Resolución de problemas matemáticos en GeoGebra

Resolução de problemas no GeoGebra

Mathematical Problem Solving in GeoGebra

WILLIAM ENRIQUE POVEDA FERNANDEZ[1]

0000-0002-7245-8278

researchgate.net/profile/William_Poveda

geogebra.org/u/william.poveda11

http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p26-42

RESUMEN

En este artículo se analizan y discuten las ventajas y oportunidades que ofrece GeoGebra durante el proceso de resolución de problemas. En particular, se analizan y documentan las formas de razonamiento matemático exhibidas por ocho profesores de enseñanza secundaria de Costa Rica, relacionadas con la adquisición y el desarrollo de estrategias de resolución de problemas asociadas con el uso de GeoGebra. Para ello, se elaboró una propuesta de trabajo que comprende la construcción y la exploración de una representación del problema, y la formulación y la validación de conjeturas. Los resultados muestran que los profesores hicieron varias representaciones del problema, examinaron las propiedades y los atributos de los objetos matemáticos involucrados, realizaron conjeturas sobre las relaciones entre tales objetos, buscaron diferentes formas de comprobarlas basados en argumentos visuales y empíricos que proporciona GeoGebra. En general, los profesores usaron estrategias de medición de atributos de los objetos matemáticos y de examinación del rastro que deja un punto mientras se arrastra.

Palabras claves: *GeoGebra; Resolución de problemas; pensamiento matemático.*

RESUMO

Este artigo analisa e discute as vantagens e oportunidades oferecidas pelo GeoGebra durante o processo de resolução de problemas. Em particular, as formas de raciocínio matemático exibidas por oito professores do ensino médio da Costa Rica, relacionadas à aquisição e desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas associadas ao uso do GeoGebra, são analisadas e documentadas. Para isso, foi elaborada uma proposta de trabalho que inclui a construção e exploração de uma representação do problema, e a formulação e validação de conjecturas. Os resultados mostram que os professores fizeram várias representações do problema, examinaram as propriedades e atributos dos objetos matemáticos envolvidos, fizeram conjecturas sobre as relações entre esses objetos e procuraram diferentes formas de os verificar com base em argumentos visuais e empíricos fornecidos pelo GeoGebra. Em geral, os professores utilizaram

[1] Universidad de Costa Rica – william.poveda@ucr.ac.cr

estratégias para medir os atributos dos objetos matemáticos e para examinar o rasto que um ponto deixa enquanto é arrastado.

Palavras-chave: *GeoGebra; Resolução de problemas; pensamento matemático.*

ABSTRACT

This article analyzes and discusses the advantages and opportunities offered by GeoGebra during the problem-solving process. In particular, the mathematical reasoning forms exhibited by eight secondary school teachers in Costa Rica, related to the acquisition and development of problem solving strategies associated with the use of GeoGebra, are analyzed and documented. The proposal was developed that includes the elements: construction and exploration of a representation of the problem and formulation and validation of conjectures. The results show that teachers made several representations of the problem, examined the properties and attributes of the mathematical objects involved, made conjectures about the relationships between such objects, and sought different ways to check them based on visual and empirical arguments provided by GeoGebra. In general, the teachers used strategies to measure the attributes of the mathematical objects and to examine the trail that a point leaves while it is being dragged.

Keywords: *GeoGebra; Problem Solving; Mathematical Thinking.*

Introducción

Las tecnologías digitales abren nuevas rutas en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, no solo para obtener información sino también para que los estudiantes representen y exploren problemas matemáticos. En este contexto, en la formación matemática de un estudiante, los maestros pueden propiciar y buscar el desarrollo de diferentes estrategias y rutas para enfrentar las dificultades que se presentan a la hora de aprender conceptos o resolver problemas (Polya, 1945).

La resolución de un problema matemático va más allá de aplicar un procedimiento mecánico o algorítmico. Por lo contrario, es necesario que el estudiante adquiera un hábito de cuestionamiento, mediante el cual pueda resolver problemas. Por ejemplo, el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) como GeoGebra, puede utilizarse para integrar los procesos que intervienen en la resolución de problemas, ya que son entornos de software diseñados para incorporar la geometría euclidiana de una manera dinámica e interactiva, es decir, genera representaciones dinámicas del problema que se pueden convertir en una fuente para explorar en la búsqueda de soluciones.

Leung (2015) argumenta que una herramienta importante durante la exploración, dentro de un SGD, es el arrastre. El principio básico de arrastrar algún objeto de una figura es que ésta debe mantener todas sus propiedades según fue construida, así, es posible observar cómo cambian los atributos (longitud de un segmento, área, amplitud de uno o varios ángulos, etc.) de los objetos matemáticos involucrados. La importancia del arrastre es que permite observar invariantes o patrones entre los elementos de una figura, lo cual es la base para la formulación de conjeturas. Por ejemplo, en una familia de rectángulos *ABCD* de perímetro fijo, parte de la exploración consiste en arrastrar uno de sus vértices y observar cómo varía su área, esto permite determinar, empíricamente, las condiciones necesarias para obtener un rectángulo de área máxima. Además, un SGD proporciona la posibilidad de establecer conexiones entre argumentos geométricos y algebraicos en la justificación formal de conjeturas (Poveda, Aguilar-Magallón y Gómez-Arciga, 2018).

