solo es necesario observar que el espacio vectorial Aa_T tiene una base $\{s_1a_T, \dots, s_ka_T\}$ donde $\{s_1P_T, \dots, s_kP_T\}$ es una enumeración de las coclases en S_n/P_T .

Fíjese que la multiplicación a la derecha $y \mapsto yb_T$ es un homomorfismo sobreyectivo de S_n -módulos de Aa_T en Aa_Tb_T , es decir, de Y_λ en V_λ ; a la vez que el isomorfismo del Lema 4.20 da una inyección $Aa_Tb_T \simeq Ab_Ta_T \subseteq Aa_T$, es decir, $V_\lambda \simeq W_\lambda \hookrightarrow Y_\lambda$. Esto implica que hay una descomposición $Y_\lambda \simeq V_\lambda \oplus Z$ como suma directa de S_n -módulos. En consecuencia, Y_λ es reducible y V_λ es uno de sus componentes irreducibles.

Es una consecuencia del Lema 4.14 que V_μ no es un componente de Y_λ si $\lambda > \mu$; y además, el componente V_λ aparece en la descomposición de Y_λ una sola vez. Esto conduce a la fórmula

$$Y_\lambda \simeq V_\lambda \oplus \bigoplus_{\nu > \lambda} k_{\nu,\lambda} V_\nu \quad \text{para ciertos } k_{\nu,\lambda} \in \mathbb{N}. \quad (4.18)$$

Los coeficientes de esta descomposición se llaman **números de Kostka** (se define $k_{\lambda,\lambda} := 1$). Ellos aparecen en las siguientes fórmulas de transformación de polinomios simétricos:¹⁰

$$h_\lambda(\mathbf{x}) = s_\lambda(\mathbf{x}) + \sum_{\nu > \lambda} k_{\nu,\lambda} s_\nu(\mathbf{x}), \quad (4.19a)$$

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = m_\lambda(\mathbf{x}) + \sum_{\mu < \lambda} k_{\lambda,\mu} m_\mu(\mathbf{x}), \quad (4.19b)$$

donde los **polinomios simétricos monomiales** se definen como $\underline{m}_\lambda(\mathbf{x}) := \sum_{\alpha} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, donde $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ recorre las permutaciones distintas de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Por ejemplo, si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} m_{(2,1)}(\mathbf{x}) &= x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2, \\ s_{(2,1)}(\mathbf{x}) &= x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2. \end{aligned}$$

Como los $k_{\lambda,\mu}$ son enteros no negativos, la fórmula (4.19b) evidencia que los coeficientes de cada polinomio de Schur $s_\lambda(\mathbf{x})$ son enteros no negativos también.

Un caso particular importante de la descomposición es el caso $\lambda = (n-1, 1)$, donde

$$Y_{(n-1,1)} \simeq V_{(n-1,1)} \oplus V_{(n)}.$$

Del Ejemplo 4.19 se sabe que $V_{(n-1,1)}$ es la *representación estándar* de S_n , cuya dimensión es $n-1$. La dimensión de la representación inducida $Y_{(n-1,1)}$ es el índice $[S_n : S_{n-1}] = n$. Luego el número de copias de la representación trivial $V_{(n)}$ en esta descomposición es 1;

¹⁰Véase el apéndice A del libro de Fulton y Harris para el papel de los números de Kostka en el manejo de los polinomios simétricos; y el capítulo 2 del libro de Fulton, *Young Tableaux*, para una interpretación combinatoria en términos de diagramas de Young.

lo cual implica que $k_{(n),(n-1,1)} = 1$. Ahora, la estructura de una representación inducida, a partir de la fórmula (3.24), muestra que $Y_{(n-1,1)} \simeq \mathbb{C}^n$ donde S_n actúa por permutación de las coordenadas. El complemento de la recta diagonal de \mathbb{C}^n , la cual es el S_n -submódulo trivial, es el hiperplano $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Se ha comprobado, entonces, que la acción de S_n sobre este hiperplano no es otra cosa que la representación estándar $V_{(n-1,1)}$.

4.4 Representaciones de $GL(m, \mathbb{C})$

El grupo de matrices invertibles complejas $GL(m, \mathbb{C})$ no es un grupo finito; un estudio completo de sus representaciones requiere ciertos prolegómenos sobre grupos de Lie, o bien sobre grupos algebraicos. Sin embargo, el teorema de Schur y Weyl pone en evidencia una familia de representaciones irreducibles de este grupo, una para cada partición $\lambda \vdash n$. Vale la pena examinar el aporte del grupo finito S_n a la estructura de estas representaciones.

Definición 4.29. Sea V un espacio \mathbb{C} -vectorial de dimensión finita m . Considérese la descomposición (4.3) del producto tensorial $V^{\otimes n}$ de n copias de V bajo las acciones (4.6) de los grupos S_n y $G = GL(m, \mathbb{C})$. Estas acciones se extienden linealmente a representaciones de álgebras $A \simeq \mathbb{C}[S_n]$ y B tales que $A' = B$ y $B' = A$ por el Teorema 4.7 de Schur y Weyl. La descomposición referida entonces toma la forma:

$$V^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{S}_\lambda(V) \otimes V_\lambda \quad (4.20)$$

donde los V_λ son todos los S_n -módulos irreducibles; y cada $\mathbb{S}_\lambda(V) := \text{Hom}_A(V_\lambda, V^{\otimes n})$ es un G -módulo irreducible, de dimensión finita, en vista de la Proposición 4.5.

Los G -módulos $\mathbb{S}_\lambda(V)$ se llaman **módulos de Weyl**. La descomposición (4.20) entonces dice que $V^{\otimes n}$ es una suma directa de tales módulos de Weyl, con multiplicidades respectivas $\dim V_\lambda$. \diamond

El teorema de Schur y Weyl también asegura que $V_\lambda \simeq \text{Hom}_B(\mathbb{S}_\lambda(V), V^{\otimes n})$ como espacios \mathbb{C} -vectoriales.

Si W es otro espacio \mathbb{C} -vectorial finitodimensional y si $R \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$, entonces $R^{\otimes n}: V^{\otimes n} \rightarrow W^{\otimes n}$ es una aplicación lineal que entrelaza las dos representaciones de S_n y define, por restricción, una familia de aplicaciones lineales $\mathbb{S}_\lambda(R): \mathbb{S}_\lambda(V) \rightarrow \mathbb{S}_\lambda(W)$. Es fácil chequear que las correspondencias $V \mapsto \mathbb{S}_\lambda(V)$, $R \mapsto \mathbb{S}_\lambda(R)$, definen un *functor* sobre la categoría de espacios \mathbb{C} -vectoriales finitodimensionales. Estos \mathbb{S}_λ , para $\lambda \vdash n$, se llaman **funtores de Schur**.

► Para cada $\lambda \vdash n$, elíjase un tableau estándar fijo T : por ejemplo, T podría ser el tableau que rellena el diagrama de Young para λ con los números $1, 2, \dots, n$ en orden de izquierda a derecha en cada fila, y en las filas sucesivas de arriba para abajo. Denótese por $c_\lambda := c_T$ el simetrizador de Weyl para el tableau elegido. De la discusión después del Lema 4.14, se ve que los elementos $\{c_\lambda/m_\lambda : \lambda \vdash n\}$ es una familia de idempotentes ortogonales en A , con $V_\lambda \simeq Ac_\lambda$.

De la demostración del Teorema 4.7, se nota que la acción de S_n sobre la base vectorial $\{e_I : I \in [m]^n\}$ está dada por $s \cdot e_I = e_{s \cdot I}$. Esta acción se extiende por linealidad a la acción de $A = \mathbb{C}[S_n]$ sobre $V^{\otimes n}$. De ahí resulta que, para cada λ ,

$$\mathbb{S}_\lambda(V) = c_\lambda \cdot V^{\otimes n} \quad \text{como } G\text{-submódulo de } V^{\otimes n}. \quad (4.21)$$

Ejemplo 4.30. La partición $\lambda = (n)$ determina el S_n -módulo trivial $V_{(n)} = Ac_{(n)} \simeq \mathbb{C}$ con $c_{(n)} = \sum_{p \in S_n} p$. Esta suma de permutaciones actúa sobre $V^{(n)}$ como el **simetrizador**

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto \sum_{p \in S_n} x_{p^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{p^{-1}(n)} = n!(x_1 \vee \cdots \vee x_n).$$

Su imagen es la *potencia simétrica* $S^n V$, vista como subespacio de $V^{\otimes n}$. Es decir, $\mathbb{S}_{(n)}(V) = S^n V$. En conclusión: si $\dim V = m$, el espacio vectorial $S^n V$ es un $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ -módulo irreducible, para cada $n \in \mathbb{N}$. \diamond

Ejemplo 4.31. La partición $\lambda = (1^n)$ corresponde con $V_{(1^n)} = Ac_{(1^n)} \simeq \mathbb{C}$ donde $c_{(1^n)} = \sum_{q \in S_n} (-1)^q q$ actúa como el **antisimetrizador**

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto \sum_{q \in S_n} (-1)^q x_{q^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{q^{-1}(n)} = n!(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n).$$

Su imagen es la *potencia exterior* $\Lambda^n V$, vista como subespacio de $V^{\otimes n}$. Se concluye cada $\Lambda^n V$, para $n = 0, 1, \dots, \dim V$, es un $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ -módulo irreducible. \diamond

Si $n = 2$, no hay otros $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ -módulos irreducibles: $V \otimes V \simeq S^2 V \oplus \Lambda^2 V$ es un caso particular de (4.20). Para $n = 3$, la descomposición toma la forma:

$$V \otimes V \otimes V \simeq S^3 V \oplus (\mathbb{S}_{(2,1)}(V) \otimes \mathbb{C}^2) \oplus \Lambda^3 V.$$

Para $\lambda = (2, 1)$, sea $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ el tableau estándar preferido. Entonces $a_T = \underline{1} + (12)$ y $b_T = \underline{1} - (13)$, así que

$$c_{(2,1)} = \underline{1} + (12) - (13) - (132) \in \mathbb{C}[S_3].$$

En tal caso, $\mathbb{S}_{(2,1)}(V)$ es el subespacio de $V^{\otimes 3}$ generado por trivectores de la forma $c_{(2,1)} \cdot (x \otimes x \otimes x)$. Su dimensión es $(m^3 - m)/3$.

► Sea ψ_λ el carácter de la representación σ_λ de $GL(m, \mathbb{C})$ sobre $\mathbb{S}_\lambda(V)$. Este carácter es una función de clase sobre $GL(m, \mathbb{C})$. Cabe recordar que las clases conjugadas de este grupo son las *clases de semejanza* de las matrices invertibles. Dada $g \in G = GL(m, \mathbb{C})$, hay un elemento $h \in G$ tal que la matriz hgh^{-1} tenga la *forma normal de Jordan*, con los autovalores de g en la diagonal y entradas 0 o 1 en la subdiagonal superior. La traza $\text{tr}(g) = \text{tr}(hgh^{-1})$ depende solamente de los autovalores de g (porque es su suma).

De igual manera, el carácter de la representación (4.6a) de G sobre $V^{\otimes n}$ – y también de cada una de sus subrepresentaciones σ_λ – es un polinomio en las entradas de G ; por continuidad, este polinomio queda determinado por sus valores para g *diagonalizable*; y por invariancia de la traza bajo semejanza, está determinado por sus valores para g *diagonal*. En resumen, cada carácter ψ_λ es un *polinomio en los autovalores de g* .

Denótese los autovalores de g por $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{C}^m$. Se requiere hallar el polinomio $\psi_\lambda(\mathbf{x})$.

Ejemplo 4.32. Considérese el caso $\lambda = (1^n)$ donde $\mathbb{S}_\lambda(V) = \Lambda^n V$. Obviamente, $\Lambda^n V = \{0\}$ si $n > m$. Para $n \leq m$, un vector básico en $\Lambda^n V$ es $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ donde $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m$. Si $g = \text{diag}[x_1, \dots, x_m]$, el autovalor correspondiente de $\Lambda^n g = \sigma_{(1^n)}(g)$ es el monomio $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$. Luego, el carácter de $\Lambda^n V$ es el *polinomio simétrico elemental*:

$$\psi_{(1^n)}(\mathbf{x}) = \text{tr}[\Lambda^n g] = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} = e_n(\mathbf{x}).$$

En el caso opuesto de $\lambda = (n)$, donde $\mathbb{S}_\lambda(V) = S^n V$, con vectores básicos $e_{i_1} \vee \dots \vee e_{i_n}$ donde $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq m$, el carácter de $S^n V$ es el *polinomio simétrico completo*:

$$\psi_{(n)}(\mathbf{x}) = \text{tr}[S^n g] = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq m} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} = h_n(\mathbf{x}). \quad \diamond$$

Considérese las acciones (4.6) de $G = GL(m, \mathbb{C})$ y S_n sobre $V^{\otimes n}$. Según (4.21), se puede realizar el módulo de Weyl como el G -submódulo $\mathbb{S}_\lambda(V) = c_\lambda \cdot V^{\otimes n}$.

Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, su diagrama de Young tiene k filas; si T es el tableau estándar preferido de forma λ , entonces $c_\lambda = c_T = a_T b_T$. En el caso $k > m$, la acción de b_T sobre un tensor simple cualquiera de $V^{\otimes n}$ es nula:

$$b_T \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = k!(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \otimes \dots = 0$$

pues $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = 0$ en $\Lambda^k V$ porque v_1, \dots, v_k son linealmente dependientes. Luego $\mathbb{S}_\lambda(V) = \{0\}$ si λ tiene más que m filas.

Ahora supóngase que $k \leq m$. Dada una base $\{e_1, \dots, e_m\}$ de V , considérese el multivector

$$w_T := (e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \otimes (e_1 \otimes \cdots \otimes e_l) \otimes \cdots \otimes (e_1 \otimes \cdots \otimes e_r) \in V^{\otimes n},$$

donde $(k, l, \dots, r) = \lambda'$ es la partición dual de λ . Nótese que $k \geq l \geq \cdots \geq r$ porque estos índices enumeran las columnas del diagrama de Young de λ . Ahora la acción de b_T antisimetriza las columnas de T ; por lo tanto,

$$b_T \cdot w_T = k!l!\cdots r! (e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) \otimes (e_1 \wedge \cdots \wedge e_l) \otimes \cdots \otimes (e_1 \wedge \cdots \wedge e_r).$$

entonces $b_T \cdot w_T \neq 0$ y luego $a_T b_T \cdot w_T \neq 0$ porque a_T simetriza los tensores simples al lado derecho. Se ha comprobado que $\mathbb{S}_\lambda(V) \neq \{0\}$ si y solo si $k \leq m$.

Proposición 4.33. *Sea V un espacio \mathbb{C} -vectorial de dimensión n y sea $\lambda \vdash n$ una partición cuyo diagrama de Young tiene a lo sumo m filas. Entonces el carácter del $GL(m, \mathbb{C})$ -módulo $\mathbb{S}_\lambda(V)$ está dado por el polinomio de Schur $s_\lambda(x_1, \dots, x_m)$.*

Demostración. Conviene reescribir la representación (4.6b) de S_n sobre $V^{\otimes n}$ como una acción a derecha:

$$(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n) \triangleleft s := x_{s(1)} \otimes x_{s(2)} \otimes \cdots \otimes x_{s(n)}.$$

Con $A = \mathbb{C}[S_n]$ y $B = A'$ el álgebra generado por la acción a izquierda de $G = GL(m, \mathbb{C})$, el espacio vectorial $V^{\otimes n}$ es un B - A -bimódulo según la Definición 3.39. Al reescribir (4.21) como $\mathbb{S}_\lambda(V) = V^{\otimes n} \triangleleft c_\lambda$ y al recordar que $V_\lambda = A c_\lambda$, se concluye que hay un isomorfismo de G -módulos a izquierda:

$$\mathbb{S}_\lambda(V) \simeq V^{\otimes n} \otimes_A V_\lambda,$$

donde se usa el producto tensorial sobre A de la Definición 3.40.

La factorización $c_\lambda = a_T b_T$ sugiere considerar el G -módulo $a_T \cdot V^{\otimes n} = V^{\otimes n} \triangleleft a_T$ en conexión con el A -módulo (a izquierda) $Y_\lambda = A a_T$. La acción de $a_T = \sum_{p \in P_T} p$ sobre $V^{\otimes n}$ permuta los índices de las filas de T independientemente. Este G -módulo entonces se presenta como

$$S^{\lambda_1} V \otimes S^{\lambda_2} V \otimes \cdots \otimes S^{\lambda_k} V \simeq V^{\otimes n} \otimes_A Y_\lambda;$$

al lado izquierdo, cada \otimes significa un producto tensorial de espacios \mathbb{C} -vectoriales.

Según el Ejemplo 4.32, el carácter de este G -módulo es $h_\lambda(\mathbf{x}) = h_{\lambda_1}(\mathbf{x}) \cdots h_{\lambda_k}(\mathbf{x})$.

Ahora, Y_λ se descompone según (4.18) en A -submódulos irreducibles; al formar el producto tensorial de $V^{\otimes n}$ sobre A con ambos lados, se obtiene

$$S^{\lambda_1} V \otimes S^{\lambda_2} V \otimes \cdots \otimes S^{\lambda_k} V \simeq \mathbb{S}_\lambda(V) \oplus \bigoplus_{\nu > \lambda} k_{\nu, \lambda} \mathbb{S}_\nu(V). \quad (4.22)$$

Al tomar caracteres de ambos lados, notando que este proceso convierte sumas directas de G -módulos en sumas de funciones, se obtiene

$$h_\lambda(\mathbf{x}) = \psi_\lambda(\mathbf{x}) + \sum_{\nu > \lambda} k_{\nu, \lambda} \psi_\nu(\mathbf{x}).$$

Por otro lado, la misma fórmula (4.19a) expresa h_λ en términos de los polinomios de Schur. Como los números de Kostka $k_{\nu, \lambda}$ forman una matriz triangular unipotente (es decir, todas sus entradas diagonales son iguales a 1), esta matriz es invertible (con inverso triangular unipotente). Por lo tanto, el sistema lineal (4.19a) *tiene una solución única*. La conclusión es que $\psi_\lambda(\mathbf{x}) = s_\lambda(\mathbf{x})$ para cualquier λ tal que $\mathbb{S}_\lambda(V) \neq \{0\}$. \square

Esta Proposición 4.33, que describe concretamente los caracteres de una serie de representaciones irreducibles de $GL(m, \mathbb{C})$, es una instancia de una familia de *fórmulas de caracteres* obtenidas por Hermann Weyl alrededor de 1925. Las otras son fórmulas para caracteres de grupos de Lie compactos, fuera del alcance de este curso. El aspecto general de estas fórmulas es un cociente de dos expresiones antisimétricas, que generalizan la fórmula (4.16) – debido originalmente a Jacobi – para los polinomios de Schur.

4.5 Ejercicios sobre representaciones de S_n

A continuación, λ y μ son particiones de n ; T y R son tableaux de Young de formas λ y μ respectivamente. Se escribe $\lambda \geq \mu$ si λ mayoriza μ en orden lexicográfico. La partición dual a λ es λ' . Las representaciones $\pi_\lambda: S_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V_\lambda)$ son las irreducibles de S_n ; la representación signo es $\varepsilon: S_n \rightarrow \mathbb{C}$, en el caso $\lambda = (1^n)$. El simetrizador de Young para T es $c_T = a_T b_T$ en el álgebra $A = \mathbb{C}[S_n]$.

Ejercicio 4.1. Se escribe $\lambda \supseteq \mu$ (el *orden parcial de dominancia*) si¹¹

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_j \geq \mu_1 + \cdots + \mu_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots$$

- (a) Calcular las relaciones \supseteq entre todas las particiones para $n = 6$, mostrando así que este orden parcial generalmente no es total.
- (b) Demostrar que $\lambda \supseteq \mu$ implica $\lambda \geq \mu$ y $\mu' \geq \lambda'$.
- (c) Comprobar que la implicación inversa de (b) no es válida, al examinar $\lambda = (6, 3, 3)$ y $\mu = (5, 5, 1, 1)$ para $n = 12$.

¹¹Se identifica $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \leftrightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$ si fuera necesario.

Ejercicio 4.2. Para $\lambda \vdash n$ dado, úsase el tableau estándar T de forma λ con $1, 2, \dots, n$ en orden creciente en cada fila, y luego en las filas sucesivas de arriba para abajo.

Calcular los simetrizadores de Young correspondientes $c_T \in \mathbb{C}[S_4]$ para cada $\lambda \vdash 4$.

Ejercicio 4.3. Se sabe que $d_\lambda = \dim V_\lambda$ es el número de tableaux estándar de forma λ . Exhibir todos los tableaux estándares para $n = 5$ y obtener así los grados de todas las representaciones irreducibles de S_5 .

Ejercicio 4.4. Sea α el automorfismo del álgebra A determinado por $\alpha(s) := (-1)^s s$ para $s \in S_n$. Si π es una representación cualquiera de S_n , comprobar que $\pi \circ \alpha \sim \pi \otimes \varepsilon$.

Demostrar que $\pi_{\lambda'} \sim \pi_\lambda \otimes \varepsilon$ para cada $\lambda \vdash n$. [Indicación: usar el Lema 4.20, el cual dice que si $A = \mathbb{C}[S_n]$, entonces $Aa_T b_T \simeq Ab_T a_T$ como S_n -módulos.]

Ejercicio 4.5. La fórmula $c_T^2 = m_\lambda c_T$ demanda que $m_\lambda \neq 0$. Mostrar que efectivamente $c_T^2 \neq 0$, al verificar que $a \mapsto c_T a$ no es un operador nilpotente sobre $A = \mathbb{C}[S_n]$.

[Indicación: Si este operador fuera nilpotente, su traza sería 0. Comprobar que, por el contrario, su traza es $n!$ con el uso de la representación regular de S_n .]

Ejercicio 4.6. (a) Comprobar que $b_R A a_T = 0$ si $\lambda > \mu$; y que $b_T A a_T \simeq \mathbb{C} c_T$.

(b) Demostrar que $V_\lambda = A c_T$ es un S_n -submódulo de $Y_\lambda = A a_T$ con multiplicidad 1; y que $V_\mu = A c_R$ es un S_n -submódulo de Y_λ si y solo si $\lambda \leq \mu$.

Ejercicio 4.7. Al tomar $m = 3$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$, el polinomio simétrico *monomial* $m_\lambda(\mathbf{x})$ es la suma del monomio $x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} z^{\lambda_3}$ y sus permutaciones.

(a) Expresar $m_{(3)}(\mathbf{x})$, $m_{(2,1)}(\mathbf{x})$ y $m_{(1,1,1)}(\mathbf{x})$:

(i) en términos de $e_1(\mathbf{x})$, $e_2(\mathbf{x})$, $e_3(\mathbf{x})$;

(ii) en términos de $h_1(\mathbf{x})$, $h_2(\mathbf{x})$, $h_3(\mathbf{x})$;

(iii) en términos de $p_1(\mathbf{x})$, $p_2(\mathbf{x})$, $p_3(\mathbf{x})$.

(b) Expresar $e_3(\mathbf{x})$, $h_3(\mathbf{x})$, y $p_3(\mathbf{x})$ como combinaciones lineales de $m_{(3)}(\mathbf{x})$, $m_{(2,1)}(\mathbf{x})$ y $m_{(1,1,1)}(\mathbf{x})$.

Ejercicio 4.8. Se puede definir los polinomios simétricos elementales y completos mediante sus funciones generatrices con una variable auxiliar t :

$$E(t) \equiv \prod_{j=1}^m (1 + x_j t) =: 1 + \sum_{k=1}^m e_k(\mathbf{x}) t^k, \quad H(t) \equiv \prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - x_j t} =: 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\mathbf{x}) t^k.$$

Mostrar que $e_k(1, 1, \dots, 1) = \binom{m}{k}$ y $h_k(1, 1, \dots, 1) = \binom{m+k-1}{k}$. Con base en este cálculo, obtener las dimensiones de los espacios vectoriales $\Lambda^k(\mathbb{C}^m)$ y $S^k(\mathbb{C}^m)$.

Ejercicio 4.9. Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ y $\lambda + \rho = (l_1, \dots, l_m)$ con $l_j := \lambda_j + m - j$ para $j = 1, \dots, m$, comprobar que

$$A_{\lambda+\rho}(1, x, \dots, x_{m-1}) = \pm \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x^{l_i} - x^{l_j})$$

con un signo \pm que solo depende de m . Calcular $s_\lambda(1, x, \dots, x^{m-1})$ para $x \neq 1$ y obtener así la **fórmula de dimensión de Weyl**:

$$\dim \mathbb{S}_\lambda(V) \equiv s_\lambda(1, 1, \dots, 1) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}.$$

Ejercicio 4.10. Si $V_{(n-1,1)} \simeq \mathbb{C}^{n-1}$ es el espacio de la representación estándar de S_n , demostrar que hay un isomorfismo de S_n -módulos:

$$S^2 V_{(n-1,1)} \simeq \mathbb{C} \oplus V_{(n-1,1)} \oplus V_{(n-2,2)},$$

donde el primer sumando es el S_n -módulo trivial, $V_{(n)} = \mathbb{C}$.

Ejercicio 4.11. Para el tableau $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $V = \mathbb{C}^m$, $V^{\otimes 3} \equiv V \otimes V \otimes V$, defínase los operadores $A_T, B_T, C_T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes 3})$ por

$$\begin{aligned} A_T(u \otimes v \otimes w) &:= \frac{1}{2}(u \otimes v \otimes w + v \otimes u \otimes w), \\ B_T(u \otimes v \otimes w) &:= \frac{1}{2}(u \otimes v \otimes w - w \otimes v \otimes u), \quad C_T := A_T B_T. \end{aligned}$$

Para $R = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ defínase A_R, B_R, C_R de modo similar:

$$\begin{aligned} A_R(u \otimes v \otimes w) &:= \frac{1}{2}(u \otimes v \otimes w + w \otimes v \otimes u), \\ B_R(u \otimes v \otimes w) &:= \frac{1}{2}(u \otimes v \otimes w - v \otimes u \otimes w), \quad C_R := A_R B_R. \end{aligned}$$

Sean $S_T V := C_T(V^{\otimes 3})$ y $S_R V := C_R(V^{\otimes 3})$.

- Demstrar que $V^{\otimes 3} \simeq S^3 V \oplus S_T V \oplus S_R V \oplus \Lambda^3 V$. [[Indicación: para comprobar que $S_T V \cap S_R V = \{0\}$, calcular $B_T A_R$ y $B_R A_T$.]]
- Obtener la fórmula $\dim S_T V = m(m^2 - 1)/3$.
- En el caso $m = 2$, $V = \mathbb{C}^2$, sea $Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (un tableau no estándar) y determinar $S_T \mathbb{C}^2$, $S_R \mathbb{C}^2$ y $S_Q \mathbb{C}^2$, comprobando que $S_Q \mathbb{C}^2 \subset S_T \mathbb{C}^2 \oplus S_R \mathbb{C}^2$.

5 Estructura de álgebras de Lie

Las representaciones de grupos de Lie están determinadas en buena medida por las acciones correspondientes de su álgebra de Lie. Si G es un grupo de Lie y si $\mathfrak{g} = T_1G$ es el espacio tangente en 1, un par de vectores $x, y \in \mathfrak{g}$ determinan campos vectoriales X, Y sobre G que son invariantes por traslaciones a la izquierda $h \mapsto gh$ en G . El conmutador $XY - YX$ es otro campo vectorial invariante cuyo valor en 1 es un vector $[x, y] \in \mathfrak{g}$ que depende bilinealmente de x, y ; de este modo, \mathfrak{g} es un álgebra de Lie finitodimensional.

Hay grupos de Lie reales y complejos: ellos tienen vecindarios de 1 (y, por traslación, de cualquier otro punto) homeomorfos a \mathbb{R}^n o a \mathbb{C}^n , según el caso. Un grupo de Lie real compacto de dimensión n admite una *complexificación* a un grupo de Lie complejo de dimensión n y el mismo proceso es aplicable a algunos grupos de Lie no compactos. Así, por ejemplo, el grupo de Lie compacto $SU(2)$ y el grupo no compacto $SL(2, \mathbb{R})$ tiene una complexificación común, $SL(2, \mathbb{C})$. En la dirección inversa, se dice que $SU(2)$ y $SL(2, \mathbb{R})$ son *formas reales* de $SL(2, \mathbb{C})$: una forma real compacta y otra no compacta. Estas ambigüedades quedan suprimidas al considerar solamente el caso compacto de grupos de Lie reales:¹ cada grupo de Lie compacto G tiene una complexificación $G^{\mathbb{C}}$, la cual es un grupo de Lie complejo cuya forma real compacta es G .

En contraste el caso de grupos de Lie, la complexificación de un álgebra de Lie real \mathfrak{g} es un sencillo producto tensorial:

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}.$$

Por ejemplo, si $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$, con $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = n^2 - 1$, entonces $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

En este capítulo, \mathfrak{g} denotará una \mathbb{F} -álgebra de Lie de dimensión finita, sobre el cuerpo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . La consideración del caso real anticipa el eventual estudio de espacios tangentes en la identidad de grupos de Lie compactos; y es puede pasar al caso complejo directamente al aplicar el funtor $(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} -)$. Sin embargo, aquí se adoptará un enfoque puramente algebraico, para iluminar mejor la estructura propia de las álgebras de Lie. Por lo tanto, se enfatizará más el caso complejo, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

La teoría estructural de las álgebras de Lie tiene muchas analogías con la de álgebras asociativas; en particular, hay un contraste marcado entre las álgebras de Lie *solubles* y las *semisimples*, que se abordará en seguida.

¹El algoritmo de complexificación para grupos de Lie compactos está basado en un teorema de dualidad de Tannaka y Kreĭn: los elementos de matriz de representaciones finitodimensionales de G forma una biálgebra conmutativa $\mathcal{R}(G, \mathbb{R})$, cuyos caracteres reales forman un grupo isomorfo a G . La complexificación $G^{\mathbb{C}}$ puede definirse como el grupo de caracteres de la bialgebra $\mathcal{R}(G, \mathbb{C})$ de elementos de matriz complejos. Véase el capítulo 3 del libro: Theodor Bröcker y Tammo tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Springer, New York, 1985.

5.1 Álgebras de Lie semisimples

Definición 5.1. Si \mathfrak{l} es un ideal del álgebra de Lie \mathfrak{g} , sea $[\mathfrak{g}, \mathfrak{l}]$ el subespacio vectorial de \mathfrak{g} generado por los elementos $[x, y]$, con $x \in \mathfrak{g}$. Es fácil comprobar que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{l}]$ también es un ideal de \mathfrak{g} .

- (a) Hay una serie decreciente de ideales $\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(1)} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}^{(2)} := [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}], \dots$, $\mathfrak{g}^{(k+1)} := [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}]$, etc. Dícese que \mathfrak{g} es **soluble** si hay $r \in \mathbb{N}$ con $\mathfrak{g}^{(r)} = \{0\}$.
- (b) Hay otra serie decreciente de ideales $\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}^2 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1], \dots$, $\mathfrak{g}^{k+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k]$, etc. Dícese que \mathfrak{g} es **nilpotente** si hay $r \in \mathbb{N}$ con $\mathfrak{g}^r = \{0\}$.