En este artículo se reportan los resultados de un estudio realizado con ocho profesores de secundaria en Costa Rica, quienes trabajaron tres problemas matemáticos en cuatro sesiones de cuatro horas cada una. El objetivo fue crear un ambiente de resolución de problemas con el uso de GeoGebra, el cual promueva el pensamiento matemático de los participantes. En cada sesión de trabajo se resaltó la importancia de la construcción de una representación del problema y el arrastre de puntos como un medio que permite observar la variación de los atributos de los objetos matemáticos, los cuales son la base para la formulación de conjeturas respaldadas, inicialmente, mediante argumentos visuales o empíricos. Posteriormente, se realizó una fase de elaboración de argumentos que involucraran propiedades y resultados algebraicos o geométricos.

La pregunta de investigación que sirvió de guía para el desarrollo de este estudio fue: ¿De qué manera el uso de GeoGebra influye en la construcción y el desarrollo del pensamiento matemático de profesores de secundaria en un ambiente en resolución de problemas? En este sentido, interesó analizar cómo GeoGebra potencia la adquisición y apropiación de estrategias al resolver problemas, a través del arrastre y la observación de sus atributos.

1. Marco conceptual

Según Schoenfeld (1985), aprender matemáticas está relacionado con la resolución de problemas ya que es un medio que permite identificar, explorar, probar y comunicar las estrategias de solución. Es decir, cuando un individuo resuelve problemas entra en un proceso exploración de diferentes representaciones, búsqueda de patrones, variantes y relaciones entre objetos matemáticos, presentación de argumentos, comunicación de resultados, planteamiento de preguntas y formulación de nuevos problemas.

Es importante hacer la diferencia entre problema y ejercicio. Polya (1962) define un problema como una situación que requiere la búsqueda consciente de una acción apropiada para el logro de un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata, mientras que resolver un ejercicio es aplicar un algoritmo o fórmula en el cual se tiene una idea de cómo se obtener la solución. Por ello, en esta investigación, se promueve que un problema resulta un componente importante para el aprendizaje, ya que en esta experiencia se da comprensión, validación de ideas, generalización y el uso del conocimiento por parte de los participantes, es decir, un problema se centra en el aprendizaje y no en su solución (Churchill, Fox y King, 2016).

Por otra parte, diferentes propuestas curriculares promueven un énfasis en la resolución de problemas en contextos digitales (NCTM, 2000; 2009). Por esta razón, en esta investigación se utiliza

GeoGebra para integrar los procesos que intervienen en la resolución de problemas, ya que, a través de los modelos dinámicos es posible explorar problemas desde distintas perspectivas que incluyen representaciones gráficas, numéricas, tabulares y algebraicas, lo que favorece la búsqueda de patrones, relaciones y formulación de conjeturas. Además, fomenta la formulación de conjeturas a partir de la información visual a través de la medición de la longitud de un segmento, la posición de un punto en el plano, la amplitud de un ángulo, el perímetro o área de un polígono, entre otros. Todas estas características también proporcionan la posibilidad de establecer conexiones entre diversos objetos matemáticos.

Un aspecto central de la investigación fue que los participantes vieran un problema como una plataforma que les permitiera la construcción y la adquisición de estrategias durante el proceso resolución (Schoenfeld, 1985). Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) argumentan que el uso GeoGebra permite al resolutor del problema desarrollar su pensamiento matemático, ya que es un medio que favorece la comprensión y la exploración del problema. Durante la fase de la *comprensión del problema*, se deben identificar los objetos matemáticos involucrados y establecer sus propiedades matemáticas, luego, construir un modelo dinámico que lo represente, el cual es la base para la *exploración del problema*, ya que, mediante el arrastre, permite observar el comportamiento de los atributos de los objetos matemáticos y formular conjeturas (Hölzl, 2001).

El diseño del estudio consistió en que los profesores estudiaran los problemas a través de las fases anteriores. Así, durante el proceso de resolución de cada problema, resulta importante la:

1. *Construcción de una representación y exploración del problema*. El objetivo es que los participantes identifiquen los objetos matemáticos involucrados y establezcan sus propiedades matemáticas, para posteriormente construir una representación en GeoGebra. Luego, que exploren el problema y planteen preguntas sobre el comportamiento de los objetos involucrados y sus propiedades.
2. *Formulación de conjeturas*. Las preguntas planteadas en la etapa anterior son la base y el camino para identificar y formular conjeturas. En una primera instancia, deben ser sustentadas o refutadas mediante argumentos visuales o empíricos, para ello se pueden utilizar las estrategias de arrastre, medición de sus atributos y rastro de un punto (Arzarello et al., 2002).
3. *Justificación de conjeturas*. Toda conjetura identificada debe ser justificada utilizando conceptos y relaciones matemáticas, como argumentos algebraicos o geométricos.

2. Metodología de la investigación

La finalidad de la investigación fue analizar y documentar la manera en que el uso de GeoGebra permite que los participantes se involucren en los procesos de plantear y responder preguntas, buscar información, formular conjeturas y justificarlas al explorar una representación del problema, mediante argumentos visuales o empíricos, tales como la medición y el rastro de un punto.

Los problemas matemáticos que trabajaron los maestros fueron los siguientes:

1. Dos granjeros desean sembrar un terreno que tiene forma de un cuadrado. ¿Cómo dividir el terreno para que cada granjero siembre exactamente la misma área?, ¿existen varias formas de hacer esa división?
2. En la construcción de triángulos isósceles, equiláteros e isósceles-rectángulos, ¿es posible que dos bisectrices internas de un triángulo formen un ángulo recto?
3. De todos los rectángulos que tienen un perímetro fijo, encontrar las dimensiones del que tiene el área máxima.