Nótese que $\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^k$ para cada k . Por lo tanto, un álgebra de Lie nilpotente es soluble. \diamond

Ejemplo 5.2. Las matrices triangulares superiores forman un álgebra de Lie soluble:

$$\mathfrak{b}_+(n, \mathbb{R}) := \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \}.$$

En efecto, se ve enseguida que en este caso $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}^1$ es la totalidad de matrices triangulares estrictamente superiores,

$$\mathfrak{n}_+(n, \mathbb{R}) := \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ si } i \geq j \}.$$

La formación de conmutadores sucesivos en \mathfrak{g}^1 conducen a matrices triangulares con varios subdiagonales nulos. De ahí es fácil verificar que $\mathfrak{n}_+(n, \mathbb{R})$ es nilpotente y que $\mathfrak{b}_+(n, \mathbb{R})$ es soluble. Sin embargo, $\mathfrak{b}_+(n, \mathbb{R})$ no es nilpotente. \diamond

Si \mathfrak{l} es un ideal de \mathfrak{g} , se demuestra por inducción que $\mathfrak{l}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^{(k)}$ y $(\mathfrak{g}/\mathfrak{l})^{(k)} = \mathfrak{g}^{(k)}/\mathfrak{l}$ para cada k . Se concluye que \mathfrak{g} es soluble si y solo si \mathfrak{l} y $\mathfrak{g}/\mathfrak{l}$ son ambos solubles. Si \mathfrak{k} y \mathfrak{l} son dos ideales solubles de un álgebra de Lie \mathfrak{g} , el isomorfismo canónico $(\mathfrak{k} + \mathfrak{l})/\mathfrak{l} \simeq \mathfrak{k}/(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{l})$ evidencia que la suma $\mathfrak{k} + \mathfrak{l}$ es otro ideal soluble. Entonces la familia de ideales solubles de \mathfrak{g} posee un elemento maximal, que es único: este *ideal soluble más grande* se llama el **radical** de \mathfrak{g} , denotado por $\underline{\text{rad}} \mathfrak{g}$.

Definición 5.3. Un álgebra de Lie se llama **semisimple** si $\text{rad } \mathfrak{g} = \{0\}$. \diamond

La solubilidad y la semisimplicidad son propiedades complementarias en el siguiente sentido. Cualquier álgebra de Lie \mathfrak{g} tiene un ideal $\text{rad } \mathfrak{g}$ que es soluble; el cociente $\mathfrak{g}/(\text{rad } \mathfrak{g})$ es semisimple. Entonces \mathfrak{g} es soluble si y solo si $\text{rad } \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, mientras \mathfrak{g} es semisimple si y solo si $\text{rad } \mathfrak{g} = \{0\}$.

Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es **simple** si no posee ideales no triviales y además *no es abeliano*: $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$. En este caso, desde luego, vale $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Como resultado, la serie de ideales $\mathfrak{g}^{(k)}$ es constante (todos coinciden con \mathfrak{g}) y por lo tanto $\text{rad } \mathfrak{g} = \{0\}$: un álgebra de Lie simple es también semisimple.

► Cartan descubrió una manera práctica de determinar si un álgebra de Lie es semisimple o no.² La semisimplicidad es equivalente a la no degeneración de una forma bilineal especial.³

Definición 5.4. Sea \mathfrak{g} una \mathbb{F} -álgebra de Lie finitodimensional. La **aplicación adjunta** $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$ definida por $\text{ad } x(y) := [x, y]$ es una representación de álgebras de Lie, porque $\text{ad}([x, y]) = [\text{ad } x, \text{ad } y]$ para $x, y \in \mathfrak{g}$, en vista de la identidad de Jacobi:

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \quad \text{para todo } x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

La **forma de Killing** sobre \mathfrak{g} es la forma bilineal simétrica

$$\langle x, y \rangle := \text{tr}[(\text{ad } x)(\text{ad } y)]. \quad (5.1)$$

La forma de Killing es *asociativa* en el siguiente sentido:

$$\langle [x, y], z \rangle = \langle x, [y, z] \rangle \quad \text{para todo } x, y, z \in \mathfrak{g}, \quad (5.2)$$

porque los dos lados coinciden con $\text{tr}[(\text{ad } x)(\text{ad } y)(\text{ad } z)] - \text{tr}[(\text{ad } z)(\text{ad } y)(\text{ad } x)]$. \diamond

La estructura de las álgebras de Lie está basada en tres teoremas clásicos, que se enuncian a continuación, sin demostraciones.⁴ El teorema de Engel es válido para \mathbb{F} -álgebras de Lie sobre un cuerpo cualquiera; en los otros dos, se toma $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Proposición 5.5 (Teorema de Engel). *Si $(\text{ad } x)$ es un operador nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$, entonces \mathfrak{g} es una \mathbb{F} -álgebra de Lie nilpotente.* \square

Proposición 5.6 (Teorema de Lie). *Si \mathfrak{g} es una subálgebra de Lie soluble de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V)$, entonces hay una base \mathbb{C} -vectorial de V con respecto al cual todos los elementos de \mathfrak{g} son matrices triangulares superiores.* \square

Proposición 5.7 (Criterio de Cartan). *Sea V un espacio \mathbb{C} -vectorial finitodimensional y sea \mathfrak{g} una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V)$. Si $\text{tr}(xy) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, entonces \mathfrak{g} es soluble.* \square

Con base en los resultados anteriores, se llega a una formulación alternativa de semisimplicidad en términos de la forma de Killing.

²En su tesis doctoral: Élie Cartan, “Sur la structure des groupes de transformations finis et continus”, thèse de doctorat, Paris, 1894.

³Una forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es **no degenerada** si $\langle x, y \rangle = 0$ para todo x implica $y = 0$.

⁴Para tales demostraciones véase, por ejemplo, los capítulos 3 y 4 del libro de Humphreys.

Proposición 5.8. *Un álgebra de Lie compleja es semisimple si y solo si su forma de Killing es no degenerada.*

Demostración. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie compleja. Si \mathfrak{g} no es semisimple, su radical $\mathfrak{l} := \text{rad } \mathfrak{g}$ no es nulo; luego, hay $r \geq 1$ tal que $\mathfrak{l}^{(r)} = 0$ pero $\mathfrak{l}^{(r-1)} \neq \{0\}$. Entonces el ideal no nulo $\mathfrak{k} := \mathfrak{l}^{(r-1)}$ cumple $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] = \mathfrak{l}^{(r)} = \{0\}$, así que \mathfrak{k} es abeliano.

Si $x \in \mathfrak{g}$, $z \in \mathfrak{k}$, entonces $\text{ad } x(\mathfrak{k}) \subseteq \mathfrak{k}$ porque \mathfrak{k} es un ideal de \mathfrak{g} ; mientras $\text{ad } z(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{k}$ y $\text{ad } z(\mathfrak{k}) = \{0\}$. Entonces $(\text{ad } x)(\text{ad } z)$ es una aplicación lineal sobre \mathfrak{g} que lleva \mathfrak{g} en \mathfrak{k} y se anula en \mathfrak{k} ; por lo tanto⁵ su traza es 0. Esto dice que $\langle x, z \rangle = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, $z \in \mathfrak{k}$, así que la forma de Killing es *degenerada*: hay un vector $z \neq 0$ tal que $\langle -, z \rangle \equiv 0$.

Inversamente, si la forma de Killing de \mathfrak{g} es degenerada, considérese su *núcleo*

$$\mathfrak{k} := \{ z \in \mathfrak{g} : \langle -, z \rangle \equiv 0 \}.$$

Si $y \in \mathfrak{g}$, $z \in \mathfrak{k}$, entonces (5.2) implica que $\langle x, [y, z] \rangle = \langle [x, y], z \rangle = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$; por lo tanto, $[y, z] \in \mathfrak{k}$. Esto dice que \mathfrak{k} es un *ideal* de \mathfrak{g} .

Ahora $\text{ad}(\mathfrak{k}) = \{ \text{ad } z : z \in \mathfrak{k} \}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ tales que $\text{tr}(ab) = 0$ para todo $a, b \in \text{ad}(\mathfrak{k})$. Por el criterio de Cartan, $\text{ad}(\mathfrak{k})$ es soluble. El núcleo de la representación adjunta $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ es el *centro* \mathfrak{z} de \mathfrak{g} ; ahora $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{k}$ es abeliano, luego soluble, y $\mathfrak{k}/(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{k}) \simeq \text{ad}(\mathfrak{k})$ es soluble, lo que implica que \mathfrak{k} es también soluble. En resumen: si la forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es degenerada, su núcleo es un ideal soluble no nulo de \mathfrak{g} . \square

Corolario 5.9. *Un álgebra de Lie compleja semisimple es una suma directa de ideales que son álgebras de Lie simples.*

Demostración. Sea \mathfrak{g} una \mathbb{C} -álgebra de Lie semisimple. Si \mathfrak{g} no es simple, sea \mathfrak{l} un ideal minimal de \mathfrak{g} y sea \mathfrak{l}^{\perp} el *subespacio ortogonal* con respecto a la forma de Killing. Por (5.2), como en la demostración anterior, \mathfrak{l}^{\perp} es un *ideal* de \mathfrak{g} .

Ahora $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}^{\perp} = \{0\}$ o \mathfrak{l} por la minimalidad de \mathfrak{l} . La segunda opción, $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{l}^{\perp}$, se excluye⁶ porque $\text{ad}(\mathfrak{l})$ y luego \mathfrak{l} serían solubles, por el criterio de Cartan. La conclusión es que $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{l}^{\perp}$, donde \mathfrak{l} es simple y \mathfrak{l}^{\perp} es semisimple. El resto sigue por inducción sobre $\dim \mathfrak{g}$. \square

Corolario 5.10. *Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie compleja semisimple, entonces $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.*

Demostración. Basta tomar \mathfrak{g} simple, donde la igualdad $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ es inmediato. \square

⁵Para calcular la traza, se puede usar una base vectorial de \mathfrak{k} extendida a una base de \mathfrak{g} .

⁶Si V es un espacio \mathbb{C} -vectorial con una forma bilineal simétrica no degenerada, un subespacio $W \leq V$ es **isotrópico** si $W \leq W^{\perp}$. Tales subespacios existen porque una forma bilineal compleja no es “definida”, en contraste con el caso real.

► Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie *real*, su complexificación $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ obedece $(\mathfrak{g}^{(k)})^{\mathbb{C}} = (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^{(k)}$ y $(\mathfrak{g}^k)^{\mathbb{C}} = (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^k$. Entonces \mathfrak{g} es soluble/nilpotente/semisimple si y solo si $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ tiene la misma propiedad. La forma de Killing para \mathfrak{g} se extiende a la forma de Killing para $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, en vista de la fórmula (5.1). Luego la Proposición 5.8 sigue válida para álgebras de Lie reales: \mathfrak{g} es semisimple si y solo si su forma de Killing es no degenerada.

Ahora bien, una forma bilineal simétrica *real* posee un invariante nuevo: la *signatura*. En la dirección inversa, al buscar una forma real para un álgebra de Lie compleja dada, su puede elegir entre varias signaturas. Un álgebra de Lie real semisimple se llama **compacta** si su forma de Killing es *negativa definida*. Obviamente no se trata de tener una topología compacta porque un espacio \mathbb{R} -vectorial no es acotado. La terminología viene de la relación entre álgebras y grupos de Lie. A continuación se bosqueja un ejemplo típico.⁷

Ejemplo 5.11. El álgebra de Lie real $\mathfrak{so}(n) := \{ X \in M_n(\mathbb{R}) : X^t = -X \}$ se identifica con el espacio tangente en 1_n del grupo $\mathrm{SO}(n) := \{ A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : A^t A = 1_n, \det A = 1 \}$. La *aplicación exponencial* $\underline{\exp}: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, definido por $\underline{\exp} X := \sum_{k=0}^{\infty} (1/k!) X^k$, cumple

$$(\underline{\exp} X)^t (\underline{\exp} X) = (\underline{\exp} X^t) (\underline{\exp} X) = \underline{\exp}(-X) \underline{\exp} X = \underline{\exp}(-X + X) = \underline{\exp} 0 = 1_n$$

para todo $X \in \mathfrak{so}(n)$, y $\det(\underline{\exp} X) = e^{\mathrm{tr} X} = e^0 = 1$; luego, $\underline{\exp}$ lleva $\mathfrak{so}(n)$ en $\mathrm{SO}(n)$.⁸ Resulta que $\underline{\exp}: \mathfrak{so}(n) \rightarrow \mathrm{SO}(n)$ es sobreyectiva pero no es inyectiva. \llbracket Esta es una función suave cuyo jacobiano en 0 no se anula; luego tiene un *inverso local*, también suave, dada por $\log(1_n + B) := \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} B^m / m$, así que $\underline{\exp}$ y $\underline{\log}$ determinan un difeomorfismo entre un vecindario de 0 en $\mathfrak{so}(n)$ y un vecindario de 1_n en $\mathrm{SO}(n)$. \rrbracket

El grupo de Lie $\mathrm{SO}(n)$ es compacto (en el sentido usual). En efecto, $A^t A = 1_n$ implica que $(\det A)^2 = 1$, así que $\det A = \pm 1$. Luego el grupo ortogonal $\mathrm{O}(n)$ es la unión disjunta de $\mathrm{SO}(n)$ y su coclase con $\det A = -1$; basta ver que $\mathrm{O}(n)$ es compacto. Pero $A^t A = 1_n$ implica $\mathrm{tr}(A^t A) = n$, así que tanto $\mathrm{O}(n)$ como $\mathrm{SO}(n)$ se identifican con partes cerradas – determinadas por ecuaciones polinomiales entre sus entradas – de la esfera compacta $\sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2 = n$ en \mathbb{R}^{n^2} . \diamond

► El Corolario 5.9 indica que las álgebras de Lie complejas satisfacen, al menos parcialmente, un análogo de la Proposición 2.16 acerca de las \mathbb{C} -álgebras asociativas finitodimensionales: el radical es nulo si y sólo si el álgebra es una suma directa de subálgebras

⁷Para la relación entre álgebras y grupos de Lie, en los casos compacto y no compacto, véase el libro: Sigurdur Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1978.

⁸La relación $\det(\underline{\exp} X) = \exp(\mathrm{tr} X)$ se verifica directamente para matrices diagonales; por invariancia bajo semejanza, para matrices diagonalizables; y por continuidad, para matrices en general.

simples. Resulta que el ítem (d) de esa proposición también es válido para \mathbb{C} -álgebras de Lie: *las representaciones también serían semisimples*. Este es un teorema de Weyl (Teorema 5.16 abajo).

En primer lugar, nótese que el lema de Schur es válido para \mathfrak{g} -módulos: cualquier representación irreducible $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ de una \mathbb{C} -álgebra de Lie se extiende, por universalidad, a una representación irreducible $\tilde{\rho}: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} V$ (este es el Lema 1.26).⁹ Un operador sobre V que conmuta con $\rho(x)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ también conmuta con $\tilde{\rho}(a)$ para todo $a \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ y por ende es un escalar.

Definición 5.12. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie compleja semisimple. Por la Proposición 5.8, su forma de Killing es no degenerada. Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una base \mathbb{C} -vectorial de \mathfrak{g} , sea $\{y_1, \dots, y_n\}$ la *base dual* de \mathfrak{g} con respecto a la forma de Killing:¹⁰

$$\langle x_i, y_j \rangle = \llbracket i = j \rrbracket \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n.$$

El elemento $\underline{C} := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es el **elemento de Casimir** para \mathfrak{g} . \diamond

Ejemplo 5.13. Sea $\{h, e, f\}$ la base usual de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, introducida en la Definición 1.39. Como $\dim \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = 3$, la acción adjunta $x \triangleright v := (\text{ad } x)v = [x, v]$ corresponde con el caso $\lambda = r = 2$ de las fórmula (1.18), de donde se calcula que

$$\text{ad } h \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{ad } e \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad } f \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo inmediato da $\langle h, h \rangle = \text{tr}[(\text{ad } h)^2] = 8$, $\langle e, f \rangle = \langle f, e \rangle = \text{tr}[(\text{ad } e)(\text{ad } f)] = 4$, mientras $\langle h, e \rangle = \langle h, f \rangle = \langle e, e \rangle = \langle f, f \rangle = 0$. Entonces la base dual de $\{h, e, f\}$ es $\{h/8, f/4, e/4\}$, así que¹¹

$$8C = h^2 + 2ef + 2fe = h(h-2) + 4ef = h(h+2) + 4fe.$$

Es fácil calcular que $[C, h] = [C, e] = [C, f] = 0$, así que C es un elemento *central* del álgebra asociativa $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$. \diamond

Lema 5.14. Sea \mathfrak{g} una \mathbb{C} -álgebra de Lie semisimple. El elemento de Casimir $C \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ no depende de la base vectorial de \mathfrak{g} usada para definirlo; y C es central en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

⁹Se debe recordar que las notaciones $\mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ y $\text{End}_{\mathbb{C}} V$ son sinónimas.

¹⁰Una forma bilineal no degenerada establece un isomorfismo entre los espacios vectoriales V y V^* .

¹¹El factor 1/8 no afecta los argumentos que siguen.

Demostración. Sea $\{u_1, \dots, u_n\}$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ otro par de bases duales de \mathfrak{g} , relacionadas con las originales por

$$u_r := \sum_{i=1}^n a_{ir} x_i, \quad v_s := \sum_{j=1}^n b_{js} y_j.$$

Entonces

$$\llbracket r = s \rrbracket = \langle u_r, v_s \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ir} b_{js} \llbracket i = j \rrbracket = \sum_{k=1}^n a_{kr} b_{ks},$$

así que las matrices de transición obedecen $A^t B = 1_n$ o bien $B = A^{-t}$, de donde $A = B^{-t}$ así que $AB^t = 1_n$. Entonces

$$\sum_{r=1}^n u_r v_r = \sum_{i,j,r} a_{ir} b_{jr} x_i y_j = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Esto dice que $C = \sum_{r=1}^n u_r v_r$ y establece su independencia de las bases.

Si $z \in \mathfrak{g}$, entonces $[z, x_j] = \sum_{i=1}^n p_{ij} x_i$ y además $[z, y_i] = \sum_{j=1}^n q_{ji} y_j$ para ciertos coeficientes p_{ij}, q_{ji} . La asociatividad de la forma de Killing muestra que

$$p_{ij} = \langle [z, x_j], y_i \rangle = -\langle [x_j, z], y_i \rangle = -\langle x_j, [z, y_i] \rangle = -q_{ji},$$

esto es, $P = -Q^t$. El conmutador $[z, C]$ se puede calcular mediante la *regla de Leibniz* $[z, ab] = [z, a]b + a[z, b]$ para obtener

$$[z, C] = \sum_{j=1}^n [z, x_j] y_j + \sum_{i=1}^n x_i [z, y_i] = \sum_{i,j=1}^n p_{ij} x_i y_j + q_{ji} x_i y_j = 0.$$

Los elementos de \mathfrak{g} son generadores del álgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$; por lo tanto, C conmuta con todos los elementos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. \square

Lema 5.15. *Para un álgebra de Lie compleja semisimple, son equivalentes:*

- (a) *Cada representación finitodimensional de \mathfrak{g} es completamente reducible.*
- (b) *Si V es un \mathfrak{g} -módulo finitodimensional y si $U \subset V$ es un \mathfrak{g} -submódulo tal que $\dim(V/U) = 1$, entonces $V = U \oplus \mathbb{C}$ como \mathfrak{g} -módulos.*
- (c) *Si V es un \mathfrak{g} -módulo finitodimensional y si $U \subset V$ es un \mathfrak{g} -submódulo irreducible tal que $\dim(V/U) = 1$, entonces $V = U \oplus \mathbb{C}$ como \mathfrak{g} -módulos.*

Demostración. Las implicaciones (a) \implies (b) \implies (c) son triviales. Nótese, por el Corolario 5.10, que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Esto implica que un \mathfrak{g} -módulo de rango 1 es trivial, porque $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ actúa como el operador nulo. El sumando \mathbb{C} en los enunciados (b) y (c) indica un \mathfrak{g} -módulo trivial: se usará subíndices, \mathbb{C}_1 y \mathbb{C}_2 , para distinguir casos.

Ad(c) \implies (b): Sigue por inducción sobre $\dim U$. Si U no es irreducible, incluye un \mathfrak{g} -submódulo W ; entonces se puede considerar los \mathfrak{g} -módulos $\bar{V} := V/W$ y $\bar{U} := U/W$, donde obviamente $\dim(\bar{V}/\bar{U}) = 1$. Por la hipótesis inductiva, se obtiene $\bar{V} = \bar{U} \oplus \mathbb{C}_1$. Si $\eta: V \rightarrow V/W$ es el homomorfismo cociente, sea $X := \eta^{-1}(\mathbb{C}_1)$; entonces $W \subset X$ con $\dim(X/W) = 1$, así que $X = W \oplus \mathbb{C}_2$ por la inducción también. Ahora nótese que $V = U \oplus \mathbb{C}_2$.

Ad(b) \implies (a): Sea $v \mapsto x \triangleright v$, para $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ una representación de \mathfrak{g} sobre V con $\dim V$ finita; y sea U un \mathfrak{g} -submódulo de V . Se debe exhibir un \mathfrak{g} -submódulo Z de V tal que $V \simeq U \oplus Z$.

El espacio \mathbb{C} -vectorial $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, U)$ es un \mathfrak{g} -módulo bajo la acción

$$\underline{x \cdot \tau}(v) := x \triangleright \tau(v) - \tau(x \triangleright v) \quad \text{para } x \in \mathfrak{g}, \tau \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, U), v \in V. \quad (5.3)$$

Fíjese que $\tau \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, U)$ es un operador entrelazante entre los \mathfrak{g} -módulos V y U si y solo si $x \cdot \tau = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

La restricción $R: \tau \mapsto \tau|_U : \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, U) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} U$ entrelaza las dos acciones de \mathfrak{g} de la forma (5.3). Al lado derecho, el \mathfrak{g} -módulo $\text{End}_{\mathbb{C}} U$ posee un submódulo unidimensional: los múltiplos de la identidad (es obvio que $x \cdot 1_U = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$).

Ahora sea $A := R^{-1}(\mathbb{C} 1_U)$ y $B := R^{-1}(0)$, estos son submódulos de $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, U)$ con $B \subset A$ y $\dim(A/B) = 1$. Por la hipótesis (b), vale $A = B \oplus \mathbb{C} \sigma$, para algún $\sigma \in A \setminus B$ tal que $x \cdot \sigma = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Esta $\sigma: V \rightarrow U$ es una aplicación entrelazante tal que $\sigma|_U = s 1_U$ para algún $s \neq 0$. Ahora colóquese $Z := \ker \sigma$. Se verifica fácilmente que $V \simeq \text{im } \sigma \oplus \ker \sigma = U \oplus Z$ como \mathfrak{g} -módulos. \square

Teorema 5.16 (Weyl). *Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie compleja semisimple, cada representación finitodimensional de \mathfrak{g} es completamente reducible.*

Demostración. Basta comprobar la propiedad (c) del enunciado del Lema 5.15. Sea V un \mathfrak{g} -módulo con $\dim V = n$ finita y U un \mathfrak{g} -submódulo irreducible con $\dim(V/U) = 1$. Fíjese que la representación cociente sobre V/U es trivial porque es de rango 1 y se sabe que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Si la acción de \mathfrak{g} sobre U es también trivial, entonces \mathfrak{g} actúa sobre V por matrices de la forma $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en bloques de lados $(n-1)$ y 1. Estas matrices obviamente conmutan; como $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, la acción es por matrices nulas: así, V es también un \mathfrak{g} -módulo trivial.

Si U es un \mathfrak{g} -módulo no trivial, escribáse $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$ como suma directa de ideales simples (por el Corolario 5.9). El elemento de Casimir de \mathfrak{g} entonces tiene la forma $C = C_1 + \cdots + C_r$ donde cada C_i es el Casimir de \mathfrak{g}_i y todos conmutan con cada $x \in \mathfrak{g}$. Por el lema de Schur, cada C_i actúa sobre U como un múltiplo de 1_U ; como U no es trivial, al menos uno de los C_i actúa por un múltiplo no nulo.

Entonces hay un autovalor $\lambda \neq 0$ tal que $C_i \triangleright u = \lambda u$ para todo $u \in U$. Como C_i actúa trivialmente sobre V/U , el número 0 es también un autovalor de C_i . Luego hay un autovector $v \in V$ con $C_i \triangleright v = 0$. Nótese que

$$C_i \triangleright (x \triangleright v) = x \triangleright (C_i \triangleright v) = x \triangleright 0 = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{g},$$

porque C_i es central en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Esto dice que cada $x \triangleright v \in \mathbb{C}v$ porque el autoespacio de 0 para la acción de C_i es unidimensional. Entonces $\mathbb{C}v$ es un \mathfrak{g} -módulo, con $V = U \oplus \mathbb{C}v$. El resultado sigue del Lema 5.15. \square

► De ahora en adelante, \mathfrak{g} denotará un álgebra de Lie *semisimple compleja*. Se ha visto que \mathfrak{g} es una suma directa de álgebras de Lie simples (Corolario 5.9) y análogamente para los \mathfrak{g} -módulos finitodimensionales (por el teorema de Weyl). Entonces será suficiente averiguar la estructura de cada álgebra de Lie compleja simple.

5.2 Subálgebras de Cartan

Un operador lineal sobre un espacio \mathbb{C} -vectorial tiene una *descomposición de Jordan*, como sigue.

Lema 5.17. *Sea V un espacio vectorial compleja de dimensión finita. Cada $T \in \text{End}_{\mathbb{C}} V$ es una suma $T = T_s + T_n$ de manera única, donde T_s es diagonalizable, T_n es nilpotente, $T_s T_n = T_n T_s$, y hay polinomios $p, q \in \mathbb{C}[x]$ tales que $T_s = p(T)$ y $T_n = q(T)$.*

Demostración. Elíjase una base de V para la cual la matriz A de T tiene la forma normal de Jordan. Cada bloque de Jordan $J_{m_i, \lambda_i} = \lambda_i 1_{m_i} + J_{m_i, 0}$ es la suma de una matriz diagonal y una matriz triangular estricta; y la suma directa $A =: A_s + A_n$ de tales bloques tiene la misma propiedad. Sea T_s el operador cuya matriz es A_s y T_n el operador cuya matriz es A_n ; A_s es diagonal y A_n es nilpotente. La conmutación $T_s T_n = T_n T_s$ es evidente en cada bloque: $\lambda_i 1_{m_i}$ conmuta con $J_{m_i, 0}$.

Sea p un polinomio, con término constante 0, tal que $p(x) \equiv \lambda_i \pmod{(x - \lambda_i)^{m_i}}$ para cada autovalor λ_i de T : tal polinomio existe por el teorema chino del residuo. Sea $q(x) := x - p(x)$. Entonces $p(T) = T_s$ y $q(T) = T - T_s = T_n$.

Si $T - T'_s - T'_n$ es otra descomposición del mismo tipo, entonces $T_s - T'_s = T'_n - T_n$ y las cuatro partes conmutan (por ser polinomios en T). Luego T_s y T'_s son diagonalizables *simultáneamente*, así que $T_s - T'_s$ es también diagonalizable. Al aplicar el teorema binomial a la potencia $(T'_n - T_n)^k$ para k grande, se ve que $T'_n - T_n$ es nilpotente. Pero una matriz diagonal nilpotente es cero: luego $T'_s = T_s$ y $T'_n = T_n$. \square

Dícese que T_s es la **parte semisimple**¹² de T y que T_n es la **parte nilpotente** de T .

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie compleja semisimple. La acción adjunta $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ es *inyectiva*: si $\text{ad } x = 0$, entonces $\langle x, y \rangle = \text{tr}[(\text{ad } x)(\text{ad } y)] = 0$ para todo y , luego $x = 0$ porque la forma de Killing es no degenerada. Entonces cada $x \in \mathfrak{g}$ tiene una (única) **descomposición de Jordan** $x = x_s + x_n$ determinada por $\text{ad } x = (\text{ad } x)_s + (\text{ad } x)_n$ al pedir que $\text{ad}(x_s) := (\text{ad } x)_s$ y $\text{ad}(x_n) := (\text{ad } x)_n$. Desde luego, se dice que x_s es la *parte semisimple* y que x_n es su *parte nilpotente* del elemento $x \in \mathfrak{g}$.

► Si \mathfrak{k} es una subálgebra no abeliana de \mathfrak{g} , hay un elemento $x \in \mathfrak{k}$ tal que $\text{ad } x \neq 0$ en $\mathfrak{gl}(\mathfrak{k})$. Sea $y \in \mathfrak{k}$ un autovector para $(\text{ad } x)$ con autovalor $\mu \neq 0$; entonces $x, y \in \mathfrak{k}$ obedecen $[x, y] = \mu y \neq 0$. Si $U = \text{lin}\langle x, y \rangle$, entonces las relaciones $[y, x] = -\mu y$, $[y, y] = 0$ dicen que $(\text{ad } y)|_U$ tiene la matriz nilpotente $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y por lo tanto $y \in \mathfrak{k}$ no es un elemento semisimple.

En consecuencia, si todos los elementos de una subálgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ son semisimples, entonces *esa subálgebra es abeliana*. Entonces todos los operadores $\{\text{ad } h : h \in \mathfrak{h}\}$ son diagonalizables *simultáneamente*: existe una base de \mathfrak{g} para la cual todos los $(\text{ad } h)$ tienen matrices diagonales.

Definición 5.18. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie compleja semisimple. Una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} es **toral**¹³ (y por ende abeliana) si consiste de elementos semisimples $x = x_s$. Una *subálgebra toral maximal* \mathfrak{h} es una **subálgebra de Cartan** de \mathfrak{g} . \diamond

Lema 5.19. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie compleja semisimple. Una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} no es nula.*

Demostración. Sea $x \in \mathfrak{g}$ con descomposición de Jordan $x = x_s + x_n$. Si fuera $x = x_n$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, entonces el álgebra de Lie \mathfrak{g} sería nilpotente, por el teorema de Engel

¹²Aquí el término *semisimple* es sinónimo de *diagonalizable*: una matriz diagonal es la suma directa de matrices 1×1 . Dicho de otro modo: un operador lineal es semisimple si y solo si su polinomio mínimo tiene raíces distintas.

¹³Bajo la aplicación exponencial desde una forma real de \mathfrak{g} y un grupo de Lie compacto, la imagen de una subálgebra toral es un grupo de Lie compacto, conexo y abeliano: en otros palabras, es un **toro**, un producto directo de círculos.