Los participantes de la investigación fueron ocho maestros de enseñanza secundaria de Costa Rica, quienes trabajaron estos tres los problemas usando de GeoGebra, durante cuatro sesiones de trabajo de cuatro horas cada una. En las sesiones de trabajo se promovió en los participantes una actitud inquisitiva en la comprensión de conceptos matemáticos y la resolución de problemas, es decir, se les alentó a formular preguntas y luego a buscar diferentes respuestas como un medio de obtener conocimiento. Esta investigación es la primera fase de un proyecto que consiste en trabajar con maestros para que luego ellos apliquen lo aprendido en sus aulas de matemáticas.

En la primera sesión de trabajo con los profesores, el investigador presentó las ideas generales del marco conceptual de resolución de problemas y se abordó el uso general de GeoGebra. Es importante mencionar que todos conocían el software, por lo que el trabajo consistió en profundizar en el uso específico de algunas herramientas. En las siguientes sesiones, los maestros recibieron un problema matemático por escrito, con el cual trabajaron en parejas durante dos horas y, al finalizar ese tiempo, cada pareja presentó las soluciones al resto del grupo. Cabe destacar que, durante esta etapa, los otros maestros y el investigador tenían la oportunidad de solicitar explicaciones de lo expuesto y reflexionar sobre las ideas y los conceptos matemáticos. El investigador monitoreó el trabajo de los maestros, tomó notas y orientó la discusión de las ideas planteando preguntas. Además, incentivó a los maestros a trabajar en tres elementos en cada problema: construcción de una representación del problema, formulación de conjeturas y sus justificaciones. Los detalles se muestran en la Tabla 1.

Para la organización de las sesiones se consideró el trabajo realizado por Mason y Johnston-Wilder (2006), en el cual recomiendan una participación activa de los estudiantes durante las discusiones de resolución de problemas. En este contexto, se definieron dos formas de organizar la participación de los maestros: la primera consistió en *trabajo en parejas*, lo cual permite a los participantes dar y probar ideas entre ellos antes de compartirlas a todo el grupo y, la segunda fue el *trabajo colectivo y plenario* el cual permite a todos conocer las ideas y los enfoques de los compañeros respecto de sus formas de resolver el problema.

Tabla 1: Elementos de trabajo en los problemas

Construcción y exploración de una representación del problema	*Entender el problema*: 1. Identificar información relevante. 2. Dar significado a los conceptos matemáticos involucrados en el modelo del problema. 3. Construir una representación del problema. *Identificar de manera explícita las estrategias* esenciales en la búsqueda de patrones o invariantes relacionadas con el comportamiento de objetos y sus atributos: 1. Casos particulares. 2. Cuantificación de los atributos (áreas, perímetros, ángulos, longitud de segmentos, etc.). 3. Rastro de un punto.
Conjetura	Al observar el comportamiento de las propiedades de los objetos involucrados y las relaciones entre ellos, durante el arrastre de puntos, los participantes formulan algunas conjeturas para la solución del problema.
Justificación	La validación de toda conjetura formulada debe transitar desde el uso de argumentos empíricos o visuales hasta la presentación de conceptos o relaciones matemáticas a través de procedimientos algebraicos o geométricos.

Fuente: Elaboración propia

Cada pareja entregó los archivos GeoGebra, con los cuales mostraron sus enfoques de resolución de los problemas al final de cada sesión de trabajo. Además, las presentaciones, las discusiones y las reflexiones fueron video grabadas y transcritas, así las fuentes de información son los archivos GeoGebra de cada pareja, las notas del investigador y los videos del trabajo colectivo y plenario. El análisis de la información se realizó en dos fases, la primera se enfocó en el trabajo en parejas, según los elementos de la Tabla 1 y la segunda en los aportes a las ideas expuestas en el plenario de cada grupo de trabajo.

3. Resultados

En este artículo se analizan los problemas 1 y 3 con el objetivo de contrastar la evolución y la adquisición de estrategias de solución relacionadas con el uso de GeoGebra que mostró el grupo de trabajo. La presentación y discusión de las soluciones y las estrategias utilizadas por los participantes de la investigación se centran en *los elementos de trabajo del problema* (Tabla 1). Es decir, interesa analizar los procesos que mostraron los participantes en la representación del problema en forma dinámica y cómo ayuda y potencia diversas maneras de encontrar soluciones, es decir, cómo GeoGebra favorece el desarrollo del pensamiento matemático de los participantes.

Discusión del problema de los granjeros

*El trabajo en parejas***.** Al inicio, las cuatro parejas construyeron en GeoGebra un cuadrado *ABCD* utilizando la herramienta Polígono regular, sin embargo, se les solicitó construirlo utilizando las herramientas compás, circunferencia y rectas perpendiculares. En esta etapa emergió una manera de crear una representación de un cuadrado, las cuatro parejas utilizaron un segmento *AB* como la base de la construcción, aquí resultó importante el uso de la circunferencia dados su centro y su radio y, además, las rectas perpendiculares.

En la fase de la comprensión del problema, la pareja 1 indicó que para resolverlo se necesitaban las medidas del lado o de la diagonal del cuadrado. El investigador guio la discusión planteando preguntas como: ¿dado un cuadrado como se puede dividir en dos figuras congruentes? ¿si las figuras resultantes son congruentes entonces tienen igual área? La búsqueda de respuestas llevó a un maestro a trazar la diagonal del cuadrado para obtener dos triángulos rectángulos congruentes y al otro a trazar la mediatriz de un lado, con lo que obtuvieron algunas soluciones al problema. Con esto, comprendieron que un problema matemático no necesariamente debe incluir información numérica.