(Proposición 5.5), contrario a hipótesis. Tómese $x \in \mathfrak{g}$ con $x_s \neq 0$, así que $\mathbb{C}x_s$ es una subálgebra toral de \mathfrak{g} . Luego, una subálgebra toral maximal tiene dimensión ≥ 1 . \square

Definición 5.20. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie compleja semisimple y sea \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} . Los operadores $(\text{ad } h): x \mapsto [h, x]$, para $h \in \mathfrak{h}$, conmutan y por tanto poseen *autovectores simultáneos*:

$$[h, x] = \alpha(h)x \quad \text{con } x \neq 0, \quad \text{para todo } h \in \mathfrak{h}.$$

Los autovalores $\alpha(h)$ dependen linealmente de h . Dejando de lado el caso $\alpha = 0$ (que corresponde a autovectores $x \in \mathfrak{h}$), hay un número finito de formas lineales no nulas $\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ tales que los siguientes *autoespacios* no son nulos:

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} : [h, x] = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\} \quad (5.4)$$

cumplen $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$. Estas formas lineales α son las **raíces** de \mathfrak{g} relativas a \mathfrak{h} . Los espacios vectoriales \mathfrak{g}_α se llaman **espacios radicales** de \mathfrak{g} (relativos a \mathfrak{h}).¹⁴ \diamond

Ejemplo 5.21. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \text{lin}\langle h, e, f \rangle$ en la notación de la Definición 1.39, se ha comprobado que $(\text{ad } e)$ y $(\text{ad } f)$ son nilpotentes y que $(\text{ad } h)$ es diagonalizable. En este caso, $\mathfrak{h} := \mathbb{C}h$ es una subálgebra de Cartan de dimensión 1. Si $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ es la forma lineal definida por $\alpha(h) := 2$, entonces $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}e$ y $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathbb{C}f$. Fíjese que

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

y luego hay exactamente dos raíces, α y $-\alpha$, en este ejemplo. \diamond

Denótese por $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ el conjunto de raíces de \mathfrak{g} relativas a \mathfrak{h} . Esta es una parte finita de $\mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$. Sea \mathfrak{g}_0 el subespacio de \mathfrak{g} donde cada $(\text{ad } h)$ actúa como 0; se ve que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_0$ porque \mathfrak{h} es abeliano.

Lema 5.22. *Con respecto a la forma de Killing, el espacio vectorial \mathfrak{g} se descompone en una suma directa ortogonal:*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\pm\alpha \in \Phi} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}). \quad (5.5a)$$

La restricción de la forma de Killing a \mathfrak{g}_0 es no degenerada.

¹⁴Aunque los raíces se definen relativos a una subálgebra de Cartan, resulta que todas las subálgebras de Cartan son conjugadas bajo automorfismos internos de \mathfrak{g} – véase la sección 16.4 del libro de Humphreys – así que el sistema de raíces es esencialmente una propiedad de \mathfrak{g} .

Demostración. Si se escribe la identidad de Jacobi en la forma

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]],$$

entonces si $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_\beta$, resulta

$$[h, [x, y]] = \alpha(h)[x, y] + \beta(h)[x, y] = (\alpha + \beta)(h)[x, y],$$

así que $x, y \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$; esto es, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. (En muchos casos, como se verá, resulta que $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = \{0\}$; si así fuera, $\alpha + \beta \in \mathfrak{h}^*$ pero $\alpha + \beta \notin \Phi$.)

Además, se ve que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subseteq \mathfrak{g}_0$ por la misma razón; esto dice que \mathfrak{g}_0 es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} .

Si $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$ y si $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_\beta$, entonces

$$\alpha(h)\langle x, y \rangle = \langle [h, x], y \rangle = -\langle x, [h, y] \rangle = -\beta(h)\langle x, y \rangle.$$

Entonces $\beta = -\alpha$ o bien $\langle x, y \rangle = 0$: los \mathfrak{g}_α son ortogonales entre sí,¹⁵ con la excepción de los casos $\beta = -\alpha$. Esto verifica la descomposición (5.5).

La forma de Killing es no degenerada sobre \mathfrak{g} . Si $z \in \mathfrak{g}_0$ y si $\langle z, x \rangle = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}_0$, entonces $\langle z, y \rangle = 0$ para todo $y \in \mathfrak{g}$ porque los otros \mathfrak{g}_α son ortogonales a \mathfrak{g}_0 . Luego $z = 0$; por eso, la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es no degenerada sobre la subálgebra \mathfrak{g}_0 . \square

Proposición 5.23. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie compleja semisimple y sea \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} . Entonces $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.*

Demostración. Fíjese que $x \in \mathfrak{g}_0$ si y solo si $(\text{ad } x)(\mathfrak{h}) = \{[x, h] : h \in \mathfrak{h}\} = \{0\}$. En ese caso $(\text{ad } x_s)(\mathfrak{h}) = \{0\}$ porque $\text{ad } x_s = (\text{ad } x)_s = p(\text{ad } x)$ para algún polinomio p con coeficiente constante 0; luego $x_s \in \mathfrak{g}_0$ y de rebote $x_n = x - x_s \in \mathfrak{g}_0$.

Si $x \in \mathfrak{g}_0$, la subálgebra abeliana $\mathfrak{h} + \mathbb{C}x_s$ es toral, luego $\mathfrak{h} + \mathbb{C}x_s = \mathfrak{h}$. Por lo tanto, $x_s \in \mathfrak{h}$ para todo $x \in \mathfrak{g}_0$.

Si $h \in \mathfrak{h}$ cumple $\langle h, k \rangle = 0$ para todo $k \in \mathfrak{h}$, y si $x \in \mathfrak{g}_0$, entonces $(\text{ad } x_n) = (\text{ad } x)_n$ es nilpotente y conmuta con $(\text{ad } h)$. Esto implica que $(\text{ad } h)(\text{ad } x_n)$ es un operador nilpotente, de traza cero; en otras palabras, $\langle h, x_n \rangle = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}_0$. Como $x_s \in \mathfrak{h}$, se concluye que $\langle h, x \rangle = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}_0$. El Lema 5.22 entonces implica que $h = 0$. En resumen: *la restricción de la forma de Killing a \mathfrak{h} es no degenerada.*

Ahora se puede descomponer $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$, una suma directa ortogonal con respecto a la forma de Killing.¹⁶ Si $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}_0 \in \mathfrak{h}^\perp$, $k \in \mathfrak{h}^\perp$, vale $\langle h, [x, k] \rangle = \langle [h, x], k \rangle = 0$, así

¹⁵Nótese que $\langle x, x \rangle = 0$ en el caso $\beta = \alpha$; esto dice los autovectores en \mathfrak{g}_α son *isotrópicos*.

¹⁶La no degeneración de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre \mathfrak{h} implica que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp = \{0\}$.

que $[x, k] \in \mathfrak{h}^\perp$. Entonces \mathfrak{h}^\perp es un ideal de \mathfrak{g}_0 . En el álgebra de Lie \mathfrak{g}_0 , cada operador $(\text{ad } k)$, para $k \in \mathfrak{h}^\perp$, es nilpotente por el argumento del párrafo anterior. El teorema de Engel muestra que el álgebra de Lie \mathfrak{h}^\perp es nilpotente, así que la forma de Killing restringida a \mathfrak{h}^\perp es idénticamente nula. Luego $\mathfrak{h}^\perp = \{0\}$ y por lo tanto $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. \square

Ahora se puede reescribir la descomposición (5.5a) de manera más exacta:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\pm\alpha \in \Phi} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}). \quad (5.5b)$$

La forma de Killing, por ser no degenerada sobre \mathfrak{h} , define un isomorfismo entre \mathfrak{h} y su espacio dual \mathfrak{h}^* . En particular, si $\alpha \in \Phi$ hay un único vector $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que

$$\alpha(h) = \langle h, t_\alpha \rangle \quad \text{para todo } h \in \mathfrak{h}. \quad (5.6)$$

Proposición 5.24. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie compleja semisimple, \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan, $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Entonces Φ genera el espacio vectorial \mathfrak{h}^* ; y para cada $\alpha \in \Phi$,*

- (a) *la forma lineal $-\alpha$ es otra raíz: $-\alpha \in \Phi$.*
- (b) *Si $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, entonces $[x, y] = \langle x, y \rangle t_\alpha$. Por lo tanto, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C} t_\alpha$.*
- (c) *$\langle t_\alpha, t_\alpha \rangle = \alpha(t_\alpha) \neq 0$.*
- (d) *Hay elementos $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ tales que $\text{lin}\langle h_\alpha, e_\alpha, f_\alpha \rangle \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.*

Demostración. Si fuera $\text{lin}\langle \Phi \rangle \neq \mathfrak{h}^*$, habría un vector $h \neq 0$ en \mathfrak{h} tal que $\beta(h) = 0$ para todo $\beta \in \Phi$. Entonces sería $[h, x] = 0$ para cada $x \in \mathfrak{g}_\beta$ y también para $x \in \mathfrak{h}$ por ser \mathfrak{h} abeliana; en fin, $[h, x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Entonces sería $\langle h, [x, y] \rangle = \langle [h, x], y \rangle = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Pero $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ porque \mathfrak{g} es semisimple, de donde $\langle h, z \rangle = 0$ para todo $z \in \mathfrak{g}$, lo que contradice $h \neq 0$ (por la Proposición 5.8). Luego $\text{lin}\langle \Phi \rangle = \mathfrak{h}^*$.

Ad(a): Si fuera $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \{0\}$, el espacio radical \mathfrak{g}_α sería ortogonal a \mathfrak{g}_β para todo $\beta \in \Phi \cup \{0\}$. Pero entonces \mathfrak{g}_α sería ortogonal a todo \mathfrak{g} ; como la forma de Killing es no degenerada porque \mathfrak{g} es semisimple, esto implicaría que $\mathfrak{g}_\alpha = \{0\}$, contrario a $\alpha \in \Phi$.

Ad(b): Para cada $h \in \mathfrak{h}$, vale

$$\langle h, [x, y] \rangle = \langle [h, x], y \rangle = \alpha(h) \langle x, y \rangle = \langle h, t_\alpha \rangle \langle x, y \rangle,$$

así que $\langle h, [x, y] - \langle x, y \rangle t_\alpha \rangle = 0$. Pero $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, luego $[x, y] - \langle x, y \rangle t_\alpha \in \mathfrak{h}$. Como la forma de Killing es no degenerada sobre \mathfrak{h} por la demostración de la Proposición 5.23, se concluye que $[x, y] - \langle x, y \rangle t_\alpha = 0$.

Obsérvese que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq \{0\}$, pues de lo contrario sería $\langle \mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha} \rangle = 0$ y por ende \mathfrak{g}_α sería ortogonal a todo \mathfrak{g} . Entonces $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C} t_\alpha$ es unidimensional.

Ad(c): La forma de Killing establece un isomorfismo entre \mathfrak{g}_α^* y $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Entonces existen $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tales que $\langle x, y \rangle = 1$. Si fuera $\alpha(t_\alpha) = 0$, serían

$$[t_\alpha, x] = 0, \quad [t_\alpha, y] = 0, \quad [x, y] = t_\alpha.$$

Luego $\mathfrak{k} := \text{lin}\langle t_\alpha, x, y \rangle$ sería una subálgebra de Lie *nilpotente* de \mathfrak{g} , pues $[\mathfrak{k}, [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]] = \{0\}$. Por el teorema de Lie, $\text{ad } t_\alpha$ sería nilpotente y a la vez semisimple (porque $t_\alpha \in \mathfrak{h}$), así que $\text{ad } t_\alpha = 0$, lo cual contradice (5.6).

Ad(d): Tómese $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$. Existe (al menos) un vector $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que

$$\langle e_\alpha, f_\alpha \rangle = \frac{2}{\langle t_\alpha, t_\alpha \rangle}; \quad \text{tómese } h_\alpha := \frac{2t_\alpha}{\langle t_\alpha, t_\alpha \rangle}.$$

Entonces $[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha$ por la parte (b). Se calcula que

$$[h_\alpha, e_\alpha] = \alpha(h_\alpha) e_\alpha = \frac{2\alpha(t_\alpha)}{\langle t_\alpha, t_\alpha \rangle} e_\alpha = 2e_\alpha, \quad (5.7)$$

y de modo similar $[h_\alpha, f_\alpha] = -\alpha(h_\alpha) f_\alpha = -2f_\alpha$. Entonces $\text{lin}\langle h_\alpha, e_\alpha, f_\alpha \rangle$ es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} que cumple las relaciones de conmutación (1.16), y por tanto es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. \square

Definición 5.25. Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie compleja semisimple, con subálgebra de Cartan \mathfrak{h} , la forma de Killing es no degenerada sobre \mathfrak{h} , como ya se ha visto. Esto establece un isomorfismo \mathbb{C} -vectorial $\mathfrak{h}^* \simeq \mathfrak{h}$ que incluye la correspondencia $\alpha \leftrightarrow t_\alpha$ para $\alpha \in \Phi$. Mediante este isomorfismo, se puede trasladar la forma de Killing a una forma bilineal no degenerada sobre \mathfrak{h}^* , denotada también por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En particular, si $\alpha, \beta \in \Phi$, se define

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \langle t_\alpha, t_\beta \rangle = \alpha(t_\beta) = \beta(t_\alpha) = \frac{1}{2} \langle \alpha, \alpha \rangle \beta(h_\alpha). \quad (5.8)$$

Fíjese que $\beta(h_\alpha) = \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ en términos con la forma de Killing dual. \diamond

Lema 5.26. Los $\beta(h_\alpha)$ que aparecen en (5.8) son números enteros.

Demostración. Sea $\mathfrak{l}_\alpha := \text{lin}\langle h_\alpha, e_\alpha, f_\alpha \rangle$ en la demostración de la Proposición 5.24. La acción de \mathfrak{l}_α sobre \mathfrak{g} es una suma directa de representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Por la Proposición 1.42, los autovalores de $(\text{ad } h_\alpha)$ son enteros. Como $[h_\alpha, e_\beta] = \beta(h_\alpha) e_\beta$, se deduce que $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$. \square

5.3 Sistemas de raíces

En esta sección, \mathfrak{g} denotará un álgebra de Lie compleja semisimple, \mathfrak{h} será una subálgebra de Cartan fija de \mathfrak{g} y $\Phi \subset \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ el conjunto de raíces de \mathfrak{g} relativo a \mathfrak{h} .

Para cada par de raíces opuestas $\pm\alpha \in \Phi$, hay una subálgebra $\mathfrak{sl}_\alpha := \text{lin}\langle h_\alpha, e_\alpha, f_\alpha \rangle$ de \mathfrak{g} dada por la Proposición 5.24(d). En vista de (5.6), se sabe que $t_{-\alpha} = -t_\alpha$ en \mathfrak{h} , así que $h_{-\alpha} = -h_\alpha$ por (5.7). Sin perder generalidad, se puede suponer que $e_{-\alpha} = f_\alpha$ en $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ y luego $f_{-\alpha} = e_\alpha$ en \mathfrak{g}_α por (5.7) también. Entonces $\mathfrak{sl}_{-\alpha} = \mathfrak{sl}_\alpha$; el número de tales subálgebras¹⁷ de \mathfrak{g} es $\frac{1}{2}|\Phi|$.

Lema 5.27. *Para cada $\alpha \in \Phi$, $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. Si $c\alpha \in \Phi$ con $c \in \mathbb{C}$, entonces $c = \pm 1$.*

Demostración. Considérese la siguiente suma directa de subespacios de \mathfrak{g} :

$$V := \mathbb{C} f_\alpha \oplus \mathbb{C} h_\alpha \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathfrak{g}_{k\alpha}.$$

Es evidente que V es invariante bajo $(\text{ad } e_\alpha)$ y $(\text{ad } f_\alpha)$. El conmutador

$$[(\text{ad } e_\alpha)|_V, (\text{ad } f_\alpha)|_V] = (\text{ad } h_\alpha)|_V \in \text{End}_{\mathbb{C}} V$$

tiene traza cero: $\text{tr}[(\text{ad } h_\alpha)|_V] = 0$ (por ser un conmutador). Si $d_k = \dim \mathfrak{g}_{k\alpha}$, esta traza es

$$0 = \alpha(h_\alpha) \left(-1 + 0 + \sum_{k=1}^{\infty} k d_k \right).$$

Como $\alpha(h_\alpha) = 2$, se concluye que $d_1 = 1$ y $d_k = 0$ para $k \geq 2$. Esto dice que $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ y $\alpha \in \Phi \implies k\alpha \notin \Phi$ para $k = 2, 3, \dots$. Al aplicar el mismo argumento a la raíz $-\alpha$, se obtiene también que $k\alpha \notin \Phi$ para $k = -2, -3, \dots$.