Las otras parejas no mostraron inconvenientes en la comprensión del problema y obtuvieron soluciones similares a las encontradas por la pareja 1. El investigador resaltó la importancia de la medición de objetos en GeoGebra como un elemento que proporciona argumentos visuales en la justificación de conjeturas. Los participantes midieron el área las figuras resultantes para comprobar sus soluciones, por ejemplo, en la Figura 1 se detalla la representación del cuadrado que realizó la pareja 1, una solución del problema al trazar una de las diagonales del cuadrado y el uso de la medición de áreas como estrategia para sustentar la igualdad entre las áreas de los triángulos, es decir, al arrastrar los puntos *A* o *B*, las áreas de los triángulos *ABD* y *ACD* siempre son iguales.

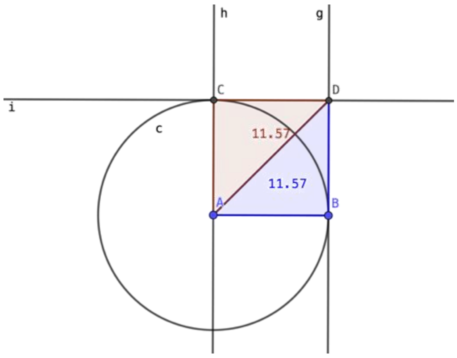

Figura 1: Construcción de un cuadrado en GeoGebra.
Fuente: Archivos entregados por la pareja 2 en la sesión de trabajo 2.

Los participantes afirmaron quedar conformes con las soluciones encontradas, ante esto se plantearon las siguientes preguntas a cada una de las parejas: ¿existe otra forma de resolver el problema? ¿y si se traza una recta diferente a la mediatriz de un lado o a la que contiene a una de las diagonales del cuadrado? Se les guió a construir un cuadrado *ABCD* y colocar dos puntos *F* y *D* sobre los lados *DC* y

AB, respectivamente, y explorar cómo el arrastre de los puntos *F* y *E* y la medición de las áreas de los cuadriláteros *AEFD y EBCF* permite determinar otras soluciones.

Durante la etapa de construcción y exploración de una representación del problema, las cuatro parejas arrastraron los puntos *F* y *D* y utilizaron la herramienta *Distancia o Longitud* y determinaron: si *AE=FC* entonces las áreas de los cuadriláteros *AEFD* y *EBCF* son iguales (Figura 2), es decir, evidenciaron el uso de la estrategia medición de longitud de un segmento para la resolución del problema. GeoGebra permitió observar las variaciones de las áreas de los cuadriláteros cuando se arrastraba el punto *F* o *E*, permitiendo la comprobación de la solución.

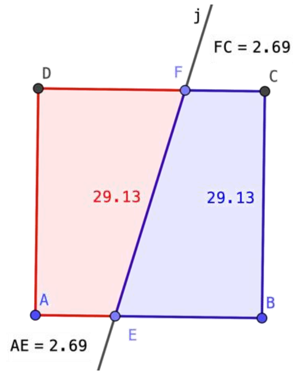

Figura 2: Uso de la estrategia medición de objetos en GeoGebra.
Fuente: Archivos entregados por la pareja 3 en la sesión de trabajo 2.

La pareja 4, profundizó en la exploración de la representación dinámica y, observaron, mediante el arrastre de los puntos *F* y *E*, que la recta *FE* parecía contener el centro del cuadrado. Para verificar de forma visual tal conjetura, utilizaron la herramienta Medio o Centro para obtener el centro del cuadrado. Así, formularon el resultado: *Sea ABCD un cuadrado y el punto G su centro. Si la recta FE pasa por G entonces siempre divide al cuadrado en dos figuras que tienen la misma área* (Figura 3). En la fase de justificación, utilizaron argumentos geométricos tales como congruencia de triángulos, propiedades de las diagonales, ángulos opuestos por el vértice para concluir la congruencia de las figuras *AEFD* y *EBCF* (Véase la Figura 3).

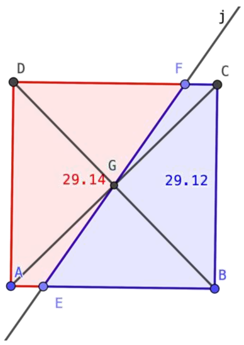

Figura 3: Observación que permitió el arrastre de los puntos F y E: G es el centro del cuadrado.
Fuente: Archivos entregados por la pareja 4 en la sesión de trabajo 2.

Con el objetivo de explorar de otras formas de solucionar el problema, se instó a todos los grupos de trabajo a formular preguntas y buscar diferentes formas de solucionarlas. En la fase de la formulación de la conjetura, la pareja 3 propuso otra solución a las descritas anteriormente, inicialmente plantearon: "*si G es punto medio de un lado entonces se tiene un triángulo de base y altura igual al lado del cuadrado por lo que su área es la mitad del cuadrado",* luego observaron que sucede lo mismo si *G* está sobre uno de los lados. Formularon la siguiente pregunta ¿qué sucede si *G* es cualquier punto en el interior del cuadrado? Para contestar la pregunta, hicieron una construcción en GeoGebra (Figura 4) en la cual *s* es la suma de las áreas de los triángulos *ABG* y *DCG*. Concluyeron que sin importar la posición del punto *G*, se tiene que *s* siempre es la mitad del área del cuadrado. Luego, proporcionaron argumentos geométricos para justificar dicha conjetura: trazaron las rectas perpendiculares a *AD* y a *AB* que pasan por *G* las cuales determinan triángulos congruentes.