Si $\beta = c\alpha \in \Phi$ con $c \in \mathbb{C}^\times$, entonces $\alpha = c^{-1}\beta$. Por el Lema 5.26, $2c = \beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ y $2c^{-1} = \alpha(h_\beta) \in \mathbb{Z}$, así que $c \in \{\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2\}$. Pero los casos $\beta = \pm 2\alpha$ y $\alpha = \pm 2\beta$ están excluidos por el argumento anterior, así que $c = \pm 1$. \square

Si $\beta \in \Phi$ con $\beta \neq \pm\alpha$, entonces $[e_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\beta+\alpha}$ y $[f_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\beta-\alpha}$. Considérese el siguiente subespacio vectorial de \mathfrak{g} (obviamente finitodimensional, por tanto casi todos los sumandos son ceros):

$$W_\beta := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}.$$

Nótese que $\beta + j\alpha \neq 0$ en \mathfrak{h}^* para todo j en vista del Lema 5.27. Hay algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}_{\beta+j\alpha} = \{0\}$ para $j > k$ pero $\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} \neq \{0\}$, es decir, $\beta + k\alpha \in \Phi$.

¹⁷Nótese que $|\Phi|$ es par, porque $\alpha \in \Phi \implies -\alpha \in \Phi$ por la Proposición 5.24(a).

Fíjese que W_β es un espacio invariante bajo la acción adjunta de \mathfrak{sl}_α y ad h_α actúa sobre W_β con autovalores distintos $\beta(h_\alpha) + 2j \in \mathbb{Z}$. En este juego de autovalores, el valor 0 ocurre una sola vez si $\beta(h_\alpha)$ es par; el valor 1 ocurre una sola vez si $\beta(h_\alpha)$ es impar. Cada \mathfrak{sl}_α -submódulo de W_β posee un autovector de $(\text{ad } h_\alpha)$ de valor 0 o 1, en vista del Lema 1.41; se concluye que W_β es un \mathfrak{sl}_α -módulo *irreducible*.

Entonces cada $\beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$ es una entrada en una α -hilera:

$$\beta - l\alpha, \beta - (l-1)\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta + (k-1)\alpha, \beta + k\alpha \in \Phi \quad (5.9)$$

donde $k, l \in \mathbb{N}$, donde $W_\beta = \bigoplus_{j=-l}^k \mathfrak{g}_{\beta+j\alpha}$ tiene dimensión $k+l+1$ y los autovalores extremos de ad h_α son $(k+l)$ y $-(k+l)$, por la discusión después del Lema 1.41. Esto implica que $\beta(h_\alpha) = l-k$.

Lema 5.28. *Sea \mathfrak{h}_0^* el espacio vectorial real generado por Φ . Este es un \mathbb{R} -subespacio de \mathfrak{h}^* , con $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}_0^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ por la Proposición 5.24. Entonces la forma de Killing dual (5.8) es definida positiva sobre \mathfrak{h}_0^* .*

Demostración. Si $\beta, \gamma \in \Phi$, entonces

$$\langle \beta, \gamma \rangle = \langle t_\beta, t_\gamma \rangle = \text{tr}[(\text{ad } t_\beta)(\text{ad } t_\gamma)] = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(t_\beta) \alpha(t_\gamma) = \sum_{\alpha \in \Phi} \langle \alpha, \beta \rangle \langle \alpha, \gamma \rangle,$$

porque cada $(\text{ad } t_\beta)$ es diagonal con autovalores 0 sobre \mathfrak{h} y $\alpha(t_\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle$ sobre cada espacio unidimensional \mathfrak{g}_α .

Tómese $\Phi^+ \subset \Phi$ con $|\Phi^+| = \frac{1}{2}|\Phi|$ tal que $\alpha \in \Phi^+ \iff -\alpha \notin \Phi^+$. Si $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$ con $\lambda = \sum_{\beta \in \Phi^+} c_\beta \beta$ para algunos $c_\alpha \in \mathbb{R}$,¹⁸ entonces $\langle \alpha, \lambda \rangle = \sum_{\beta \in \Phi^+} c_\beta \langle \alpha, \beta \rangle$ y

$$\langle \lambda, \lambda \rangle = 2 \sum_{\alpha \in \Phi^+} \langle \alpha, \lambda \rangle^2$$

es una suma de cuadrados de números reales; luego $\langle \lambda, \lambda \rangle \geq 0$, con igualdad si y solo si $\langle \alpha, \lambda \rangle = \lambda(t_\alpha) = 0$ para cada α , si y solo si $\lambda = 0$ en \mathfrak{h}_0^* . \square

Definición 5.29. Para cada $\alpha \in \Phi$, defínase una **reflexión de raíces** $s_\alpha \in \text{End}_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_0^*$ por:

$$s_\alpha(\beta) := \beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \beta - \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha. \quad (5.10)$$

Esta receta define un operador \mathbb{R} -lineal sobre \mathfrak{h}_0^* . Es evidente que $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ y que su núcleo ($\ker s_\alpha$) es el hiperplano ortogonal a α . En otras palabras, s_α es una *reflexión* en el espacio euclidiano \mathfrak{h}_0^* ; es fácil ver que $s_\alpha^2 = 1$.

En términos de la hilera (5.9), se ve que $s_\alpha(\beta) = \beta + (k-l)\alpha$ también pertenece a esta hilera: luego $s_\alpha(\Phi) = \Phi$. \diamond

¹⁸Esta sumatoria no es única porque los $\alpha \in \Phi^+$ generalmente no son linealmente independientes.

► El espacio vectorial real \mathfrak{h}_0^* y el conjunto de raíces $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ es un ejemplo de una estructura combinatoria, que se puede estudiar sin referencia al álgebra de Lie subyacente.

Definición 5.30. Sea E un *espacio euclidiano* – un espacio \mathbb{R} -vectorial con un producto escalar definida positiva $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – de dimensión finita. Dícese que (E, Φ) es un **sistema de raíces** si $\Phi \subset E$ es un conjunto con las siguientes propiedades:

- (a) Φ es finito; $0 \notin \Phi$; y Φ genera E como espacio \mathbb{R} -vectorial.
- (b) Si $\alpha \in \Phi$, $c \in \mathbb{R}$, entonces $c\alpha \in \Phi$ si y solo si $c = \pm 1$.
- (c) Si $\alpha, \beta \in \Phi$, entonces $n_{\alpha, \beta} := 2 \langle \alpha, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.
- (d) Si $\alpha \in \Phi$, la reflexión $s_\alpha : \beta \mapsto \beta - n_{\alpha, \beta} \alpha$ deja Φ invariante.

El **rango**¹⁹ del sistema de raíces (E, Φ) es $l := \dim_{\mathbb{R}} E$.

El sistema (E, Φ) es **reducible** si $E = E_1 \oplus E_2$ (suma directa ortogonal) y además $\Phi = \Phi_1 \uplus \Phi_2$, donde (E_1, Φ_1) y (E_2, Φ_2) son sistemas de raíces individuales. Si no es así, se dice que (E, Φ) es **irreducible**. ◊

$$A_1 : \quad -\alpha \longleftarrow \bullet \longrightarrow \alpha$$

Figura 5.1: Un sistemas de raíces de rango 1

Ejemplo 5.31. En el caso unidimensional $E = \mathbb{R}$, la condición (b) implica que $\Phi = \{\pm 1\}$ es la única posibilidad (hasta un cambio de escala en el producto escalar). Esto ejemplifica el caso del álgebra de Lie simple $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, con $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h$, $\Phi = \{\pm\alpha\}$ donde $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ queda determinada por $\alpha(h) := 2$. Este sistema se denota por A_1 (Figura 5.1). ◊

Ejemplo 5.32. En el caso bidimensional $E \simeq \mathbb{R}^2$, hay varias posibilidades. Una de ellas es el sistema reducible $A_1 \oplus A_1$, para el cual $\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta\}$ donde $\alpha = (1, 0)$, $\beta = (0, 1)$.

Otra posibilidad es el sistema irreducible A_2 , con seis raíces:

$$\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\beta + \alpha)\}, \quad \text{donde} \quad \alpha = (1, 0), \quad \beta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

Luego $\beta + \alpha = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

¹⁹Si \mathfrak{h} es una subálgebra de una \mathfrak{g} semisimple, nótese que $l := \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^* = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_0^*$ no depende de \mathfrak{h} , porque todas subálgebra de Cartan son conjugadas. Dícese que l es el **rango** del álgebra de Lie semisimple \mathfrak{g} .

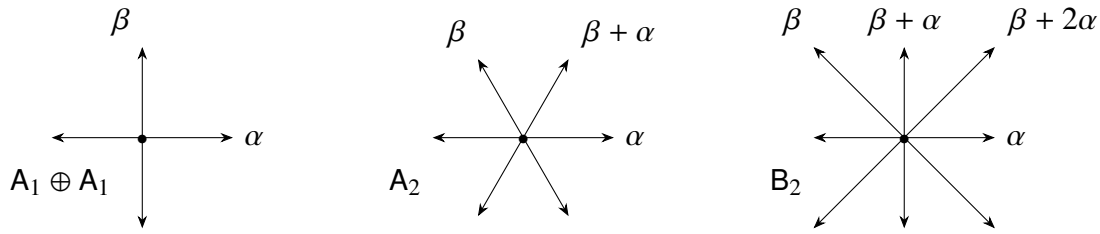


Figura 5.2: Tres sistemas de raíces de rango 2

Una posibilidad más es el sistema irreducible B_2 , con ocho raíces:

$$\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\beta + \alpha), \pm(\beta + 2\alpha)\}, \quad \text{donde } \alpha = (1, 0), \quad \beta = (-1, 1).$$

Luego $\beta + \alpha = (0, 1)$, $\beta + 2\alpha = (1, 1)$.

Estos tres sistemas de raíces están ilustradas en la Figura 5.2. En cada caso, se indica la α -hilera a través de β . ◇

Lema 5.33. *Sea (E, Φ) un sistema de raíces y sean $\alpha, \beta \in \Phi$ con $\beta \neq \pm\alpha$. El ángulo θ entre los vectores α y β (en el plano generado por α y β) toma uno de los siguientes valores:*

$$\theta \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} \right\}. \tag{5.11}$$

Demostración. Esto es una consecuencia de la propiedad (c) de un sistema de raíces: $n_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}$. Si $\|\alpha\| := \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ es la longitud del vector α en el espacio euclidiano E , entonces

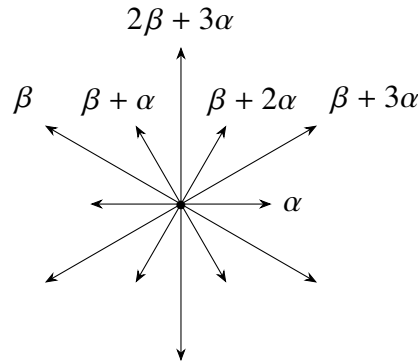
$$n_{\alpha,\beta}n_{\beta,\alpha} = \frac{4 \langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle} = 4 \cos^2 \theta, \tag{5.12}$$

al usar la fórmula $\langle \alpha, \beta \rangle =: \|\alpha\| \|\beta\| \cos \theta$ que define el ángulo θ . Ahora $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$ y la posibilidad $\cos \theta = \pm 1$ está excluida porque $\beta \neq \pm\alpha$. Por lo tanto,

$$n_{\alpha,\beta}n_{\beta,\alpha} \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad \text{así que } \cos \theta \in \left\{ 0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Estos siete valores de $\cos \theta$ corresponde con los ángulos en (5.11). □

La posibilidad $\theta = \pi/2$ es evidente en el caso reducible $A_1 \oplus A_2$ y también en B_2 . En el sistema A_2 se ven los ángulos $\pi/3$ y $2\pi/3$. En B_2 aparecen los ángulos $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$. Los casos remanentes $\pi/6$ y $5\pi/6$ aparecen en el ejemplo siguiente.


 Figura 5.3: El sistema de raíces G_2 , de rango 2

Ejemplo 5.34. El cuarto (y último) sistema de raíces de rango 2 incluye los raíces de A_2 y tiene un total de doce raíces (véase la Figura 5.3):

$$\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\beta + \alpha), \pm(\beta + 2\alpha), \pm(\beta + 3\alpha), \pm(2\beta + 3\alpha)\},$$

donde $\alpha = (1, 0)$, $\beta = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$. La α -hilera por β es $\{\beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \beta + 3\alpha\}$. Este sistema se denota por G_2 . \diamond

Ejemplo 5.35. El álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ tiene dimensión 8 sobre \mathbb{C} . Sus elementos diagonales forman una subálgebra toral de dimensión 2 (si $h = \text{diag}[a, b, c]$, la condición $\text{tr } h = 0$ dice que $a + b + c = 0$). Esta es una *subálgebra de Cartan* de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, porque una matriz que conmuta con cada $h \in \mathfrak{h}$ ya es diagonal.

En términos de las unidades matriciales E_{ij} de $M_3(\mathbb{C})$, los elementos $h_1 := E_{11} - E_{22}$ y $h_2 := E_{22} - E_{33}$ forman una base \mathbb{C} -vectorial de \mathfrak{h} . Las relaciones de conmutación

$$[h_1, E_{ij}] = (\delta_{1i} - \delta_{2i} - \delta_{1j} + \delta_{2j}) E_{ij}, \quad [h_2, E_{ij}] = (\delta_{2i} - \delta_{3i} - \delta_{2j} + \delta_{3j}) E_{ij},$$

muestran que los E_{ij} con $i \neq j$ constituyen 6 vectores radicales para \mathfrak{g} relativos a \mathfrak{h} .

Defínase tres formas \mathbb{C} -lineales e_1, e_2, e_3 sobre \mathfrak{h} por

$$e_k(h_1) := \delta_{1k} - \delta_{2k}, \quad e_k(h_2) := \delta_{2k} - \delta_{3k}.$$

Los e_k se obtienen por restricción de la base dual a la base $\{E_{11}, E_{22}, E_{33}\}$ de matrices diagonales en $M_3(\mathbb{C})$. Entonces las seis raíces de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ relativos a \mathfrak{h} son

$$e_1 - e_2, \quad e_1 - e_3, \quad e_2 - e_1, \quad e_2 - e_3, \quad e_3 - e_1, \quad e_3 - e_2.$$

Al colocar $\alpha := e_1 - e_2$, $\beta = e_2 - e_3$, se nota que $\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha + \beta)\}$.