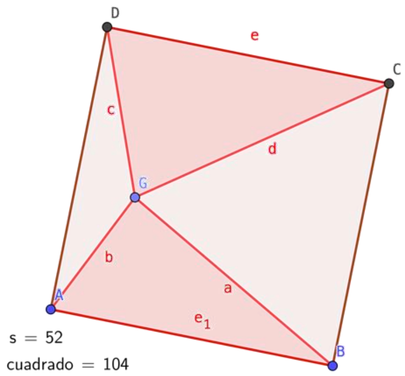

Figura 4: Uso de la estrategia medición de áreas en GeoGebra para resolver el problema.
Fuente: Archivos entregados por la pareja 3 en la sesión de trabajo 2.

El trabajo colectivo y plenario. La segunda parte de las sesiones fue la discusión y reflexión de las soluciones encontradas y las estrategias utilizadas. En resumen, las preguntas que se formularon durante la plenaria fueron las siguientes:

1. ¿Cómo construir un cuadrado dada su diagonal? ¿Cómo determinar, sin ayuda de la herramienta Medio o centro, el centro del cuadrado? Para contestar estas preguntas, un participante realizó una construcción en GeoGebra utilizando el punto medio de la diagonal del cuadrado y una circunferencia con ese centro y de diámetro la longitud de la diagonal.
2. ¿Cómo enseñar el concepto y propiedades del cuadrado con ayuda de GeoGebra? Los participantes mencionaron que un estudiante puede explorar las propiedades de las diagonales del cuadrado y concluir, basándose en la medición de longitudes y ángulos, que las dos son congruentes, las diagonales se bisecan, las diagonales son perpendiculares, las diagonales bisecan los ángulos internos, etc.

En la exposición del trabajo de la pareja 4, durante la fase de construir una representación del problema, un participante propuso una modificación al modelo que se muestra en la Figura 4: colocar el punto *F* sobre el lado DC y trazar la recta *FG*, donde *E* es centro del cuadrado *ABCD* y así, no depender del arrastre del punto *E* (Figura 5).

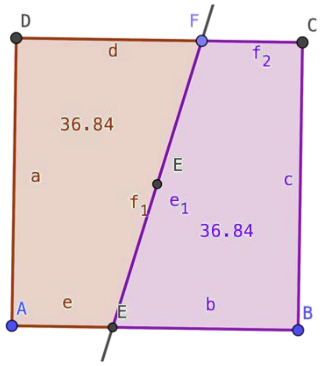

Figura 5: Una mejora a la representación expuesta por la pareja 4 durante la plenaria.
Fuente: Archivos GeoGebra generados durante la plenaria de la sesión de trabajo 2.

Por otro lado, la pareja 3, al compartir su solución (véase la Figura 4), hizo posible que surgiera otro método de justificación basado en argumentos algebraicos. En plenaria se estableció que la suma de las alturas de los triángulos *ABG* y *DCG*, sin importar la posición del punto *G*, siempre es igual a la longitud del lado del cuadrado y por lo tanto, la suma de las áreas de estos triángulos es la mitad del área del cuadrado. Pensar en esta justificación y la proporcionada por la pareja 3, llevó a los participantes a establecer otra solución del problema. Ellos observaron que *EDFG* es un rectángulo entonces, por las propiedades de las diagonales, *EF=DG*, de manera análoga sucede lo mismo con *FCHG*, *EGIA* y *HGIB*, entonces se puede formar el cuadrilátero *EFHI* el cual, sin importar la posición de *G*, siempre tiene área igual a la mitad del área del cuadrado (Figura 6). Con esto, determinaron otra posible solución al problema.

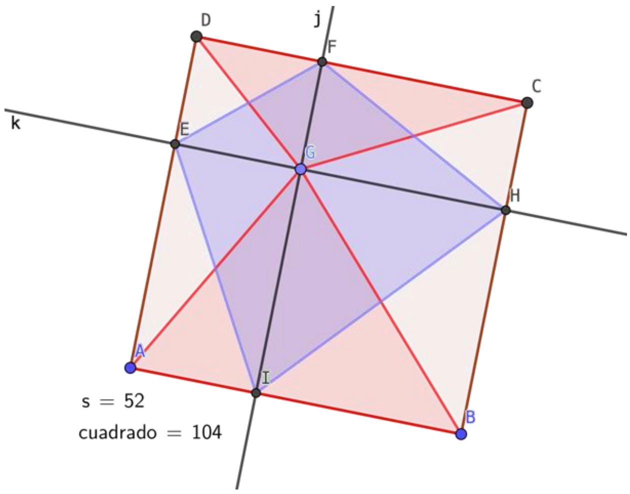

Figura 6: Otra solución al problema derivada de la discusión en la plenaria.
Fuente: Archivos GeoGebra generados durante la plenaria de la sesión de trabajo 2.

Al final de la sesión, el investigador propuso a los participantes modificar las condiciones iniciales del problema y explorar si eran válidas las soluciones encontradas, algunos ejemplos de las preguntas formuladas son: ¿qué sucede si en lugar de un cuadrado se tratase de un rectángulo?, ¿qué sucede si es un rombo?, ¿qué sucede si es cuadrilátero irregular?, ¿qué sucede si es pentágono regular?, ¿qué sucede si es un polígono regular?, ¿qué sucede si es un polígono irregular?

En la siguiente sesión, un maestro mostró la exploración que realizó al preguntarse ¿qué sucede si es cuadrilátero irregular? Él afirmó que, inicialmente, pensó en rectángulo y rombos y obtuvo soluciones similares a las del cuadrado, pero lo que le llamó la atención fue la solución encontrada para cuadriláteros irregulares. En resumen, él determinó que el cuadrilátero *EFGH* (cuyos vértices son los puntos medios de los lados de un cuadrilátero irregular *ABCD*), tiene la mitad del área de *ABCD* (Figura 7). Durante la plenaria surgió el resultado de que *EFGH* es paralelogramo y se sustentó con la herramienta Relación de GeoGebra.

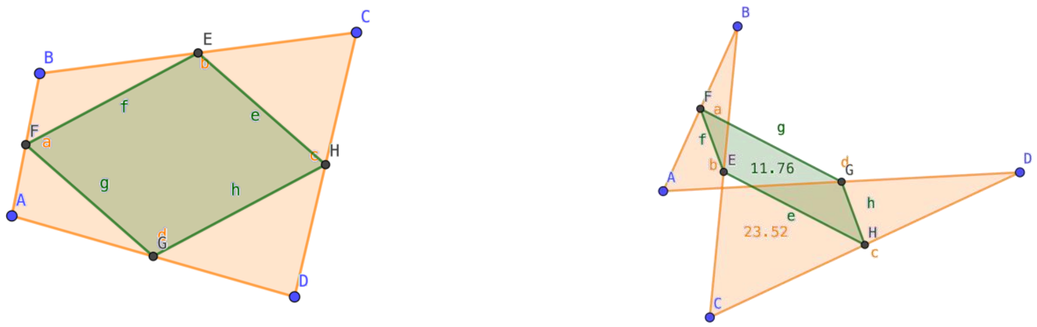

Figura 7: Extensión del problema original de los granjeros
Fuente: Archivos GeoGebra generados durante la plenaria de la sesión de trabajo 2.

El problema del rectángulo de perímetro fijo. En la cuarta sesión de trabajo, se proporcionó el siguiente problema a los maestros para que lo resolvieran en dos horas: De todos los rectángulos que tienen un perímetro fijo encontrar las dimensiones del que tiene el área máxima.

El trabajo en parejas. Al inicio, las parejas se enfrentaron a la construcción de la representación del problema en GeoGebra presentando varios inconvenientes, el principal fue cómo crear un rectángulo *ABCD* de tal manera que cuando se muevan sus vértices se conserve su perímetro. Sin embargo, tras utilizar conceptos y relaciones matemáticas durante la construcción tales como: circunferencias, radios, rectas paralelas y perpendiculares, las cuatro parejas lograron el objetivo; también, utilizaron el plano cartesiano para simplificar la representación (esta estrategia se trabajó en la Sesión 2). La estrategia de construcción se basó en trazar un segmento *AB* y un punto *C* sobre *AB*, así, *AC* y *CB* determinan las dimensiones del rectángulo. Con la herramienta Perímetro de GeoGebra, determinaron el perímetro del rectángulo y comprobaron la validez de la representación del problema, ya que al arrastrar el punto *C*, se mantiene el valor del perímetro del rectángulo.

Durante el proceso de exploración y formulación de conjeturas, todos los participantes sabían la respuesta y la forma de justificarla mediante el uso del cálculo diferencial, sin embargo, el objetivo del problema era comprender y dar sentido a la situación y no aplicar un algoritmo para llegar a la respuesta. Se les cuestionó: ¿cómo determinar el comportamiento del área del rectángulo sin un modelo algebraico? Se les motivó a pensar y a reflexionar sobre la relación que existe entre la longitud del lado *AC* y el área del rectángulo en términos de la representación elaborada en GeoGebra. Luego, el investigador introdujo la estrategia del uso del *Rastro* de un punto, para esto, solicitó a cada pareja definir un punto *P* con coordenadas *x*=*AC* y *y*=área del rectángulo, y, posteriormente, arrastrar el punto *C* y observar la trayectoria que define el punto *P*; 3 parejas utilizaron las herramientas *Mostrar rastro* para visualizar el comportamiento del punto *P* y establecieron que se trataba, visualmente, de una parábola. La Figura 8 muestra la representación elaborada por las tres parejas. El grupo de trabajo que no realizó la construcción recibió ayuda para hacerlo.

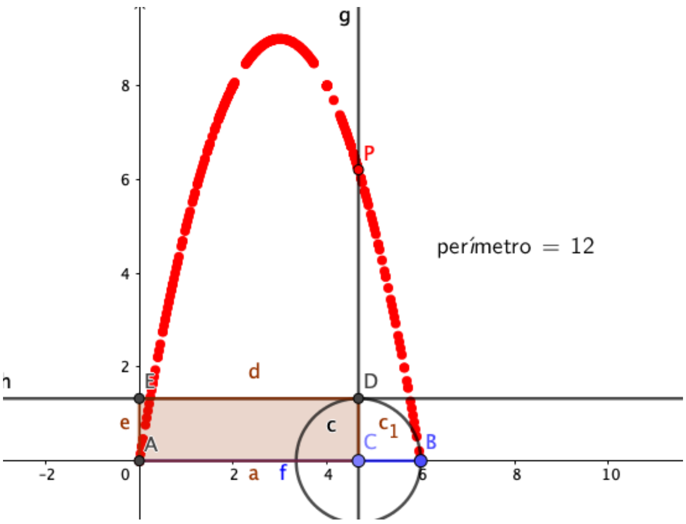

Figura 9: Uso de la estrategia Rastro en GeoGebra para resolver el problema.
Fuente: Archivos entregados por la pareja 3 en la sesión de trabajo 4.