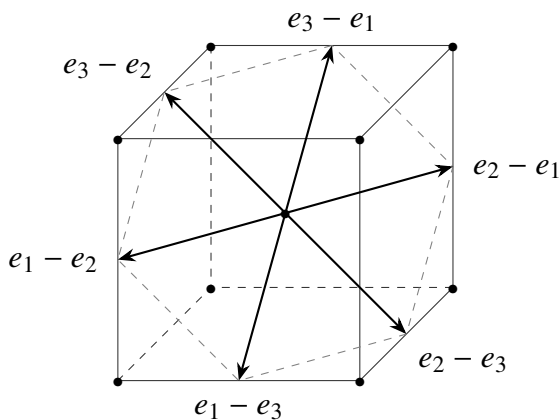


Figura 5.4: El sistema de raíces A_2 para $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

En este caso, $\mathfrak{h}_0^* = \mathbb{R}\text{-lin}\langle \alpha, \beta \rangle \simeq \mathbb{R}^2$. Al identificar $\{e_1, e_2, e_3\}$ con la base estándar de \mathbb{R}^3 , se obtiene²⁰

$$\pm(e_1 - e_2) \leftrightarrow (\pm 1, \mp 1, 0), \quad \pm(e_2 - e_3) \leftrightarrow (0, \pm 1, \mp 1), \quad \pm(e_1 - e_3) \leftrightarrow (\pm 1, 0, \mp 1).$$

Estos seis vectores son los puntos medios de las aristas del cubo con vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ que quedan en el plano $x + y + z = 0$. Véase la Figura 5.4. Es evidente que las seis raíces son vértices de un hexágono regular: se ha obtenido una instancia concreta del sistema de raíces A_2 . \diamond

Este ejemplo admite una generalización directa al álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(l + 1, \mathbb{C})$, con la subálgebra de Cartan \mathfrak{h} dada por las matrices diagonales de traza cero. El rango $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_0^* = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^* = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$ es igual a l . Con la base $\{h_1, \dots, h_l\}$ de \mathfrak{h} dada por $h_i := E_{ii} - E_{i+1, i+1}$, los E_{ij} para $i \neq j$ son vectores radicales; las raíces están dadas por

$$\Phi = \{ \pm(e_j - e_k) : 1 \leq j < k \leq l + 1 \},$$

donde $\{e_1, \dots, e_{l+1}\}$ es la base estándar de \mathbb{R}^{l+1} y $E = \mathfrak{h}_0^*$ se identifica con el hiperplano en \mathbb{R}^{l+1} ortogonal al vector $(1, 1, \dots, 1)$. Denótese por A_l este sistema de raíces.

Es fácil calcular los ángulos entre cualquier par de raíces.²¹ Fíjese que cada raíz es un vector de longitud $\sqrt{2}$ en E . La ecuación muestra que $e_j - e_k$ y $e_r - e_s$ son *ortogonales* si $\{j, k\} \cap \{r, s\} = \emptyset$. En cambio, si $j < k < r$ se ve que $\langle e_j - e_k, e_k - e_r \rangle = -1$, así que $4 \cos^2 \theta = 1$ por (5.12); el ángulo entre $e_j - e_k$ y $e_k - e_r$ es $\theta = 2\pi/3$.

²⁰Este sistema de raíces difiere del sistema A_2 en el Ejemplo 5.32 por un factor de escala $\sqrt{2}$; esta es una distinción irrelevante, porque no afecta los valores de los $n_{\alpha, \beta}$.

²¹En el caso de A_3 , las raíces en Φ resultan ser vértices de un *cuboctaedro*, que es uno de los poliedros arquimedianos en \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 5.36. En el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(5, \mathbb{C}) := \{X \in M_5(\mathbb{C}) : X^t I_5 = -I_5 X\}$, una subálgebra de Cartan está dada por $\mathfrak{h} = \mathbb{C}\text{-lin}\langle h_1, h_2 \rangle$ donde $h_1 := E_{11} - E_{33}$ y $h_2 := E_{22} - E_{44}$. Es fácil chequear que $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} = 10$; con cálculos similares a los del Ejemplo 5.35, se obtiene ocho raíces

$$\Phi = \{\pm e_1, \pm e_2, \pm(e_1 - e_2), \pm(e_1 + e_2)\},$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es la base dual a la base $\{E_{11}, E_{22}\}$ del primer bloque diagonal 2×2 . Entonces $E = \mathfrak{h}_0^* \simeq \mathbb{R}^2$: este es un sistema de rango 2. Con $\alpha := e_1$, $\beta := e_2 - e_1$, se ve que $\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\beta + \alpha), \pm(\beta + 2\alpha)\}$; el ángulo entre α y β es $3\pi/4$. Este es una instancia concreta del sistema de raíces B_2 .

Fíjese que en este caso hay raíces de dos longitudes: $\|\alpha\| = 1$ y $\|\beta\| = \sqrt{2}$. En el sistema B_2 hay cuatro **raíces largas** $\pm\beta, \pm(\beta + 2\alpha)$ y cuatro **raíces cortas** $\pm\alpha, \pm(\beta + \alpha)$. Véase la Figura 5.2 de nuevo. \diamond

La clasificación completa de los sistemas de raíces irreducibles es un cálculo bastante extenso.²² Resulta que hay cuatro series infinitas de sistemas de raíces, que corresponden a las álgebras de Lie clásicas:

$$A_l \leftrightarrow \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C}); \quad B_l \leftrightarrow \mathfrak{so}(2l+1, \mathbb{C}); \quad C_l \leftrightarrow \mathfrak{sp}(2l, \mathbb{C}); \quad D_l \leftrightarrow \mathfrak{so}(2l, \mathbb{C}).$$

Los únicos isomorfismos entre ellos ocurren en rangos bajos:

$$A_1 \simeq B_1 \simeq C_1; \quad B_2 \simeq C_2; \quad A_3 \simeq D_3; \quad D_2 \simeq B_1 \oplus B_1.$$

Nótese que $D_2 \leftrightarrow \mathfrak{so}(4, \mathbb{C})$ corresponde a un álgebra de Lie semisimple: $\mathfrak{so}(4, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$ – que posee una forma real $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$. Los demás casos corresponden a álgebras de Lie simples, con sistemas de raíces irreducibles.

Resulta también que hay exactamente cinco **sistemas de raíces excepcionales** (irreducibles):

$$E_6, \quad E_7, \quad E_8, \quad F_4, \quad G_2.$$

En cada caso, el subíndice indica el rango. Las dimensiones respectivas del álgebra de Lie \mathfrak{g} son: 78, 133, 248, 52 y 14.

²²La clasificación de las álgebras de Lie complejas simples fue lograda en la tesis doctoral de Élie Cartan en 1894, completando un trabajo anterior de Wilhelm Killing. El método de Cartan partió de una forma bilineal, introducida en esa tesis, que luego fue atribuido a Killing, la cual es no degenerada sobre álgebras de Lie semisimples (únicamente). Cartan encontró cinco álgebras de Lie simples que no corresponden a los grupos de Lie “clásicos”: estos son las álgebras de Lie excepcionales. La notación “alfabética” A_l, \dots, G_2 está tomada de la tesis de Cartan.

5.4 El grupo de Weyl

Las reflexiones s_α asociadas a un sistema de raíces (E, Φ) generan un grupo finito de permutaciones del conjunto Φ . Por otro lado, este grupo también es un subgrupo del grupo ortogonal $O(l)$ del espacio euclidiano $E \simeq \mathbb{R}^l$. En esta última sección se examinará brevemente el papel de este grupo de reflexiones y rotaciones del sistema de raíces.

Definición 5.37. Un **isomorfismo** de dos sistemas de raíces (E, Φ) y (F, Ψ) es una isometría²³ lineal biyectiva $\tau \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ tal que $\tau(\Phi) = \Psi$. Un **automorfismo** de (E, Φ) entonces es un aplicación ortogonal $\tau \in O(E)$ tal que $\tau(\Phi) = \Phi$.

Cada reflexión s_α es un automorfismo de (E, Φ) . El grupo generado por ellas, $\mathcal{W} \equiv \mathcal{W}_\Phi := \langle s_\alpha : \alpha \in \Phi \rangle$, es el **grupo de Weyl** de (E, Φ) . Este es *un grupo finito* porque sus elementos permutan el conjunto finito Φ . \diamond

Lema 5.38. Si $\tau \in \text{Aut}(E, \Phi)$ es un automorfismo del sistema de raíces (E, Φ) y si $\alpha \in \Phi$, entonces $\tau s_\alpha \tau^{-1} = s_{\tau(\alpha)}$. En consecuencia, \mathcal{W} es un subgrupo normal de $\text{Aut}(E, \Phi)$.

Demostración. Nótese que $\Phi = \{ \tau(\beta) : \beta \in \Phi \}$ porque $\tau : \Phi \rightarrow \Phi$ es biyectiva. Ahora

$$\tau s_\alpha \tau^{-1}(\tau(\beta)) = \tau(s_\alpha(\beta)) = \tau(\beta - n_{\alpha, \beta} \alpha) = \tau(\beta) - n_{\alpha, \beta} \tau(\alpha).$$

Además,

$$n_{\alpha, \beta} = \frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \frac{2 \langle \tau(\alpha), \tau(\beta) \rangle}{\langle \tau(\alpha), \tau(\alpha) \rangle} = n_{\tau(\alpha), \tau(\beta)},$$

así que $\tau s_\alpha \tau^{-1}(\tau(\beta)) = s_{\tau(\alpha)}(\tau(\beta))$. Esto dice que $\tau s_\alpha \tau^{-1}$ y $s_{\tau(\alpha)}$ son automorfismos de (E, Φ) que coinciden sobre Φ y por ende son iguales.

Cada elemento de \mathcal{W} es un producto finito de reflexiones $\sigma = s_\alpha s_\beta \cdots s_\lambda$; luego $\tau \sigma \tau^{-1} = s_{\tau(\alpha)} s_{\tau(\beta)} \cdots s_{\tau(\lambda)}$ es otro elemento de \mathcal{W} . Por to tanto, $\mathcal{W} \trianglelefteq \text{Aut}(E, \Phi)$. \square

Definición 5.39. Un juego de raíces $\underline{\Delta} := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$ es una **base** para el sistema de raíces (E, Φ) si Δ es una base \mathbb{R} -vectorial de E y además cada $\beta \in \Phi$ tiene la forma

$$\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_l \alpha_l \quad \text{con cada } k_i \in \mathbb{Z}, \quad (5.13)$$

donde bien todo $k_i \in \mathbb{N}$ (*no negativos*) o bien todo $k_i \in -\mathbb{N}$ (*no positivos*).

Dada una base Δ , sus elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ se llaman **raíces simples**. Se denota por Φ^+ el conjunto de **raíces positivas**, de la forma (5.13) con cada $k_i \in \mathbb{N}$. Si Φ^- denota su complemento, está claro que $\beta \in \Phi^+ \iff -\beta \in \Phi^-$, así que $|\Phi^+| = \frac{1}{2} |\Phi|$. \diamond

²³Una **isometría** $\tau : E \rightarrow F$ es una aplicación \mathbb{R} -lineal tal que $\|\tau(u)\| = \|u\|$ para $u \in E$, o equivalentemente, $\langle \tau(u), \tau(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in E$. Cualquier isometría es inyectiva; resulta ser biyectiva si y solo si $\dim E = \dim F$.

Ejemplo 5.40. En las Figuras 5.2 y 5.3 que muestran los sistemas de raíces de rango 2, la pareja $\Delta := \{\alpha, \beta\}$ es una base. Las raíces nombradas en estas figuras son, en cada caso, las raíces positivas con respecto a esta base: las raíces no nombradas son sus negativas.

En el Ejemplo 5.35, una base es $\Delta := \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$. Fíjese que la raíz $e_1 - e_3 = (e_1 - e_2) + (e_2 - e_3)$ es la otra raíz positiva.

Más generalmente, para el sistema A_l que corresponde al álgebra de Lie simple $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$, se puede usar la base $\Delta := \{e_j - e_{j+1} : j = 1, 2, \dots, l\}$. Las raíces positivas son los $e_j - e_k$ con $j < k$. \diamond

Lema 5.41. Si $\alpha \in \Delta$, entonces la reflexión s_α permuta las otras raíces positivas; es decir, s_α deja $\Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ invariante.

Demostración. Se puede suponer que $\alpha = \alpha_1$. Si $\beta \in \Phi^+$ con $\beta \neq \alpha$ (y obviamente $\beta \neq -\alpha$ porque $-\alpha \notin \Phi^+$), entonces β tiene la forma (5.13) con cada $k_i \geq 0$ y $k_j > 0$ para algún $j \geq 2$. Pero entonces

$$s_\alpha(\beta) = \beta - n_{\alpha,\beta} \alpha = (k_1 - n_{\alpha,\beta})\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_l\alpha_l$$

con el mismo coeficiente $k_j > 0$ para α_j . Esto obliga que *todos* los coeficientes estén en \mathbb{N} , así que $k_1 - n_{\alpha,\beta} \geq 0$ y $s_\alpha(\beta) \in \Phi^+$. La posibilidad $s_\alpha(\beta) = \alpha$ está excluida porque $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$. \square

Para comprobar la *existencia* de una base de raíces simples, se usa un argumento geométrico. Cada $\alpha \in \Delta$ determina un hiperplano $P_\alpha := \{v \in E : \langle \alpha, v \rangle = 0\} = P_{-\alpha} = \ker s_\alpha$, dejado fijo por la reflexión s_α . La unión $\bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$ de esta cantidad finita de hiperplanos tiene un complemento no vacío en E . (De hecho, este complemento es una unión disjunta de conos convexos abiertos, que suelen llamarse **cámaras de Weyl**.) Si $u \in E$ es un vector que no está en la unión de los P_α , el hiperplano ortogonal a u no pasa por Φ ; su “lado positivo” $\{v \in E : \langle u, v \rangle > 0\}$ incluye exactamente la mitad, $\Phi^+(u)$, de las raíces en Φ . Resulta que hay exactamente $l = \dim E$ raíces en $\Phi^+(u)$ que no pueden expresarse como sumas de dos o más otras raíces en $\Phi^+(u)$: estas forman una base, $\Delta(u)$. Sucede además que el conjunto $\Delta(u)$ solo depende de la cámara de Weyl que contiene el vector u .²⁴

Los ángulos entre raíces simples son rectos u obtusos: resulta que $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \leq 0$ si $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta$. En las Figuras 5.2 y 5.3, se exhiben los casos $\theta = \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4$ y $5\pi/6$.

Es obvio que (E, Φ) tiene varias bases (y por ende, varios juegos de “raíces positivas”). En efecto, hay una correspondencia biunívoca entre bases de (E, Φ) y las cámaras de

²⁴Para una demostración de estas afirmaciones, véase, por ejemplo, la sección 10.1 del libro de Humphreys.

Weyl en $E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$. Aunque es menos evidente, resulta también que el grupo \mathcal{W} permuta las cámaras de Weyl y por lo tanto también permuta las bases. En efecto, si Δ y Δ' son dos bases de (E, Φ) , existe un único²⁵ $\sigma \in \mathcal{W}$ tal que $\sigma(\Delta) = \Delta'$.

Ejemplo 5.42. Considérese el sistema de raíces A_l con raíces $\Phi = \{e_j - e_k : j \neq k\}$, donde $j, k \in \{1, \dots, l+1\}$. Al realizar el espacio E como un hiperplano en \mathbb{R}^{l+1} , cada $\sigma \in \mathcal{W}$ es la restricción a E de una isometría lineal de \mathbb{R}^{l+1} que deja E invariante. Si $\alpha = e_j - e_k$, la reflexión s_α la lleva en $-\alpha = e_k - e_j$ y deja fijo e_r para $r \notin \{j, k\}$. En otras, s_α está dada por la *transposición de ejes* $e_j \leftrightarrow e_k$ en \mathbb{R}^{l+1} .

Esas transposiciones dejan fija la diagonal $\mathbb{R}(1, 1, \dots, 1)$ y por ende dejan invariante (pero no fijo) su complemento ortogonal E . Sobre E , la acción de s_α es

$$e_j - e_k \leftrightarrow e_k - e_j, \quad e_r - e_k \leftrightarrow e_r - e_j, \quad e_r - e_s \leftrightarrow e_r - e_s,$$

para $r, s \notin \{j, k\}$. De este modo, las transposiciones $(j \leftrightarrow k) \in S_{l+1}$ actúan como biyecciones ortogonales de E que dejan Φ invariante. Como *las transposiciones generan el grupo* S_{l+1} , se ha comprobado que el grupo de Weyl del sistema A_l es $\mathcal{W} \simeq S_{l+1}$.