Los participantes asociaron la trayectoria que describe *P* cuando se mueve *C* con una parábola y el área máxima con su vértice. Utilizaron el concepto de eje de simetría de la parábola para argumentar que el rectángulo de largo *n* y ancho *m* tiene la misma área que el rectángulo de largo *m* y ancho *n*. Además, se observó que el modelo del problema permitió a los participantes visualizar la variación del área del rectángulo y determinar, visualmente, la existencia de uno con área máxima al arrastrar el punto *C*.

El trabajo colectivo y plenario. El problema resultó de interés para los maestros ya que no se requirió de un modelo algebraico para obtener la solución del problema y en donde, se puede asociar el concepto de parábola y sus propiedades. La discusión giró en torno a la fase de justificación de la solución encontrada. Los maestros en plenaria, sustentaron la existencia de un rectángulo de área máxima mediante dos argumentos visuales y empíricos:

1. Se señaló que al arrastrar el punto *C* y observar las coordenadas de *P*, el valor del área del rectángulo aumenta desde cero y después disminuye hasta volver a ser cero, por lo tanto, existe un rectángulo de área máxima.
2. Al arrastrar el punto *C*, en una parte de la gráfica la pendiente de la recta tangente es positiva y en otra, es negativa. Así concluyeron que el punto donde la pendiente cambia de positiva a negativa es cuando se obtiene un rectángulo de área máxima, es decir, cuando la pendiente de la recta tangente es cero (Figura 10).

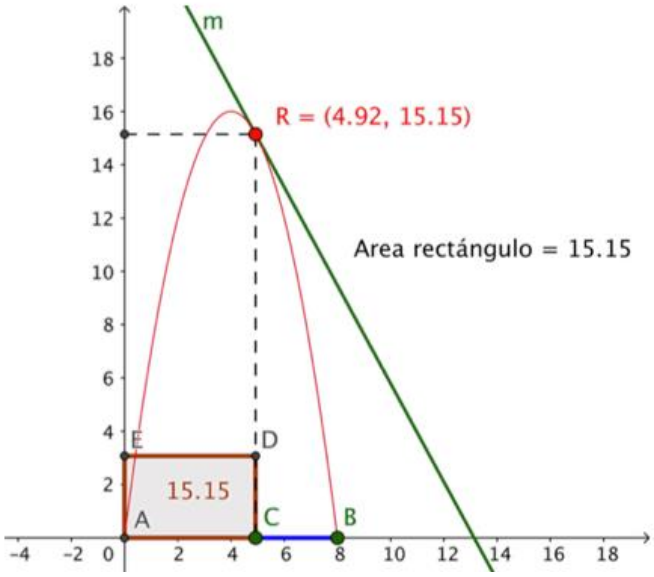

Figura 10: Uso del concepto de recta tangente durante la fase de justificación de la conjetura.
Fuente: Archivos GeoGebra generados durante la plenaria de la sesión de trabajo 4.

De esta manera, los maestros coincidieron en que el rastro de *P* les permitió observar la relación que existe entre su punto máximo y el lado del rectángulo y concluyeron que el área máxima se obtiene cuando los lados tienen la misma longitud, es decir, cuando se forma un cuadrado.

En la parte final de la actividad se relacionó el discriminante de una ecuación de segundo grado con el problema inicial, para generar la discusión, se solicitó a los maestros colocar un punto *P* sobre el eje *Y* y construir la recta *n* perpendicular al eje Y y que pasa por *P* (Figura 11).

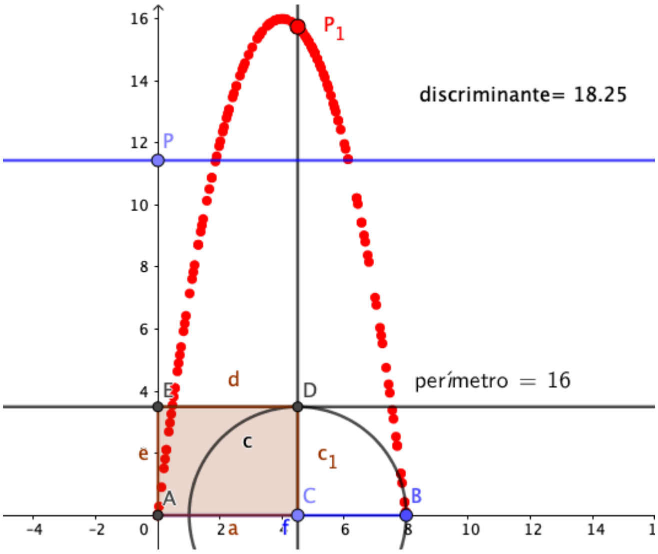

Figura 10: Relación del discriminante con el problema inicial.
Fuente: Archivos GeoGebra generados durante la plenaria de la sesión de trabajo 4.

En este contexto, los maestros centraron su atención en la solución del sistema de ecuaciones:

$$y = k$$

$$y = x(8 - x) = -x^2 + 8x$$

donde *x* representa la longitud del segmento *AB* y *k* es la distancia de origen del plano cartesiano al punto *P*, para el caso particular *AB=8.* Los participantes señalaron la relación del valor del discriminante de $-x^2 + 8x = k$ con la cantidad de veces que corta la recta *y=k* a la parábola, por ejemplo, observaron que las gráficas de $y = k$ y $y = -x^2 + 8x$ se cortan en dos puntos si el discriminante de $-x^2 + 8x = k$ es mayopr que cero.

Conclusiones

Sin la existencia de una solución inmediata que implique la aplicación de un procedimiento algorítmico, los problemas matemáticos fueron vistos por los maestros como desafiantes. Mediante el uso de GeoGebra, construir una representación de cada problema representó para los participantes un punto de partida que les permitió identificar conceptos, plantear y sustentar conjeturas basadas en el arrastre de los objetos matemáticos presentes en la configuración y sus relaciones o invariantes.

El trabajo de los maestros giró alrededor de tres elementos:

1. *Construcción de una representación y exploración del problema.* El proceso de construcción de una representación de los problemas generó oportunidades a los participantes para cuestionarse sobre el significado de conceptos matemáticos y sobre la búsqueda de otras maneras de representar

el problema. Por ejemplo, en la fase de comprensión del problema de los granjeros los participantes utilizaron las propiedades del cuadrado para construirlo. Además, en la plenaria, permitió discutir diversos conceptos y relaciones matemáticas a partir de compartir ideas y buscar respuestas en forma colaborativa.

2. *Formulación de una conjetura.* Para justificar visual y empíricamente las conjeturas, los participantes utilizaron el arrastre y la cuantificación de atributos de objetos matemáticos. En este sentido, mediante el uso de GeoGebra, los participantes encontraron información relevante sobre el comportamiento o propiedades de objetos por medio de la medición de sus atributos y el estudio del rastro de un punto cuando se mueve otro.
3. *Justificación.* Los resultados muestran que los participantes transitaron desde el uso de argumentos empíricos o visuales hasta aquellos que involucran, por ejemplo, propiedades de alguna figura geométrica conocida, criterios de congruencia de triángulos o procedimientos basados en álgebra, cálculo o geometría analítica. Además, presentaron diferentes argumentos en la justificación de las conjeturas.

Durante el trabajo colectivo y plenario, los maestros identificaron contenidos y relaciones matemáticas relevantes, procesos y estrategias que fueron importantes durante la solución de las tareas propuestas. Reconocieron que sus presentaciones, discusiones y reflexiones dentro del grupo eran importantes no solo para conocer el trabajo de los otros, sino también para aportar o refinar su propio trabajo y extender las ideas. También, reconocieron que los argumentos visuales y empíricos que proporciona GeoGebra, pueden ser utilizados para identificar relaciones matemáticas de una manera intuitiva y que no son tan evidentes cuando se trabaja en un ambiente de papel y lápiz.

Agradecimientos

A la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica por el apoyo recibido.

Referencias

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(3), 66-72.

Churchill, D., Fox, B. y King, M. (2016). Framework for Designing Mobile Learning Environments. En D. Churchill, B. Fox y M. King (Eds.), *Mobile Learning Design, lecture Notes in Educational Technology* (pp. 3-25). Singapore: Springer.

Hölzl, Reinhard (2001). Using Dynamic Geometry Software to Add Contrast to Geometric Situations – A Case Study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(1), pp. 63–86. ISSN 1573-1766. doi: 10.1023/A:1011464425023.

Leung, A. (2015). Discernment and Reasoning in Dynamic Geometry Environments. En: Sung Je Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, pp. 451–469. Springer International Publishing. ISBN 978-3-319-17186-9. doi: 10.1007/978-3-319-17187-6.

Mason, J. y Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and Using Mathematical Tasks*, Segunda Edición. Tarquin, St Albans.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2009). F*ocus in High School Mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pólya, G. (1945). *How to Solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: Wiley.

Poveda, W., Aguilar-Magallón, D. y Gómez-Arciga, A. (2018). Problem Solving and the use of digital technologies in a MOOC: Design and Implementation. En T. Hodges, G. Roy y A. Tyminski (Eds.), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1203-1218). Geenville, SC: : University of South Carolina & Clemson University.

Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín, M. (2011). Framing a problem solving approach based on the use of computational tools to develop mathematical thinking. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Conference of the European society for Research in Mathematics Education* (pp. 2258-2277). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Schoenfeld A. (1985). *Mathematical problem Solving*. New York: Academic Press.

Semblanza del autor

Máster en Matemáticas por la Universidad de Costa Rica (UCR). Realizó sus estudios de doctorado en Matemática Educativa del Cinvestav-IPN (México). Su línea de investigación se centra en los ambientes de aprendizaje en línea en un entorno de resolución de problemas y uso coordinado de tecnologías digitales. Ha participado en los congresos North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA) y otros congresos celebrados en México y Costa Rica. En la actualidad, es profesor en la Escuela de Matemática de la UCR e investigador en el Centro de Investigación Matemática y Meta-Matemática de la Escuela de Matemática de la misma casa de estudios.

Complementos del artículo

El presente artículo está asociado a la ponencia que el autor dictó en la sesión 5 del Año 1 del Coloquio GeoGebra, organizado por la Comunidad GeoGebra Latinoamericana, cuyo video, presentación y recursos puede encontrar en los siguientes enlaces:

Ponencia	5
Fecha de la ponencia	Miércoles 24 de julio de 2019
Video	https://youtu.be/VYTFQCc-el8
Presentación y recursos	https://www.geogebra.org/m/zavpecwu#chapter/412002
Cartel de la sesión