Cabe notar también que S_{l+1} está generado por las transposiciones $(j \leftrightarrow j+1)$, para $j = 1, \dots, l$; con relaciones conocidas. Esto ejemplifica otra proposición interesante: el grupo de Weyl \mathcal{W} está generado por las reflexiones en las raíces *simples* solamente: $\mathcal{W} = \langle s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_l} \rangle$ (con relaciones apropiadas). \diamond

► Una base de raíces simples permite clasificar los sistemas de raíces – y eventualmente las álgebras de Lie complejas semisimples – usando ciertas matrices con entradas enteras.

Definición 5.43. Sea (E, Φ) un sistema de raíces, con una base fija $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$. Sea $c_{ij} := n_{\alpha_i, \alpha_j}$ para $i, j = 1, \dots, l$. Entonces $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ y $c_{ii} = 2$ para cada i . La matriz $C = [c_{ij}] \in M_l(\mathbb{Z})$ es la **matriz de Cartan** para el sistema (E, Φ) .

Como el grupo de Weyl \mathcal{W} permuta las bases sin cambiar los valores de los c_{ij} , la matriz C no depende de la base Δ elegida. \diamond

La matriz de Cartan es no singular; sus entradas diagonales son iguales a 2; y sus entradas no diagonales están en $\{0, -1, -2, -3\}$. Si el sistema de raíces es reducible, su matriz de Cartan es una suma directa de bloques. Por lo tanto, la clasificación de sistema de raíces se reduce a la clasificación de matrices de Cartan irreducibles.²⁶

²⁵En otras palabras, la acción de \mathcal{W} sobre el conjunto de todas las bases es *transitiva* (existencia de σ) y *libre* (unicidad de σ).

²⁶Es posible simplificar la clasificación aun más, al asociar a cada matriz de Cartan un *grafo*, con un nodo para cada raíz simple y una flecha simple, doble o triple entre dos nodos si el elemento no diagonal correspondiente es $-1, -2$ o -3 , respectivamente. La clasificación de tales grafos fue descrita por Donald Coxeter (1934) y aplicados a los sistemas de raíces por Eugene Dynkin (1946).

Ejemplo 5.44. Las matrices de Cartan en $M_2(\mathbb{C})$ son las siguientes:

$$A_1 \oplus A_1 : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B_2 : \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

En los casos B_2 y G_2 , la matriz de Cartan no es simétrica. Al conjugar C por una matriz de permutación, hay un intercambio de filas y columnas, que corresponde a un reordenamiento de la base $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$. Por lo tanto, no se distingue entre tales matrices de Cartan. (En el caso 2×2 , no se distingue entre C y su transpuesta.) Módulo ese detalle, la lista de matrices de Cartan 2×2 es completa: hasta isomorfismo, los únicos sistema de raíces de rango 2 son los que aparecen en las Figuras 5.2 y 5.3. \diamond

► Vale la pena mencionar que el grupo de Weyl \mathcal{W} aparece también en la teoría de los grupos de Lie compactos, con una definición al parecer diferente. Si G es un grupo de Lie compacto (y conexo y *simple*, para simplificar), un **toro maximal** en G es un subgrupo cerrado conexo y abeliano T , de dimensión maximal. El toro T es isomorfo a un producto directo de círculos, $T \simeq U(1)^l$; su dimensión l es el *rango* de G . Por ejemplo, las matrices diagonales en el grupo compacto $SU(l+1)$ forman un toro maximal. Un célebre teorema de Weyl asegura que todos los toros maximales en G son conjugados.

El *normalizador* de T es el subgrupo $N_G(T) := \{g \in G : gTg^{-1} = T\}$. Está claro que $T \trianglelefteq N_G(T)$ porque T es abeliano. Resulta que²⁷ el grupo cociente $\mathcal{W}_G := N_G(T)/T$ es *finito*, y no depende del toro maximal T . Este es el **grupo de Weyl** de G .

El grupo $N_G(T)$ tiene una acción infinitesimal sobre el álgebra de Lie \mathfrak{g} de G y también sobre $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ (ellas son simples cuando G es un grupo de Lie simple). El espacio tangente \mathfrak{t} en la identidad de T es una subálgebra de Lie abeliana de \mathfrak{g} ; y $\mathfrak{h} := \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. La acción adjunta de T sobre \mathfrak{t} o \mathfrak{h} es trivial, así que $\mathcal{W}_G = N_G(T)/T$ actúa efectivamente sobre \mathfrak{h} y, por transposición, sobre \mathfrak{h}^* . Resulta que esta acción de \mathcal{W}_G sobre \mathfrak{h}^* permuta los raíces en $\Phi(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$! Se puede demostrar que esta acción de \mathcal{W}_G coincide exactamente con el grupo de Weyl \mathcal{W}_{Φ} del sistema de raíces.

Como ejemplo ilustrativo, considérese el grupo de Lie compacto $G = SU(l+1)$. Los conjugados del subgrupo T (matrices diagonales) son los gTg^{-1} , donde la matriz unitaria g lleva la base ortonormal usual $\{u_1, \dots, u_{l+1}\}$ de \mathbb{C}^{l+1} en otra base ortonormal. Las matrices en gTg^{-1} generalmente no son diagonales, con dos excepciones. Primero, g deja la base usual *fija* si y solo si $g \in T$. Segundo, g deja la base usual *invariante*, aunque posiblemente lo permuta, si $g \in N_G(T)$. Las coclases en $N_G(T)/T$ están representadas por las *matrices de permutación*: $g_{ij} = \llbracket j = \sigma(i) \rrbracket$ para algún $\sigma \in S_{l+1}$. Se concluye que $\mathcal{W}_G \simeq S_{l+1}$: este también es el grupo de Weyl de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$.

²⁷Véase, por ejemplo, los libros de Fulton y Harris, Procesi, o Simon.

5.5 Ejercicios sobre álgebras de Lie

Ejercicio 5.1. Si \mathfrak{k} y \mathfrak{l} son ideales de un álgebra de Lie \mathfrak{g} , mostrar que el subespacio $[\mathfrak{k}, \mathfrak{l}]$ es también un ideal de \mathfrak{g} .

Ejercicio 5.2. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y sean \mathfrak{l} y \mathfrak{n} ideales de \mathfrak{g} .

- (a) Si \mathfrak{l} y $\mathfrak{g}/\mathfrak{l}$ son solubles, mostrar que \mathfrak{g} es soluble.
- (b) Dar un ejemplo de un álgebra de Lie \mathfrak{g} con un ideal \mathfrak{n} tal que \mathfrak{n} y $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ son nilpotentes, pero \mathfrak{g} no es nilpotente.

Ejercicio 5.3. Si $B(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal simétrica sobre un espacio \mathbb{C} -vectorial V con base $\{e_1, \dots, e_n\}$, y si $b_{ij} := B(e_i, e_j)$, comprobar que B es no degenerada si y solo si la matriz $[b_{ij}]$ es invertible.

En el caso $V = \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$, calcular las matrices de la forma de Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para el álgebras de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, mostrando así que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ es semisimple.²⁸

Ejercicio 5.4. Sea $\mathfrak{g} := \mathbb{C}\text{-lin}\langle p, q, r, z \rangle$ el álgebra de Lie de dimensión 4 cuyo corchete está determinado por las siguientes relaciones de conmutación:

$$[p, q] = z, \quad [r, p] = q, \quad [q, r] = p, \quad [z, p] = [z, q] = [z, r] = 0.$$

Mostrar que \mathfrak{g} es soluble pero no es nilpotente.

Calcular la matriz de la forma de Killing sobre \mathfrak{g} respecto de esta base. (La forma de Killing de un álgebra de Lie soluble es degenerada pero no necesariamente nula.)²⁹

Ejercicio 5.5. En el álgebra de Lie matricial $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, mostrar que la forma de Killing obedece la relación $\langle x, y \rangle = 2n \operatorname{tr}(xy)$.

[[Indicación: usar la base $\{ E_{ij} : i \neq j \} \cup \{ E_{ii} - E_{i+1, i+1} : i = 1, \dots, n-1 \}$.]]

Ejercicio 5.6. Si \mathfrak{g} es semisimple y $C = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ es su elemento de Casimir, y si $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ es una representación de \mathfrak{g} , demostrar que $\rho(C) := \sum_{i=1}^n \rho(x_i) \rho(y_i)$ conmuta con $\rho(\mathfrak{g})$. Concluir que $\rho(C) = \lambda 1_V$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ si ρ es irreducible.

Ejercicio 5.7. Hay una inclusión $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ como la esquina superior izquierda. La acción adjunta entonces define una representación de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sobre $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Demostrar que $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \simeq V_0 \oplus V_1 \oplus V_1 \oplus V_2$ como \mathfrak{g} -módulos, donde $V_r := \text{lin}\langle v_0, \dots, v_r \rangle$ en la notación del Lema 1.41.

²⁸De hecho, el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ es *simple*.

²⁹La forma de Killing de un álgebra de Lie *nilpotente* es idénticamente nula; esta es una consecuencia del teorema de Lie.

A continuación, \mathfrak{g} es un álgebra de Lie compleja semisimple, \mathfrak{h} es una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} , Φ es el sistema de raíces de \mathfrak{g} relativo a \mathfrak{h} . Si $\alpha \in \Phi$, se denota por \mathfrak{g}_α su espacio radical.

Ejercicio 5.8. Denótese $\mathfrak{so}'(m, \mathbb{C}) := \{ X \in M_m(\mathbb{C}) : X^t = -X \}$; esta álgebra de Lie es isomorfa, pero no igual, a la $\mathfrak{so}(m, \mathbb{C})$ definida en el Ejercicio 1.20.

- (a) Sea $J_i := E_{2i-1,2i} - E_{2i,2i-1}$ para $2i \leq m$. Comprobar que J_i es un elemento semisimple de $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}'(m, \mathbb{C})$.
- (b) En los dos casos $m = 2l$ y $m = 2l + 1$, mostrar que $\mathfrak{h} := \mathbb{C}\text{-lin}\langle J_1, \dots, J_l \rangle$ es una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} .
- (c) Se sabe que $\dim(\mathfrak{so}'(4, \mathbb{C})) = 6$. Hallar 4 autovectores conjuntos para $(\text{ad } J_1)$ y $(\text{ad } J_2)$, mostrando que las raíces tienen la forma $\Phi = \{ \pm\alpha, \pm\beta \}$.

Ejercicio 5.9. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(m, \mathbb{C})$ – véase el Ejercicio 1.20. Para $m = 2l$ o bien $m = 2l + 1$, hallar matrices diagonales H_1, \dots, H_l en \mathfrak{g} tal que $\mathfrak{h} := \mathbb{C}\text{-lin}\langle H_1, \dots, H_l \rangle$ sea una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} .

Ejercicio 5.10. Mostrar que el álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(2l, \mathbb{C})$ del Ejercicio 1.20 coincide con

$$\mathfrak{g} = \left\{ X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} : A, B, C \in M_l(\mathbb{C}), B^t = B, C^t = C \right\}.$$

Comprobar que $\mathfrak{h} := \{ X \in \mathfrak{g} : B = C = 0, A \text{ es diagonal} \}$ es una subálgebra de Cartan.

Mostrar que los siguientes elementos generan³⁰ todos los espacios radicales \mathfrak{g}_α de \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} = e_i - e_j &: C = E_{ij} + E_{ji}, A = B = 0; \\ -\alpha_{ij} = -e_i - e_j &: B = E_{ij} + E_{ji}, A = C = 0; \\ \beta_{ij} = e_i - e_j &: A = E_{ij}, B = C = 0; \end{aligned}$$

donde $i \neq j$ en cada caso. Mostrar también, al calcular los autovalores $\alpha(h)$ en casos apropiados, que estas etiquetas $(\pm e_i \pm e_j)$ corresponden (mediante la forma de Killing dual) con un sistema de raíces $C_l = (\mathbb{R}^l, \Phi)$ en el espacio euclidiano \mathbb{R}^l .

Ejercicio 5.11. Sea $\Delta := \{ \alpha_1, \dots, \alpha_l \}$ un sistema de raíces simples para en $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ y sea Φ^+ las raíces positivas (Definición 5.39) correspondientes. Mostrar que el subespacio

$$\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

³⁰Por el Lema 5.27, cada $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}t_\alpha$ es unidimensional.

es una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} (pero no es un ideal). Demostrar que \mathfrak{b} es *soluble*; y además que es una subálgebra soluble maximal de \mathfrak{g} .

Ejercicio 5.12. Sea $\Delta := \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ un sistema de raíces simples para en $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Sea $\{h_i, e_i, f_i\}$ la base de la subálgebra \mathfrak{sl}_α – según la Proposición 5.24(d) – para $\alpha = \alpha_i$. Los números $c_{ij} := \alpha_i(h_{\alpha_j}) = n_{\alpha_i, \alpha_j}$ son las entradas de la matriz de Cartan para Φ .

Demostrar que estos elementos cumplen las siguientes **relaciones de Serre**:³¹

$$\begin{aligned} [h_i, h_j] &= 0; \\ [e_i, f_i] &= h_i, & [e_i, f_j] &= 0 \text{ si } i \neq j; \\ [h_i, e_j] &= c_{ij}e_j, & [h_i, f_j] &= -c_{ij}f_j; \\ (\text{ad } e_i)^{1-c_{ij}}(e_j) &= 0 \text{ si } i \neq j; \\ (\text{ad } f_i)^{1-c_{ij}}(f_j) &= 0 \text{ si } i \neq j. \end{aligned}$$

Ejercicio 5.13. El sistema de raíces A_3 está dado por los vectores

$$\Phi := \{ \pm(e_j - e_k) : 1 \leq j < k \leq 4 \}$$

en el hiperplano de \mathbb{R}^4 ortogonal al vector $(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$. Por otro lado, el sistema de raíces D_3 está dado por los vectores

$$\Psi := \{ \pm(e_i \pm e_j) : 1 \leq i < j \leq 3 \} \subset \mathbb{R}^3.$$

En cada caso, identificar una base $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ de raíces simples. Calcular las matrices de Cartan para los dos sistemas Φ y Ψ , comprobando que son iguales; concluir que $A_3 \simeq D_3$.

³¹Un teorema de Serre (véase el Teorema 18.3 del libro de Humphreys) asegura que $3l$ elementos que satisfacen estas relaciones generan un par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ cuyo sistema de raíces es Φ . De este modo, cualquier sistema de raíces abstracto viene de un álgebra de Lie semisimple \mathfrak{g} con subálgebra de Cartan \mathfrak{h} .

Índice General

1	Álgebras asociativas	4
1.1	Estructuras algebraicas	4
1.2	Acciones y representaciones	7
1.3	Ejemplos de álgebras asociativas	11
1.4	Productos tensoriales	18
1.5	El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$	25
1.6	Ejercicios sobre álgebras asociativas	28
2	Representaciones de álgebras finitodimensionales	36
2.1	Representaciones semisimples	36
2.2	Estructura de álgebras finitodimensionales	41
2.3	Representaciones indescomponibles	44
2.4	El carácter de una representación	48
2.5	Ejercicios sobre álgebras semisimples	49
3	Representaciones de grupos finitos	52
3.1	Semisimplicidad de las representaciones	52
3.2	El carácter de una representación	58
3.3	Relaciones de ortogonalidad de Schur	61
3.4	Representaciones inducidas	72
3.5	Ejercicios de representaciones de grupos	81
4	Representaciones del grupo S_n	87
4.1	La dualidad de Schur y Weyl	89
4.2	Los tableaux de Young	94
4.3	Polinomios de Schur	100
4.4	Representaciones de $GL(m, \mathbb{C})$	107
4.5	Ejercicios sobre representaciones de S_n	111
5	Estructura de álgebras de Lie	114
5.1	Álgebras de Lie semisimples	115
5.2	Subálgebras de Cartan	122
5.3	Sistemas de raíces	128
5.4	El grupo de Weyl	135
5.5	Ejercicios sobre álgebras de Lie	139